Лекция 8. Применение теоремы Гаусса.
Работа в электрическом поле

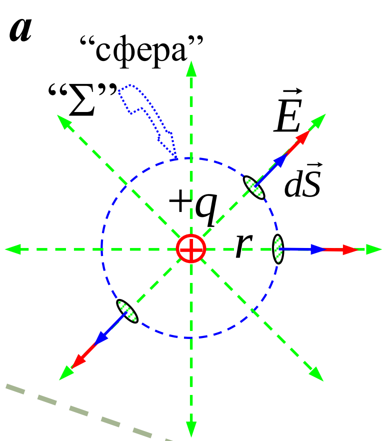
8.2. Теорема Гаусса (формулировка)

♣ *Поток вектора напряжённости электростатического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность пропорционален суммарному заряду, расположенному внутри этой поверхности*:

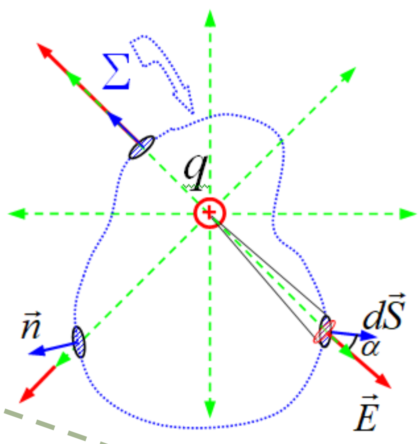
$$\oint_{\Sigma} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q$$

... заряженные тела ?

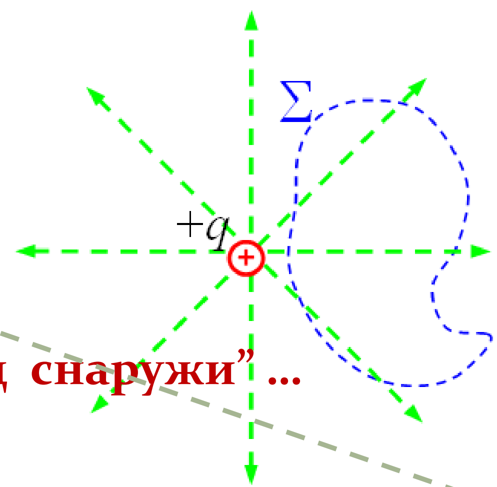
$$\int_{\Omega^*} \rho \, dV$$



... “заряд в центре” ...



... “заряд внутри” ...



... “заряд снаружи” ...

... “ много зарядов”

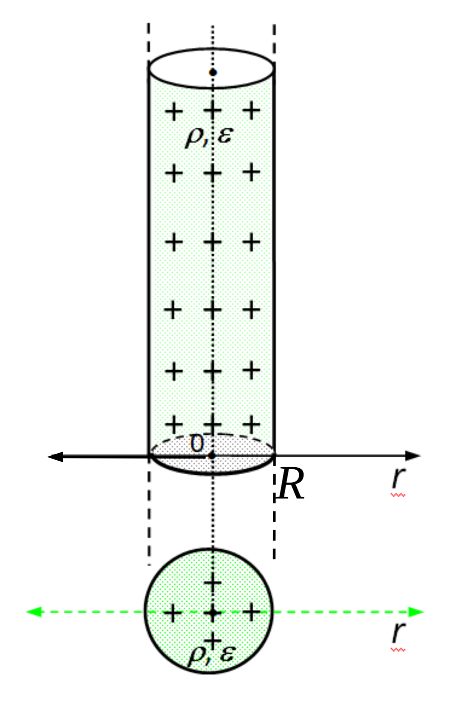
8.3. Применение теоремы для расчёта напряжённости электрического поля протяжённых заряженных тел

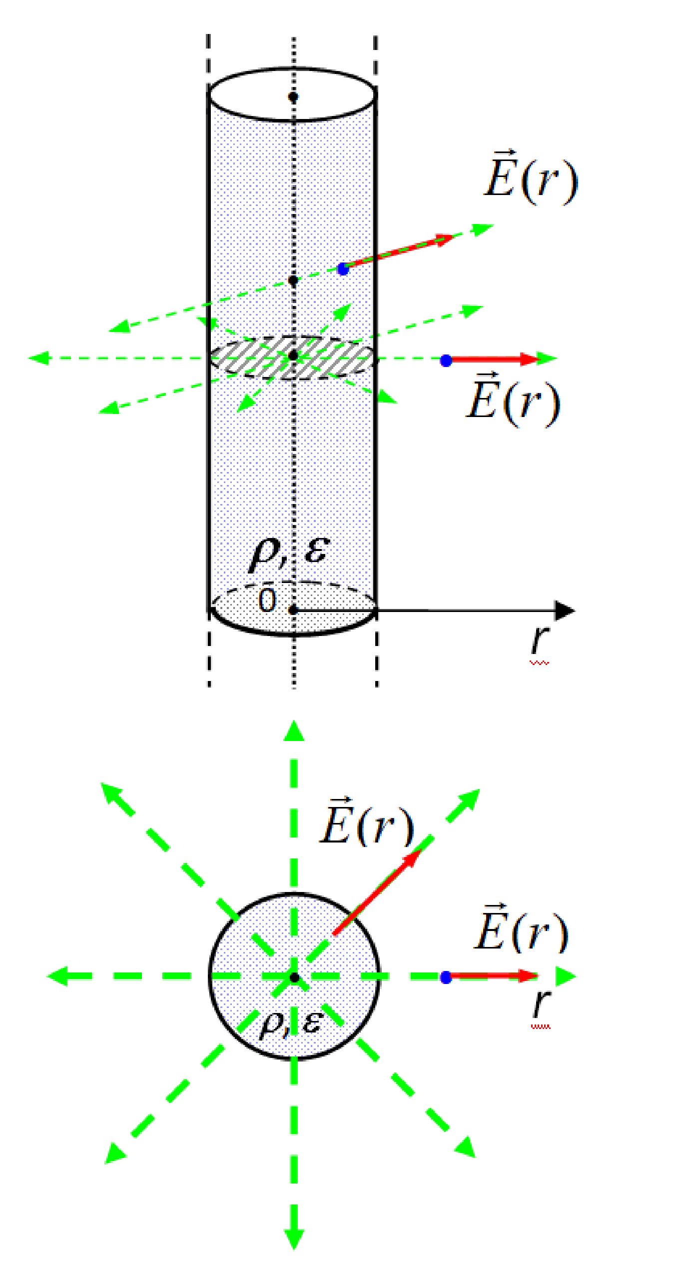
Пример. **(Задача 6.11)** Определить напряжённость электрического поля бесконечного цилиндрического стержня радиуса R *а*) снаружи и *б*) внутри этого стержня. Заряд распределён по стержню равномерно с объёмной плотностью ρ ; диэлектрическая проницаемость материала стержня равна ε.

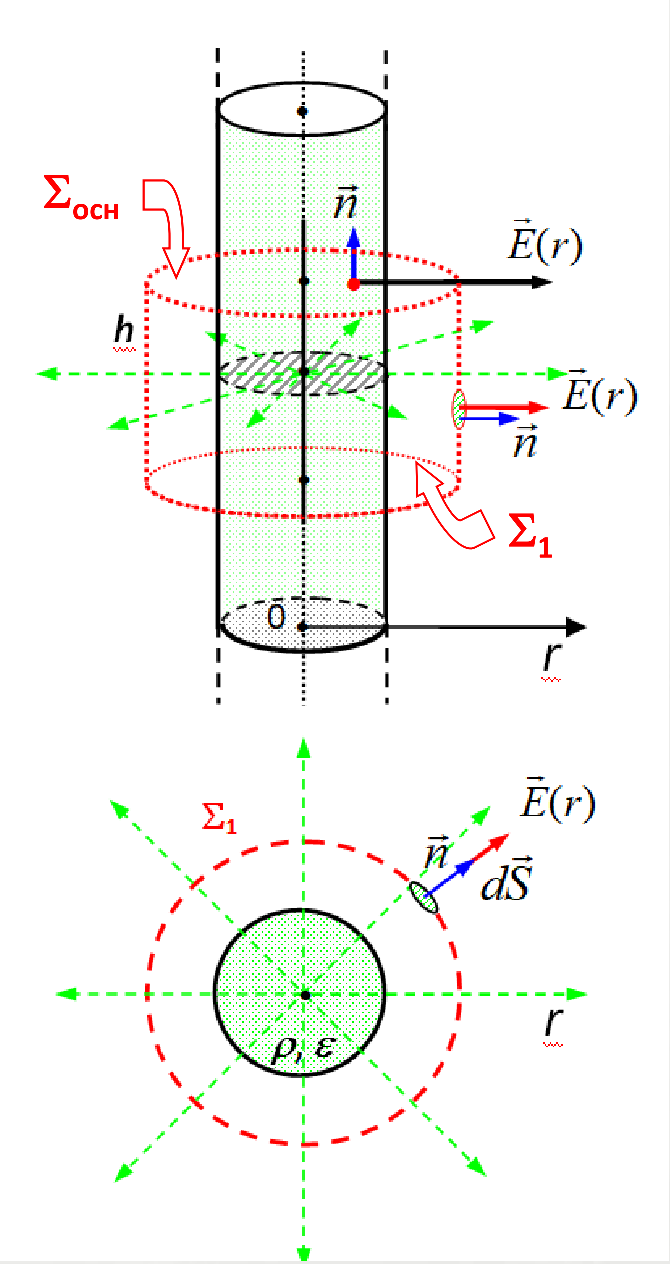
План

- **1.** Сделать схематический рисунок
- **2.** Проанализировать структуру поля
- **3.** *выбрать замкнутую поверхность* Σ (поверхности) для применения теоремы Гаусса
- **4.** *«рассчитать» поток вектора напряжённости через поверхность* Σ
- **5.** *рассчитать заряд, оказавшийся охваченным замкнутой поверхностью* Σ
- **6.** *записать равенство, соответствующее утверждению теоремы Гаусса*

1. Рисунок ! 2. “Структура поля” 3. Выбор поверхности







4. “Посчитать” поток:

$$\oint\limits_{\Sigma_{1,2}}(\vec{E},d\vec{S}) = \int\limits_{\Sigma_{осн.}}(\vec{E},d\vec{S}) + \int\limits_{\Sigma_{бок.}}(\vec{E},d\vec{S}) = \int\limits_{\Sigma_{осн.}}\left(E\cdot dS\cdot\cos\frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+\int\limits_{\Sigma_{бок.}}\left\{E(r)\cdot dS\cos 0^{\circ}\right\} = E(r)\cdot\int\limits_{\Sigma_{бок.}} dS = E(r)\cdot S_{бок.} = \underline{\underline{E(r)\cdot 2\pi r\cdot h}}$$

5. “Посчитать” заряд внутри:

$$\sum q = \begin{cases} \rho\cdot\pi R^2\cdot h, \quad r > R, & \text{“вне”} \ (\Sigma_1) \\ \rho\cdot\ \pi r^2\cdot h, \quad r \le R & \text{“внутри”} \ (\Sigma_2) \end{cases}$$

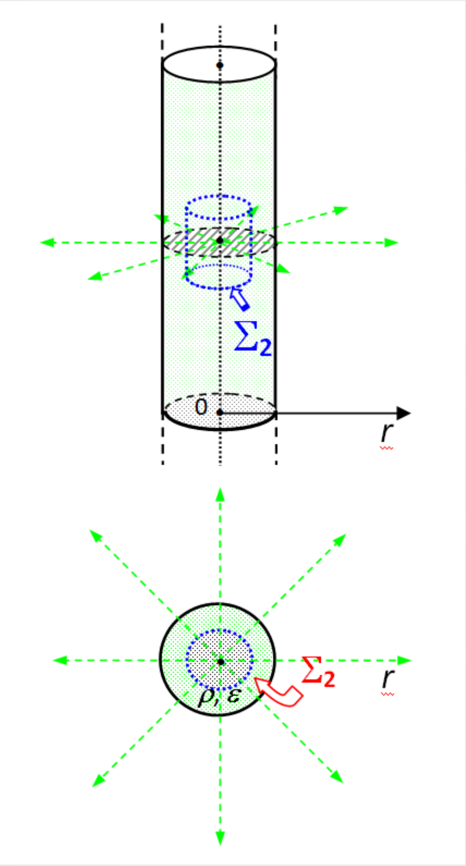
6. “Применить” … :

$$E^{(вне)}(r)\cdot \cancel{2}\cancel{\pi} r\cdot \cancel{h} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\rho\cdot\cancel{\pi}R^2\cdot\cancel{h}$$

1) Поле “вне”: $E^{(вне)}(r) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\cdot\dfrac{1}{r}$ ⟸ “вне” $(r > R)$

2) Поле “внутри”: ⇒ Σ_2 **:**

5. “Посчитать” заряд внутри:



$$\sum q = \begin{cases} \rho \cdot \pi R^2 \cdot h, & r > R, \text{“вне”} \ (\Sigma_1) \\ \rho \cdot \pi r^2 \cdot h, & r \le R, \text{“внутри”} \ (\Sigma_2) \end{cases}$$

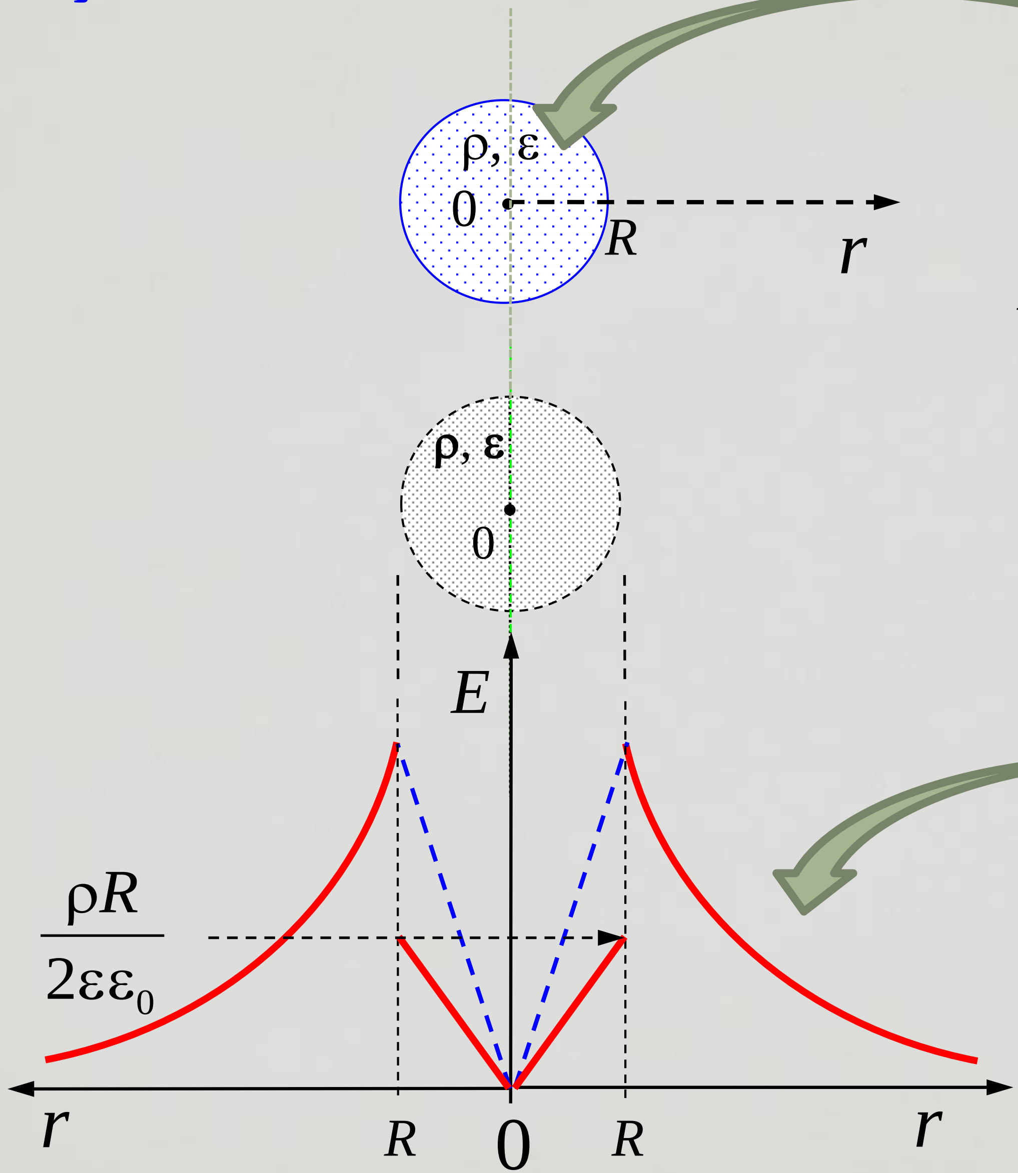
6. “Применить” … :

$$E^{(вне)}(r) \cdot 2\cancel{\pi} \cancel{r} \cdot \cancel{h} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \rho \cdot \cancel{\pi} \cancel{r}^2 \cdot \cancel{h}$$

2) Поле “внутри”:

$$E^{(внутри)}(r) = \frac{\rho}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0} \cdot r$$ ⇐ “внутри” $(r \le R)$

Результаты :

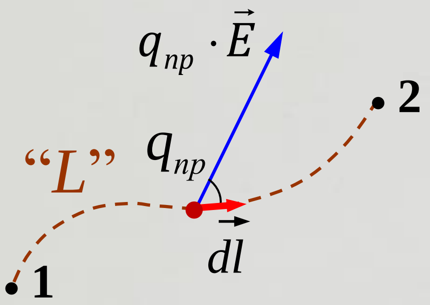


$$E^{(внутри)}(r) = \frac{\rho}{2\,\varepsilon\,\varepsilon_0} \cdot r$$

$$E^{(вне)}(r) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$

§ 9. Работа в электростатическом поле

9.1. Разность потенциалов. Потенциал



$A_{12}^{поля} \leftarrow$ *не зависит от "L"*

Характеристика поля

!!

Но $A \sim q$

(**Опр.**) **Разность потенциалов:**

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}^{поля}}{q_{пр}}$$

$$\frac{Дж}{Кл} =$$

“Вольт”

$$A_{12}^{поля} = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Связь разности потенциалов и напряжённости:

$$A_{1\to2}^{поля} = \underset{\substack{\text{по любой}\\ \text{траектории}}}{\int_{(1)}^{(2)}} (\vec{F}, d\vec{l}) = q_{пр} \cdot \int_{(1)}^{(2)} (\vec{E}, d\vec{l}) \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{1\to2}^{поля}}{q_{пр}} = \int_{(1)}^{(2)} E_l \, dl$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \underset{\substack{\text{по любой}\\ \text{траектории}}}{\int_{(1)}^{(2)}} (\vec{E}, d\vec{l})$$

*) Rem (Механика): **5.9. Потенциальная энергия**

"Запас работы" за счёт взаимодействия тел системы

Только для консервативных сил **!!!**

$$U = f(x, y, z); \quad (x, y, z) \equiv \{x_1, y_1, z_1, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_n, y_n, z_n\}$$

"конфигурация"

$$U(x, y, z): \qquad A_{12}^{(\kappa)} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

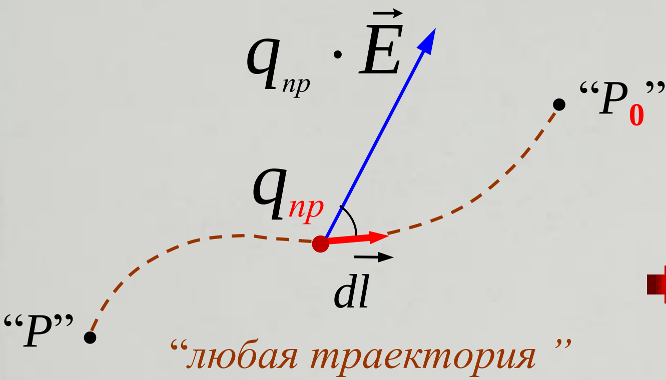
$$A_{12}^{(сист.)} > 0, \quad если \quad U \quad \text{убывает!}$$

А как узнать $U(x, y, z):$ **?**

1) «Нормировка» - договор: $U('' P_0 '') = 0$

2) Как искать: $U('' P '') = A_{P \to P_0}^{(сист.)};$

Потенциал



1) $\varphi(P_0) = 0$;

2)

(**Опр.**) **Потенциал:**

$$\boxed{\varphi(P) = \frac{A^{поля}_{P \to P_0}}{q_{пр}}}$$

А как же потенциальная энергия **?**

$$\varphi(x, y, z) = \frac{U(x, y, z)}{q_{пр}}$$

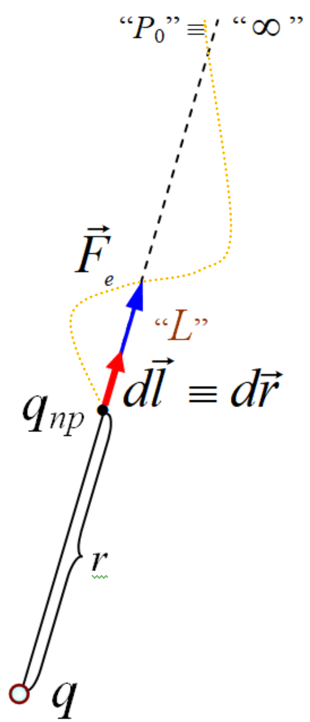
$$U(x, y, z) = q \cdot \varphi(x, y, z) \leftarrow$$

Потенциальная энергия точечного заряда в данной точке поля

9.2. Потенциал поля точечного заряда

1) Нормировка: $\varphi(\infty) = 0\,;$

2) Выбор траектории



3) Расчёт: $\varphi_P = \int\limits_{(P)}^{(P_0)} E_l\,dl = \int\limits_{r}^{\infty} E_r\,dr =$

по любой траектории

$$= \int\limits_r^\infty \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \right) dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_r^\infty \left(\frac{1}{r^2} \right) dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_r^\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_{\text{т.з.}}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

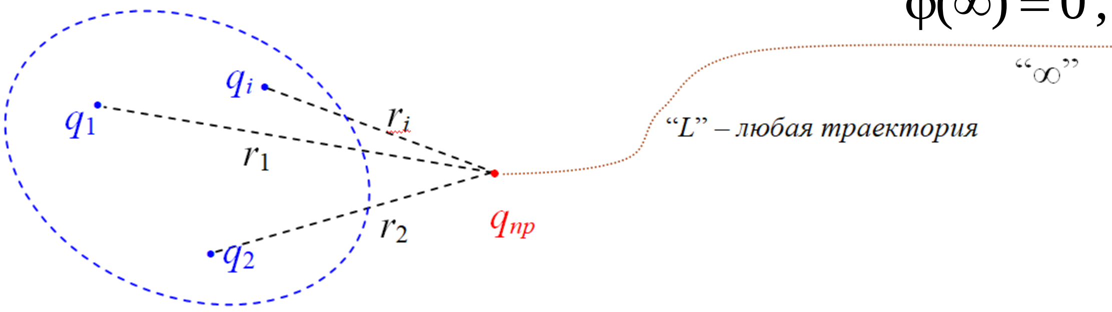
Принцип суперпозиции для потенциалов **??**

9.3. Расчёт потенциала в поле системы зарядов – принцип суперпозиции для потенциалов

Много зарядов

Нормировка

$$\varphi(\infty) = 0\,;$$



$$A^{поля}_{P\to P_0} = \sum_{i=1}^{N} A_i$$

$$\begin{cases} \varphi_1 = \dfrac{\left(A_{P\to P_0}\right)_1}{q_{np}}\,; \\ \ldots \\ \varphi_i = \dfrac{\left(A_{P\to P_0}\right)_i}{q_{np}}\,; \\ \ldots \\ \varphi_N = \dfrac{\left(A_{P\to P_0}\right)_N}{q_{np}} \end{cases}$$

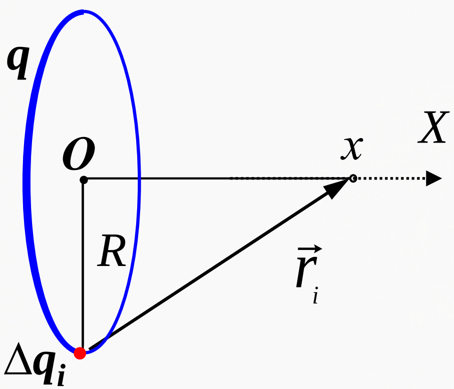
$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i$$

$$\varphi = \frac{A^{поля}_{P\to P_0}}{q_{np}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} A_i}{q_{np}} = \frac{q_{np}\cdot\sum_{i=1}^{N}\varphi_i}{q_{np}} = \sum_{i=1}^{N}\varphi_i$$

Как считать на практике ?

Применение принципа суперпозиции для расчёта потенциала электрического поля протяжённых заряженных тел

Пример: «Кольцо» (Задача 7.2) Определить потенциал электрического поля, созданного равномерно заряженным тонким кольцом на оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно плоскости, в которой лежит кольцо. Радиус кольца R, его заряд q.



$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\Delta q_i}{r_i} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\Delta q_i}{\sqrt{R^2 + x^2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

А можно ли, зная φ(*x*,*y*,*z*), найти $\vec{E}(x, y, z)$ **??**

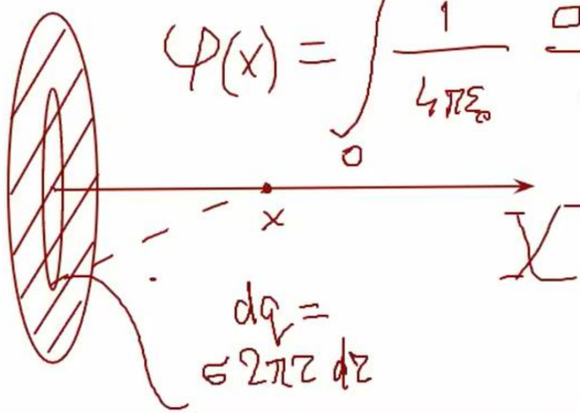
Ещё вернёмся к этому вопросу ! (“Обратная задача”)

Применение принципа суперпозиции для расчёта потенциала электрического поля протяжённых заряженных тел

А можно посложнее

??

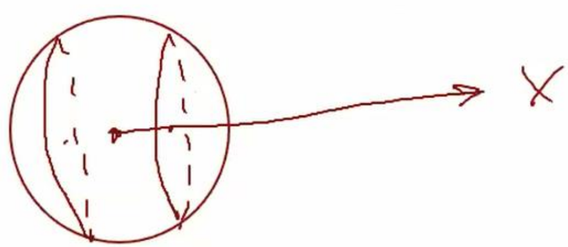
$$\varphi(x) = \int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\cdot 2\pi r\,dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \varphi(x) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left(\sqrt{R^2+x^2}-x\right)$$



$dq = \sigma 2\pi r\,dr$

$$\Downarrow \quad E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

. . .



Можно-то можно

… ,

да не всегда имеет смысл ☺

Проще, решив “прямую задачу”):

$$\vec{E}(x,y,z) \Longrightarrow \varphi(x,y,z);$$

а) Вернёмся к “прямой задаче”:

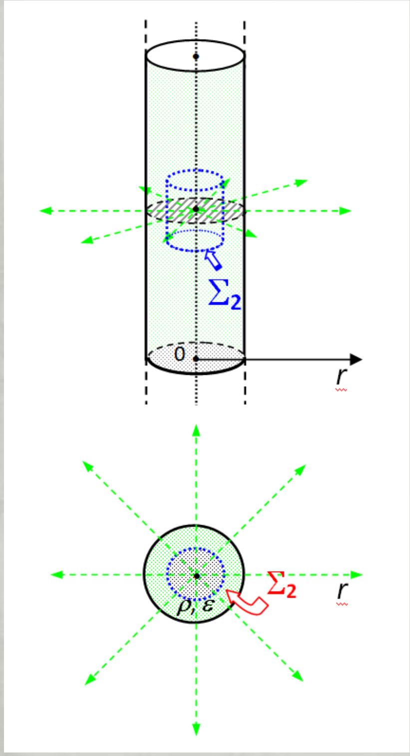
Как, зная, $\vec{E}(x,y,z)$ **найти** $\varphi(x,y,z)$ **??**

«Рецепт» есть: **1) Нормировка + 2) расчёт** $\varphi_P = \int\limits_{(P)}^{(P_0)} (\vec{E}, d\vec{l})$

по любой траектории !

Пока только для т.з. мы её решили: $\varphi_{\text{т.з.}}(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$

А посложнее ??



Пример «Стержень»:

1) Поле “вне”: $E^{(\text{вне})}(r) = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r}$, $(r > R)$

2) Поле “внутри”: $E^{(\text{внутри})}(r) = \dfrac{\rho}{2\varepsilon\varepsilon_0} \cdot r$, $(r \le R)$

С него и начнём …