Лекция 4. *Динамика твёрдого тела. Сохранение импульса и момента импульса*

4.4. Вращение ТТ относительно закреплённой оси.

4.4.1. Осевой момент импульса (расчёт)

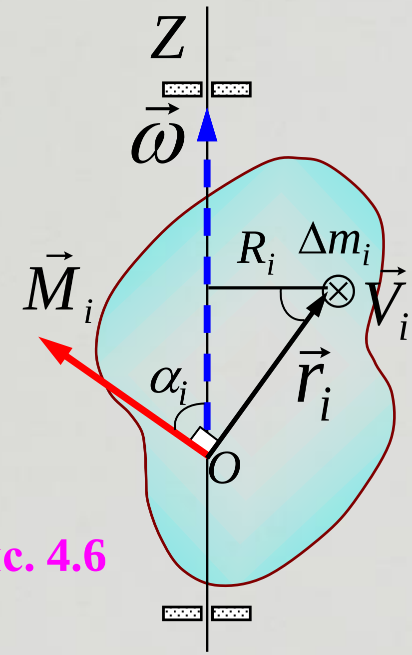


Рис. 4.6

$$M_{iz} = M_i \cdot \cos\alpha_i = r_i \cdot \Delta m_i \upsilon_i \cdot \cos\alpha_i =$$
$$= \Delta m_i \upsilon_i = \Delta m_i \cdot \omega R_i^2$$

$$M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta m_i \omega R_i^2\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta m_i R_i^2\right)\right] \cdot \omega$$

Вот «откуда»: $$I_z = \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta m_i R_i^2\right)$$

♣ *Результат*: $$M_z = I_z \cdot \omega$$

Аналогии ??

4.4.1. Осевой момент импульса

Доска 1

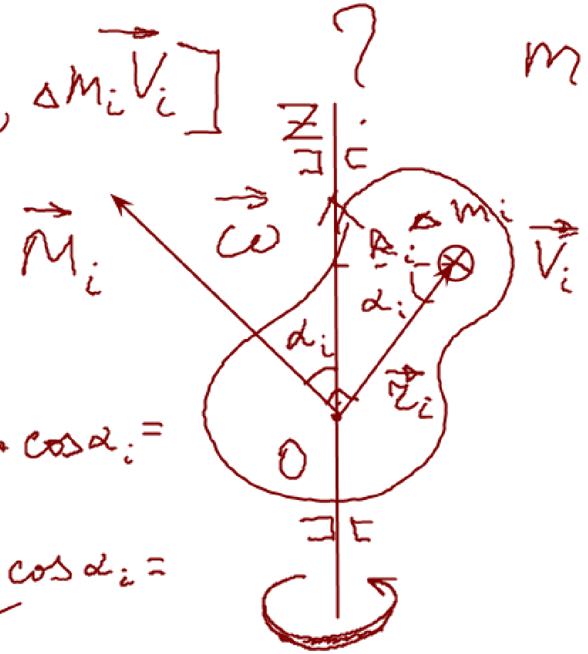
$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_i \vec{N}_i^{\,\text{внешн.}};$$

(Опр.)

$$\vec{M} = \sum_i \left[\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{V}_i\right]$$

?

m

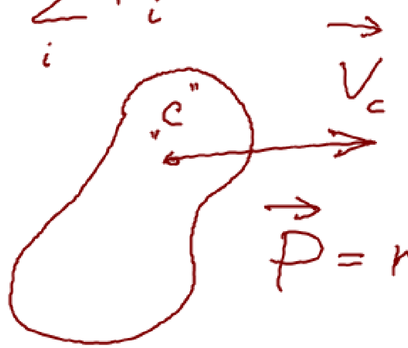


M_z — ?

$$z: \quad \frac{dM_z}{dt} = \sum_i N_{iz}^{\text{внешн}}$$

$$M_{zi} = r_i \cdot \Delta m_i V_i \cdot \cos\alpha_i = \underbrace{r_i \cdot \Delta m_i \cdot \omega R_i \cos\alpha_i}_{R_i} = \Delta m_i R_i^2 \cdot \omega.$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$



$$\vec{P} = m\vec{V}_c$$

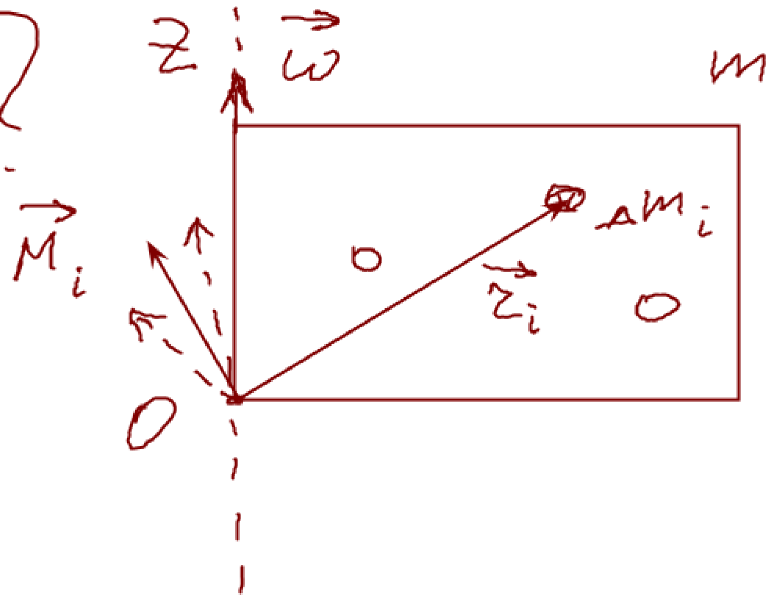
$$M_z = \underbrace{\sum_i \left(\Delta m_i R_i^2\right)}_{I_z} \cdot \omega$$

$$M_z = I_z \omega$$

$$\boxed{M_z = I_z \cdot \omega}$$

Доска 2

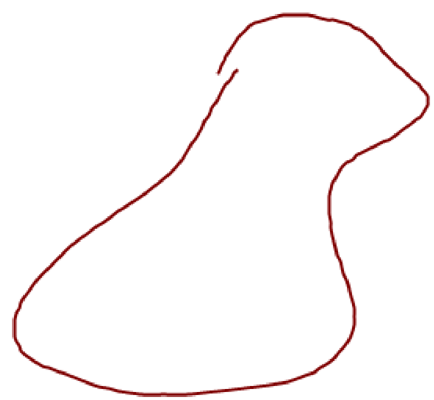
$$\vec{M} \cancel{=} I_z \vec{\omega} \; ?$$



$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i$$

$$\vec{\omega} \uparrow\uparrow z;$$

$$\vec{M} \nparallel z$$



«импульс»: $\vec{P} = m\vec{V}_c$

«Момент импульса»: $M_z = I_z \cdot \omega$

(осевой)

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\vec{a}_c$$

$$\frac{dM_z}{dt} = I_z \beta_z$$

… и ещё!

4.4.2. Основное уравнение динамики вращательного движения

«уравнение моментов»: $\frac{dM_z}{dt} = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внеш}$ $\Rightarrow$

$$m\vec{a}_c = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{внеш}$$

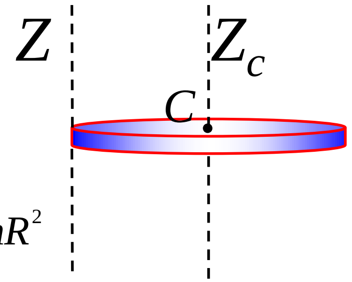
2-й закон Н.:

$$I_z \beta_z = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внеш}$$

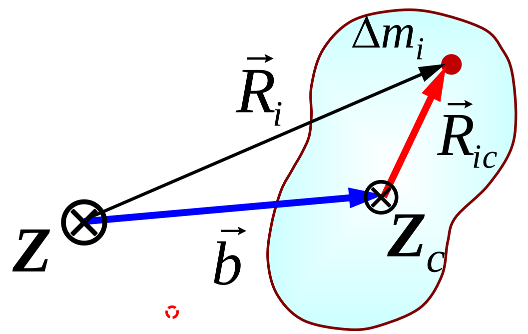
“2-й закон Н. для вращения”:

4.4.3. Теорема Гюйгенса-Штейнера (“о параллельных осях”)

Теорема Гюйгенса-Штейнера :



$$I_z = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$



$$\vec{R}_i = \vec{b} + \vec{R}_{ic}$$

Рис. 4.7 ***а*** ***б***

$$I_z = I_c + mb^2$$

♣ ***Момент инерции I_z твёрдого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через его центр масс, и произведения массы тела на квадрат расстояния b между осями***

*) *Доказательство:*

$$I_z = \sum_{i=1}^{n}\left(\Delta m_i R_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[\Delta m_i \underline{\underline{\left(\vec{b} + \vec{R}_{ic}\right)^2}}\right] =
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i b^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\right) b^2 = mb^2 \\
+ \\
\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_{ic}^2 = I_{zc} \\
+ \\
2\left(\vec{b}, \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \vec{R}_{ic}\right) = 0 \quad !
\end{cases}$$

$$\left(\vec{b} + \vec{R}_{ic}\right)^2 = b^2 + 2\left(\vec{b}, \vec{R}_{ic}\right) + R_{ic}^2$$

4.5. Динамика плоского движения твёрдого тела. Система центра масс

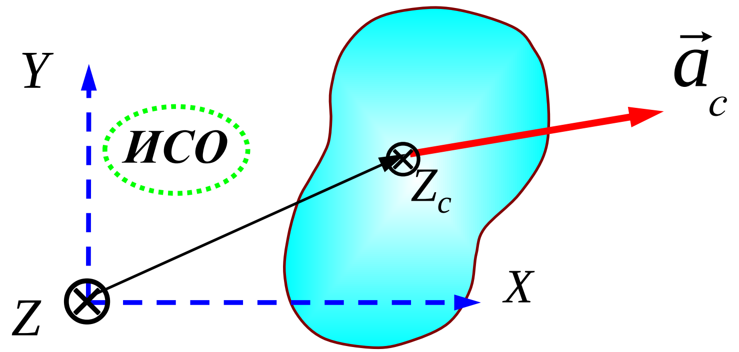


Рис. 4.8

$$\vec{a}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,внешн.}}{m}$$

$$I_z \cdot \beta_z = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внешн.}$$

НО

$$I_z = f(t)$$

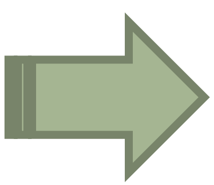
! … ?

! Уравнение моментов относительно центра масс (или оси Z_c) выглядит так же, как и в инерциальной системе отсчёта:

$$\frac{d\vec{M}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,внешн.}$$

(даже если эта система неинерциальна!)

$$I_{zc}\beta_z = \sum_{i=1}^{n} N_{zi}^{внешн.} \Rightarrow \begin{cases} m\vec{a}_c = \vec{F}^{\,внешн.}; \\ I_{zc}\beta_z = N_{zc}^{внешн.}; \\ I_{zc} = \quad \dots \quad ; \\ + \quad \text{"кинематика"} \end{cases} \qquad (**)$$



Пример 4.1. Тело скатывается по наклонной плоскости. Найти ускорение его центра масс. Каковы условия качения без проскальзывания?

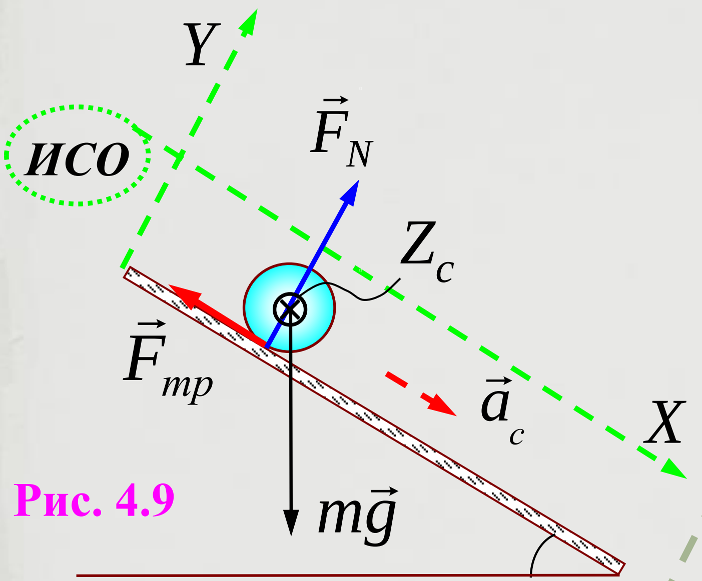


Рис. 4.9

$$\begin{cases} ma_c = mg\cdot\sin\alpha - F_{тр} \\ (0 = mg\cdot\cos\alpha - F_N) \\ I_{Zc}\beta = F_{тр}\cdot R \\ I_{Zc} = \ldots \\ a_c = \beta\cdot R \end{cases}$$

$$a_c = \frac{mg\sin\alpha}{m + I_{zc}/R^2}$$

Сплошной цилиндр: $a_c = \dfrac{2}{3}g\sin\alpha$

Полый цилиндр: $a_c = \dfrac{1}{2}g\sin\alpha$

Сплошной шар: $a_c = \dfrac{5}{7}g\sin\alpha$

Д.З.: $\mu > \dfrac{tg\alpha}{1 + mR^2/I_{zc}}$

Доска 3

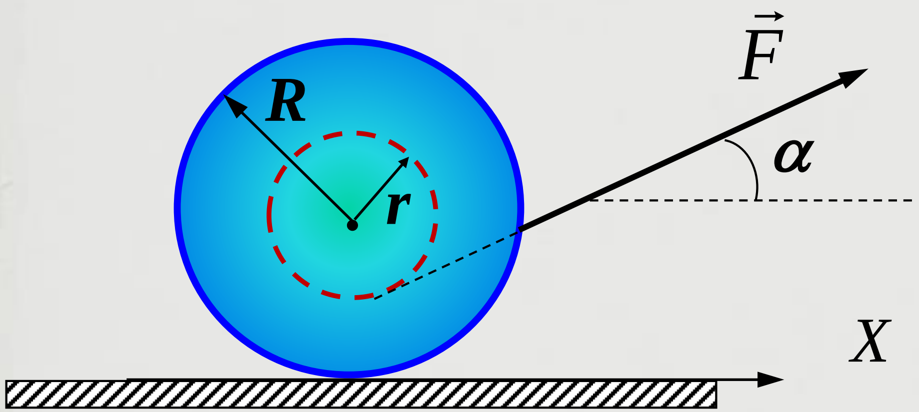
$$\beta = \frac{a_c}{R} \longrightarrow \frac{I_{zc}}{R^2} a_c = F_{тр}$$

$$m a_c = mg\sin\alpha - \frac{I_{zc}}{R^2} a_c$$

$$a_c = \frac{mg\sin\alpha}{m + I_{zc}/R^2} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_c = \frac{2}{3} g \sin\alpha \\ \ldots \end{array} \right.$$

диска $\quad I_z = \dfrac{mR^2}{2}$

Пример 4.2. (Задача о «послушной катушке») На горизонтальной поверхности лежит катушка с намотанной на неё нитью. За нитку тянут с силой F под углом α и катушка катится по поверхности без проскальзывания. Найти ускорение центра масс катушки. Величины F, m, I_Z, α, R и r считать заданными.



$$\begin{cases} ma_x = F\cdot\cos\alpha - F_{mp} \\ \left(\, 0 = F_N + F\cdot\sin\alpha - mg \,\right) \\ I_{zc}\cdot\beta_z = F_{mp}\cdot R - F\cdot r \\ a_x = \beta_z\cdot R \end{cases}$$

$$a_x = \frac{F}{m + I_{zc}/R^2}\cdot\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right)$$

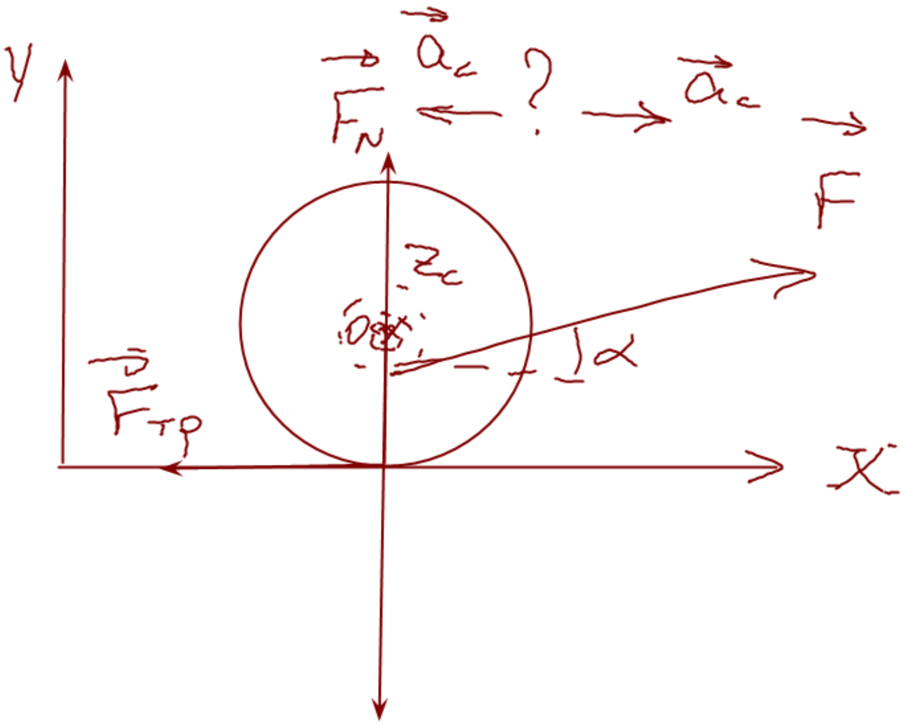
$$a_x \begin{cases} > \\ < \\ = \end{cases} \quad ??$$

Д.З.: Выяснить условие отсутствия проскальзывания? $\leftarrow$ – – – $\left(F_{mp} < \mu\cdot F_N\right)$

Если проскальзывание: $F_{mp}^{\text{ск}} = \mu F_N = \mu\cdot(mg - F\cdot\sin\alpha)$

$$\beta = \frac{2\mu g\cos\alpha}{R}; \qquad a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha);$$

Доска 4



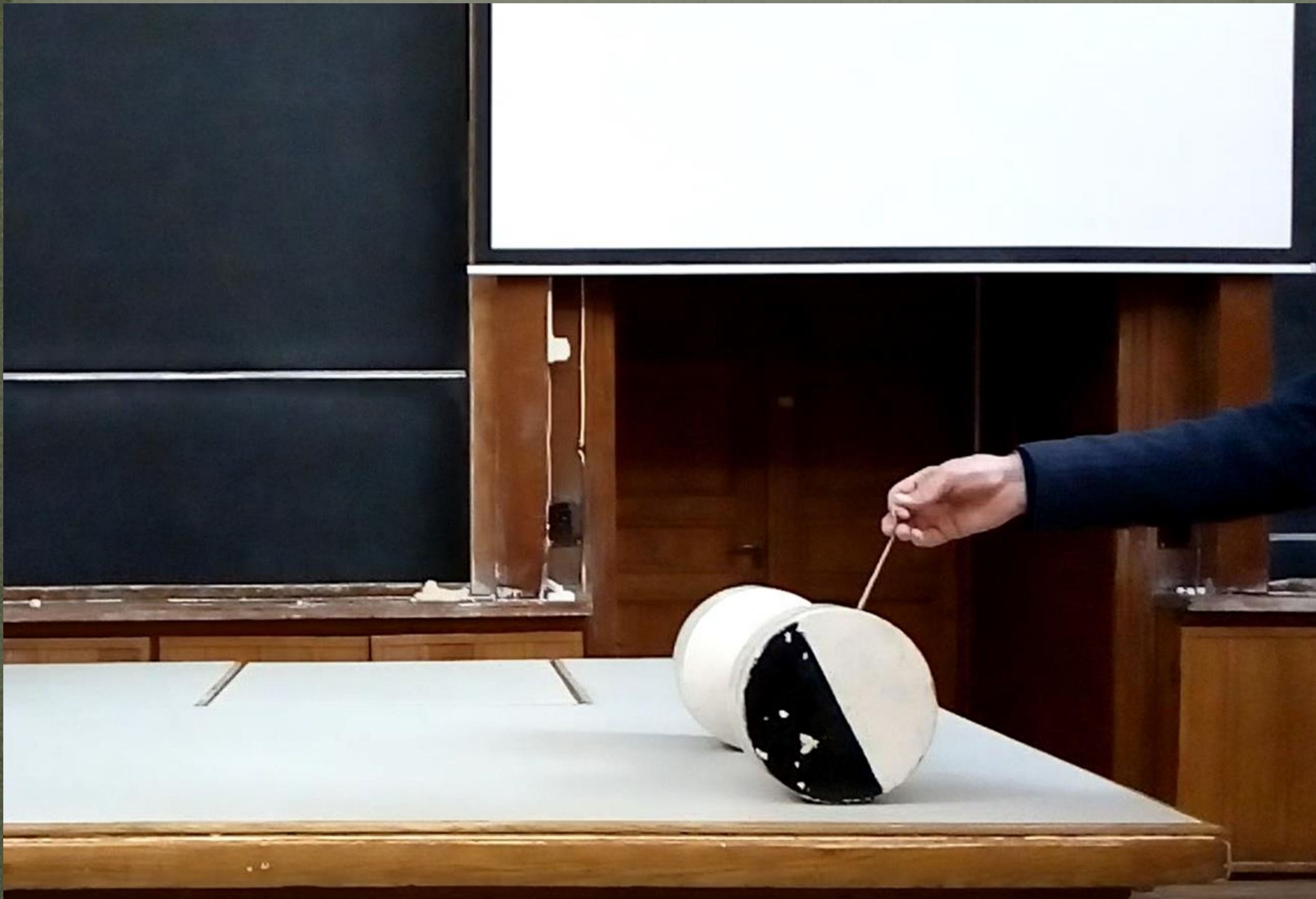
$$\begin{cases} ma_x = F\cdot\cos\alpha - F_{тр} \\ \left(0 = F_N - mg + F\cdot\sin\alpha\right) \\ I_{zc}\cdot\beta_z = F_{тр}\cdot R - F\cdot r \\ a_x = \beta_z\cdot R \end{cases}$$

$$a_x = \frac{F\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right)}{m + I_{zc}/R^2};$$

$$\cos\alpha > \frac{r}{R} \Rightarrow a_x > 0$$

$$\cos\alpha < \frac{r}{R} \Rightarrow a_x < 0$$

"Послушная катушка"



Проскальзывание: $F_{тр}^{ск} = \mu F_N = \mu \cdot (mg - F \cdot \sin\alpha)$

§ 5. Законы сохранения в механике

5.1. Закон сохранения импульса

ИСО:

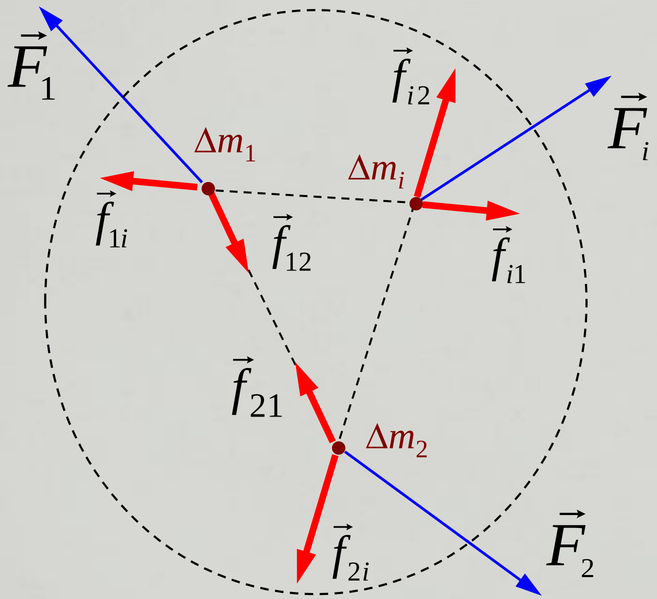


Рис. 4.3

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}_1}{dt} = \sum\limits_{j\neq 1} \vec{f}_{1j} + \vec{F}_1^{\,внешн}; \\ \quad\dots \qquad\qquad \dots \\ \dfrac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum\limits_{i\neq j} \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i^{\,внешн}; \\ \quad\dots \qquad\qquad \dots \\ \dfrac{d\vec{p}_n}{dt} = \sum\limits_{j\neq n} \vec{f}_{nj} + \vec{F}_n^{\,внешн}. \end{cases} \qquad "+"$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_{i\neq j}\left(\vec{f}_{ij}+\vec{f}_{ji}\right)+\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,внешн.}$$

$$\vec{f}_{ij}=-\vec{f}_{ji}$$

Сумма справа:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,внешн.}$$

Сумма слева:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\vec{p}_i=\frac{d\vec{P}}{dt}$$

Итог:

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,внешн.}$$

Как и для М.Т. !

Закон сохранения импульса:

♣ ***Если*** *сумма всех внешних сил, действующих на тела системы равна нулю, то импульс системы не меняется с течением времени* (т.е. сохраняется)

Если $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\,внешн.}=0$ ***, то*** $\vec{P}^{\,"до"}=\vec{P}^{\,"после"}$.

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = -\mu \cdot \vec{u}$$

$\vec{u}$ – *скорость выброса продуктов сгорания топлива*

$$\frac{dm}{dt} \equiv \mu$$ **... ?** *(темп расхода топлива)*

$$\vec{F}_{\text{реакт}} = -\mu \cdot \vec{u}$$ ***"реактивная сила"***

5.3. Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,внешн.}$$ ***("уравнение моментов")***

♣ ***Если*** *сумма моментов всех внешних сил, действующих на тела системы равна нулю, то момент импульса системы не меняется с течением времени* *(т.е. сохраняется)*

Если $\sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i^{\,внешн.} = 0$ **, то** $\vec{M} = const$

Аналогично и для проекций :

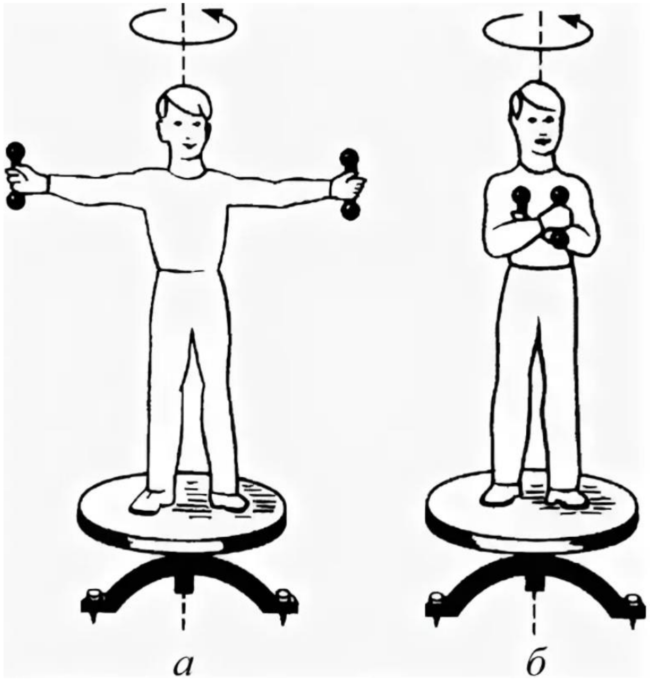
$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{N}_i^{\,внешн.}\right)_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{M}\right)_z^{"до"} = \left(\vec{M}\right)_z^{"после"}$$

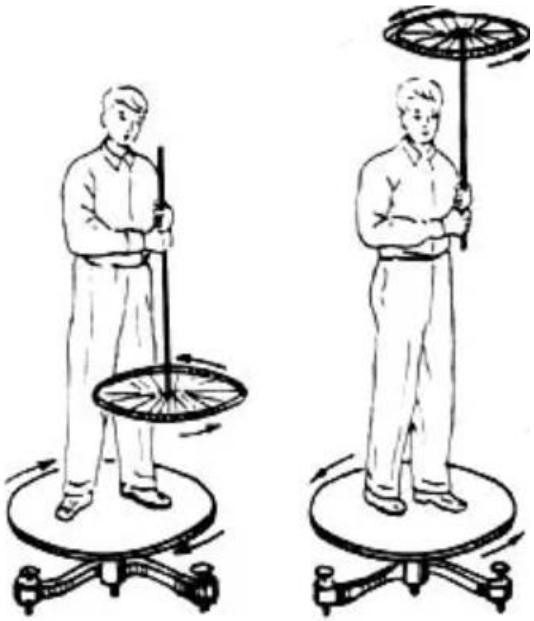
Пример 5.1. *“Скамья Жуковского”* (демонстрация)

Пример 5.2. *“Маятник Пешехонова”* (демонстрация)

$$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$$

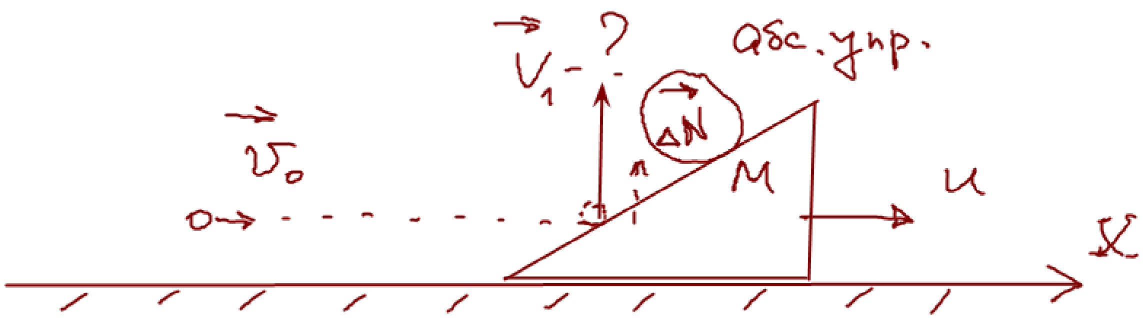
$$\left(I_z\omega\right)^{"до"} = \left(I_z\omega\right)^{"после"}$$



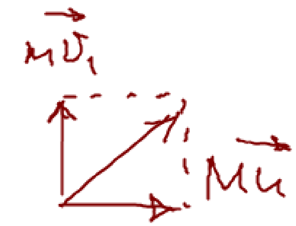


Сохранение момента импульса – Скамья Жуковского

Доска 5



$\overrightarrow{m v_0}$



$\vec{p}$ "до" $\neq$ $\vec{p}$ "после"

$0 = Mg - N_1$

$$\begin{cases} m v_0 = M u \\ \dfrac{m v_0^2}{2} = \dfrac{m v_1^2}{2} + \dfrac{M u^2}{2} \end{cases} \longrightarrow v_1 - ?$$

Доска 6

$t \qquad\qquad t+dt$

$\vec p^{\,\text{„до"}} = p^{\text{„после"}}$; $\quad \underline{\underline{dm>0}}$

ИСО: $\overrightarrow{mV} = (m-dm)\cdot(\vec V + \overrightarrow{dV}) + dm\cdot\underbrace{(\vec V+\vec u)}$

$$\cancel{m\vec V} = \cancel{m\vec V} + m\,d\vec V - \cancel{dm\cdot\vec V} - \underbrace{dm\cdot d\vec V}_{\to 0} + \cancel{dm\cdot\vec V} + dm\cdot\vec u$$

$$m\,d\vec V = -dm\cdot\vec u \;\Big|\; : dt$$

$$m\frac{d\vec V}{dt} = -\underbrace{\frac{dm}{dt}}_{\mu}\cdot\vec u$$

$$\mu = \frac{dm}{dt}; \qquad m\frac{d\vec V}{dt} = -\underbrace{\mu\cdot\vec u}_{\text{реакт. сила}}$$