Лекция 5. *Работа и энергия*

… "скачок" во времени … ☺

5.3 ....> 5.11. Закон сохранения механической энергии

♣ **Если** *равна нулю суммарная работа внешних сил, действующих на тела системы, а также равна нулю и работа внутренних неконсервативных сил, то полная механическая энергия системы не меняется с течением времени* (т.е. сохраняется)

$$\textbf{Если:}\ \begin{cases} A_{внешн.} = 0; \\ A^{(нк)}_{внутр.} = 0, \end{cases} \quad \textbf{то:}\ \Delta\mathcal{E} = 0.$$

---

*)

$$\Delta(T + \mathrm{U}) = A^{(нк)}$$

$$\Delta\mathcal{E} = A^{(нк)}$$

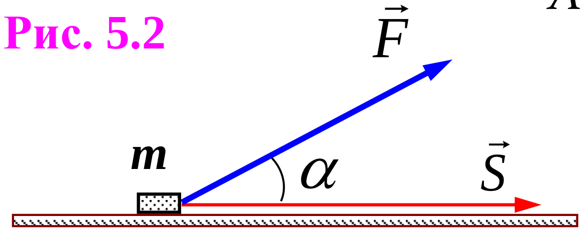
... вернулись ...

5.4. Работа силы

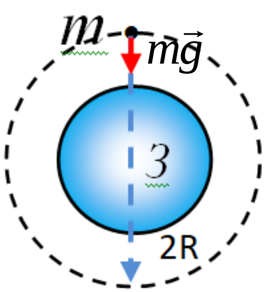
"Опр."???

$A = F \cdot S \cdot \cos\alpha$

Рис. 5.2

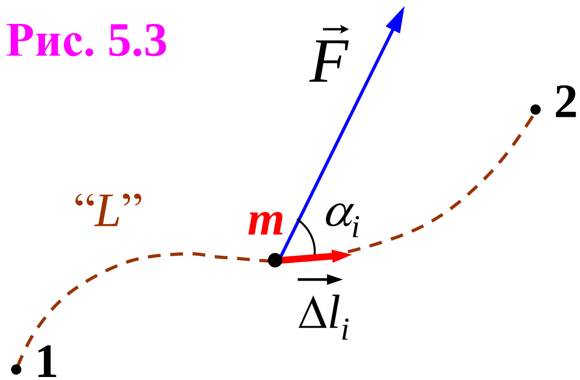


Пример:



$A_{T/2} - ??$

Рис. 5.3



$$A_{12} = \sum_i \Delta A_i = \sum_i \left(F_i \cdot \Delta l_i \cdot \cos\alpha_i\right)$$

$\Delta\vec{l}_i \to d\vec{l}$

$\Delta A_i \to \delta A$

(**Опр.**) *Элементарной работой δA называется произведение проекции силы на направление малого перемещения $d\vec{l}$ точки приложения силы на модуль этого перемещения:*

$$\delta A = F_l \cdot dl$$

$$\delta A = F \cdot dl \cdot \cos\alpha$$

(**Опр.**) *Работа на конечном участке траектории вычисляется как сумма элементарных работ:*

$$A_{12} = \int_{"L"} F_l \, dl$$

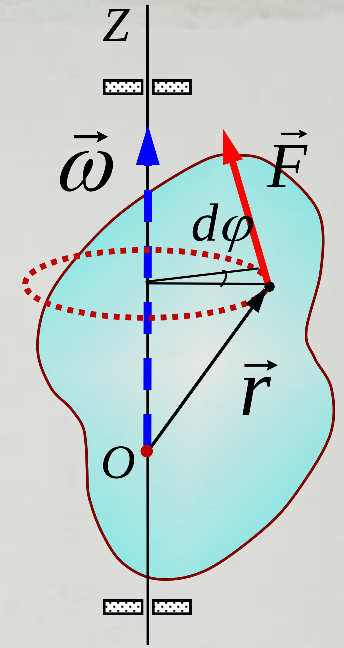
- Замечания:

1) ***Система отсчёта !***

2) ***При вращении твёрдого тела:***

$$\delta A=\left(\vec F,d\vec l\right)=\left(\vec F,\vec V dt\right)=\left(\vec F,[\vec\omega,\vec r]\right)dt$$

Рис. 5.4



$$\delta A=\left(\vec F,[\vec\omega,\vec r]\right)dt=\left([\vec r,\vec F],\vec\omega\right)dt=\left(\vec N,\vec\omega\right)dt=N_\omega\cdot\omega\,dt=N_z\cdot d\varphi$$

$$A=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}N_z\,d\varphi$$

3) ***Мощность силы***

(**Опр.**) *Мощность силы равна отношению работы* δA *, совершаемой за малый интервал времени* dt *к величине этого интервала :*

$$W=\frac{\delta A}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned}&\delta A=Fdl\cos\alpha\\&\upsilon=\frac{dl}{dt}\end{aligned}\right\}\quad W=F\cdot\upsilon\cdot\cos\alpha$$

или $W=(\vec F,\vec V)$

5.5. Механическая энергия

Энергия ?? **Примеры:**

1) от Солнца за год – 10^{30} Дж;
2) на Землю – 10^{25} Дж;
3) землетрясение – 10^{21} Дж;
4) Химическая связь – 10^{-18} Дж;
5) Ядерная связь – 10^{-11} Дж.

Из недавнего (☺):

Слияние чёрных дыр: 3 массы Солнца (10^{47} Дж)

→ в излучение гравитационных волн

(<u>Опр</u>.) *Механическая энергия - физическая величина, измеряемая запасённой работой, которую способна совершить система тел*

За счёт движения тел системы — **Кинетическая** — T

За счёт взаимодействия тел системы — **Потенциальная** — U

Полная механическая энергия

$$T + U = \mathcal{E}$$

Гравитационный коллапс за миллиард световых лет от Земли – слияние чёрных дыр

(обнаружен 14.09.2015 → Нобель 2017 г.)

!!

$29\ M_{\odot} + 36\ M_{\odot} = 62\ M_{\odot} \rightarrow \sim 3\ M_{\odot}$ *энергия гравитационных волн*

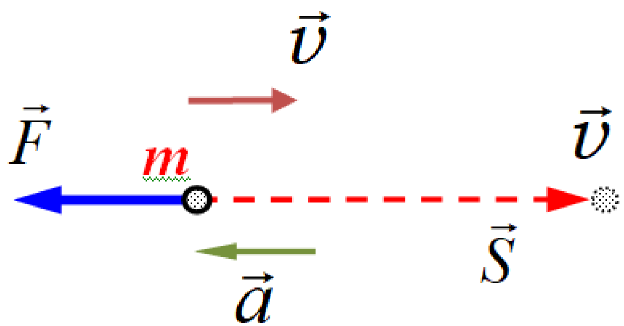
5.6. Кинетическая энергия. Теорема о кинетической энергии

5.6.1. Кинетическая энергия

а) Одна частица (МТ)

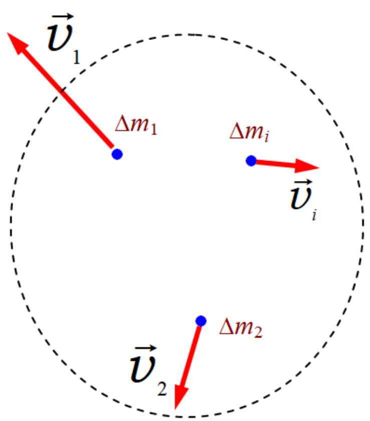
(**Опр.**) $$T = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

$\frac{1}{2}$ … **???**



$$A_F = -\frac{m\upsilon^2}{2}$$

б) Система частиц (или ТТ):

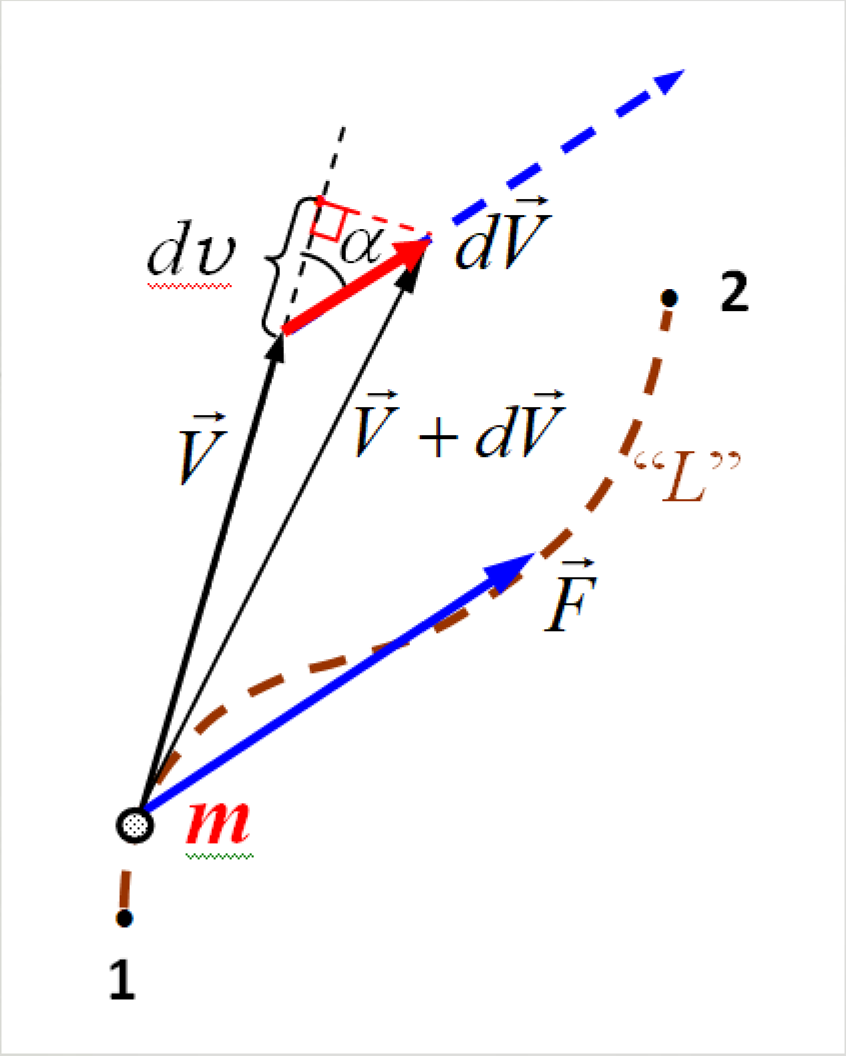


(**Опр.**) $$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2}$$

- Замечания:

1) *Система отсчёта* ! ;
2) *скаляр*, > 0;
3) *аддитивна*.

5.6.2. Теорема о кинетической энергии



$$A_{12} = ?$$

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{l}\,) = (m\frac{d\vec{V}}{dt}, \vec{V}dt) =$$

$$= m(d\vec{V}, \vec{V}) = m \cdot \underbrace{\left|\vec{V}\right|}_{\upsilon} \cdot \underbrace{\left|d\vec{V}\right| \cdot \cos\alpha}_{d\upsilon} =$$

$$m\upsilon \cdot d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) \equiv dT \, ;$$

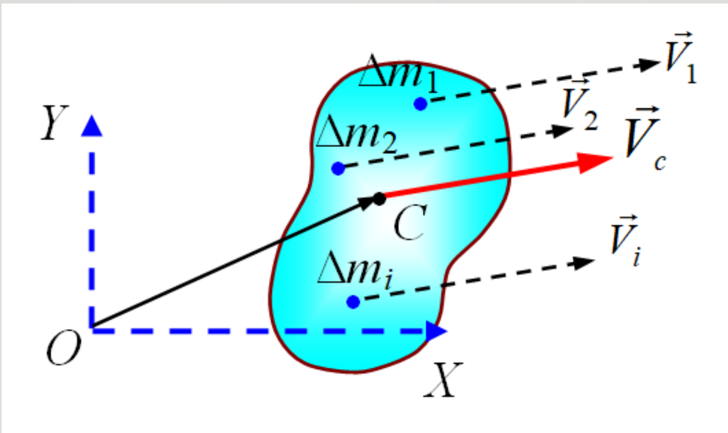
$$A_{12} = \int\limits_{\substack{(1)\\ "L"}}^{(2)} dT = T_2 - T_1$$

Теорема о кинетической энергии : $T_2 - T_1 = A_{12}$

Пример:

5.7. Кинетическая энергия при движении твёрдого тела

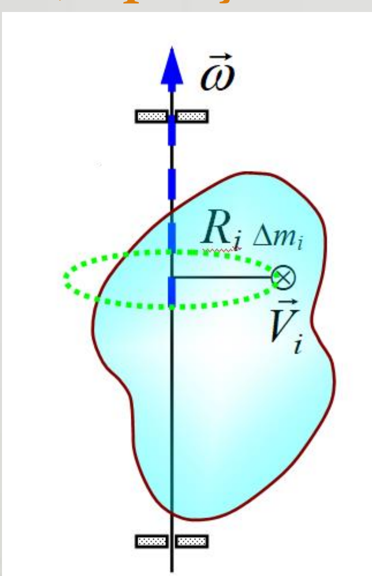
а) Поступательное движение



$$T_{пост} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{\upsilon_c^2}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \Rightarrow$$

$$T_{пост} = \frac{m \upsilon_c^2}{2}$$

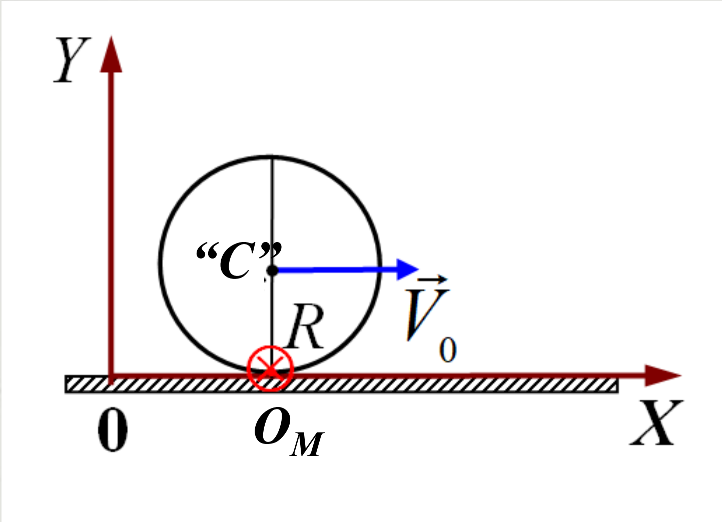
б) Вращательное движение



$$T_{вращ.} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i (\omega R_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2 \Rightarrow$$

$$T_{вращ} = \frac{I \omega^2}{2}$$

в)Плоское движение



$$T = \frac{I_{O_M}\omega^2}{2}; \qquad I_{O_M} = I_c + mR^2$$

$$T_{плоск.} = \frac{(I_c + mR^2)\omega^2}{2} = \frac{I_c\omega^2}{2} + \frac{m(R\omega)^2}{2} \Rightarrow$$

$$T_{плоск.} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2}$$

5.8. Консервативные и неконсервативные силы

(**Опр.**) *Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется лишь начальным и конечным положением тела, называются консервативными*

Примеры: гравитационные (тяжести), упругие, "кулоновские", ...

Зам. *Можно показать, что* $A_{\circlearrowleft}^{(к)} = 0$

Примеры: гравитационные (тяжести), упругие, "кулоновские", …

*) **Всегда ли ? …**

А неконсервативные? **? …**

… трения; реактивная сила; сила, действующая на заряженную частицу со стороны вихревого электрического поля, …

$$A_{\circlearrowleft}^{(нк)} \neq 0$$

"Шкаф" ☺

Теорема о консервативности центральных сил

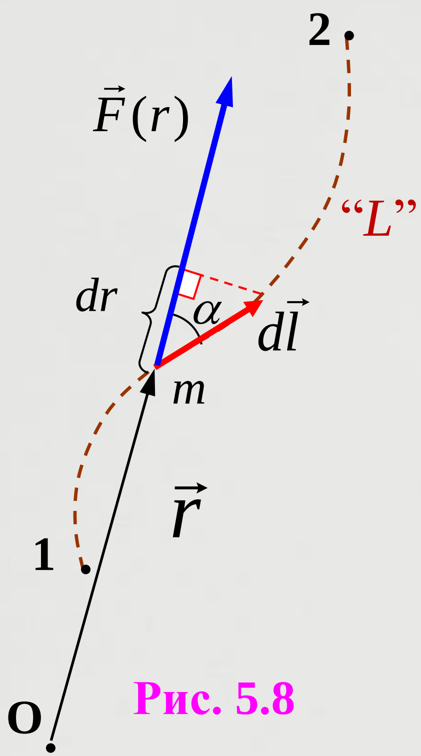


Рис. 5.8

O - “Силовой центр”

“Центральная сила” - ?

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r) \cdot \vec{e}_r$$

(гравитационные, упругие, “кулоновские”)

$$A_{12} = \int\limits_{\substack{(1)\\ "L"}}^{(2)} (\vec{F}, d\vec{l}) = \int\limits_{\substack{(1)\\ "L"}}^{(2)} |\vec{F}| \cdot |d\vec{l}| \cdot \cos\alpha = \int\limits_{r_1}^{r_2} f(r)dr$$

$$A_{12} = \int\limits_{r_1}^{r_2} f(r)dr = \Phi(r)\Big|_{r_1}^{r_2} = \Phi(r_2) - \Phi(r_1)$$

Консервативна !

5.9. Потенциальная энергия

"Запас работы" за счёт взаимодействия тел системы

Только для консервативных сил ***!!!***

$$U = f(x, y, z); \quad (x, y, z) \equiv \{x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_n, y_n, z_n\}$$

"конфигурация"

$$U(x, y, z): \qquad A_{12}^{(\kappa)} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

$$A_{12}^{(\text{сист.})} > 0, \quad \text{если} \quad U \quad \text{убывает!}$$

***Зам.**: 1) Скаляр, 2) >/< 0 .*

А как узнать $U(x, y, z)$: **?**

«Демо “Резинка”»

Работа в результате изменения “конфигурации” системы **??**

$U \equiv f\,(x,y,z);$

$$(x,y,z) = \underbrace{(x_1,y_1,z_1,\ \ldots,\ x_i,y_i,z_i,\ \ldots,\ x_n,y_n,z_n\}}_{\text{“конфигурация”}}$$

5.10. Связь силы и потенциальной энергии. Прямая и обратная задачи

а) $\vec{F}^{(\kappa)}(x, y, z) \Rightarrow U(x, y, z);$

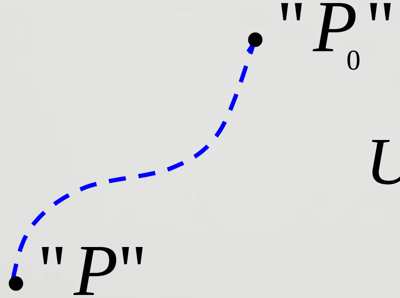
б) $U(x, y, z); \Rightarrow \vec{F}^{(\kappa)}(x, y, z)$

5.10.1. Прямая задача: *известна* $\vec{F}^{(\kappa)}(x, y, z)$,

как узнать $U = f(x, y, z)$ **?**

"Процедура":

1) «Нормировка» - договор: $U(''P_0'') = 0$ **"конфигурация"**



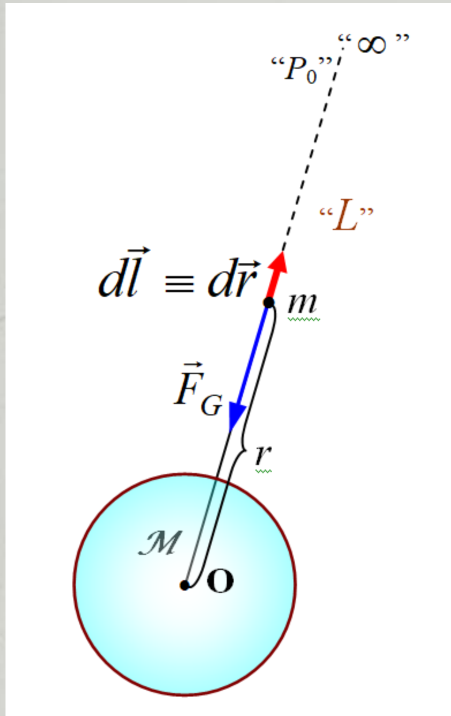
2) Как искать:

$$U(''P'') = A^{(сист.)}_{P \to P_0}; \Rightarrow \int\limits_{''P''}^{''P_0''} (\vec{F}^{(\kappa)}, d\vec{l})$$

по любой траектории!

Примеры

1. *Гравитационное взаимодействие*



$$U(r) = A_{r\to\infty} = \int_r^\infty F_r dr = -GMm\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -GMm\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^\infty = -G\frac{Mm}{r}$$

$$\boxed{U_G(r) = -G\frac{Mm}{r}}$$

$U < o$ **!?**

притяжение !

2. *Электростатическое взаимодействие («кулоновские» силы)*

$$U_э(r) = \int_r^\infty F_r dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q_1 q_2 \cdot \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot q_1 q_2 \cdot \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^\infty = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r}$$

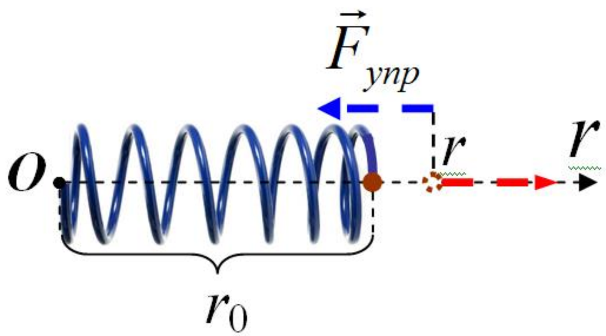
$$\boxed{U_э(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r}}$$

$U \gtreqless o$ **!?**

отталкивание и притяжение

2. Упругие силы

$$U_{\text{упр}}(r) = \int_r^{r_0} F_r dr = -k \cdot \int_r^{r_0} (r - r_0) dr = -k \cdot \left. \frac{(r-r_0)^2}{2} \right|_r^{r_0} = \frac{k(r-r_0)^2}{2}$$



$$\left\{ \quad U_{\text{упр}}(x) = \frac{kx^2}{2} \quad \right\}$$

Знакомый результат? ☺

5.10.2. Обратная задача: известна $U = U(x, y, z)$

$$\begin{cases} dA^{(\kappa)} = -dU\,; & \text{(из определения потенциальной энергии)} \\ dA^{(\kappa)} = (\vec{F}, d\vec{l}\,) & \text{(определение элементарной работы)} \end{cases}$$

$$(\vec{F}, d\vec{l}\,) = -dU \quad \textit{или} \quad F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right)$$

или

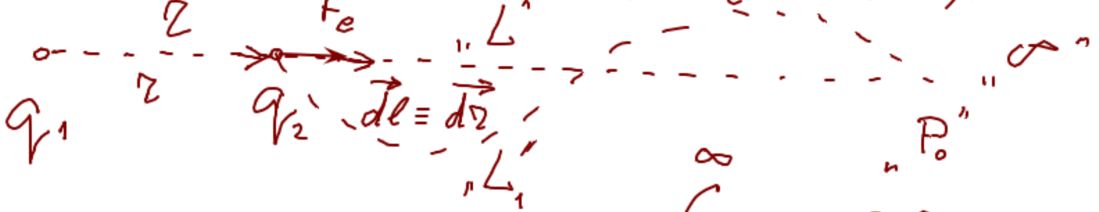
$$\vec{F} = -\, grad(U)$$

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \right)$$

"Градиент"

Доска 1

? $U_e = U(r)$ 1). Нормировка: $\underline{\underline{U(\text{“}\infty\text{”}) = 0}}$



$$U_e(r) = A_{r \to \text{“}\infty\text{”}} = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,q_1 q_2\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^\infty = \underline{\underline{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r}}};$$

$$\boxed{U_e(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r}} \gtrless 0 \sim \frac{1}{r}.$$

Доска 2

$$y = f(x); \quad y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} \equiv \frac{df}{dx} \equiv \frac{dy}{dx}$$

$$U = U(x,y,z): \quad \frac{\partial U}{\partial x} \equiv \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ y = y_0 \\ z = z_0}}\frac{\Delta U}{\Delta x}$$

$$\left[\begin{array}{l} F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}; \\ \quad \dots \end{array}\right] \longrightarrow \boxed{\vec F = (-)\,\mathrm{grad}\,U}$$

$$\mathrm{grad}\,U \equiv \left\{\frac{\partial U}{\partial x};\ \frac{\partial U}{\partial y};\ \frac{\partial U}{\partial z}\right\}$$