

*Лекция 2. Свободные колебания в системе
связанных осцилляторов*



***) 1.5*. Особенности колебаний нелинейного осциллятора**

1.5.1. Линейный осциллятор – гармонический осциллятор
(или откуда берутся гармонические колебания?)

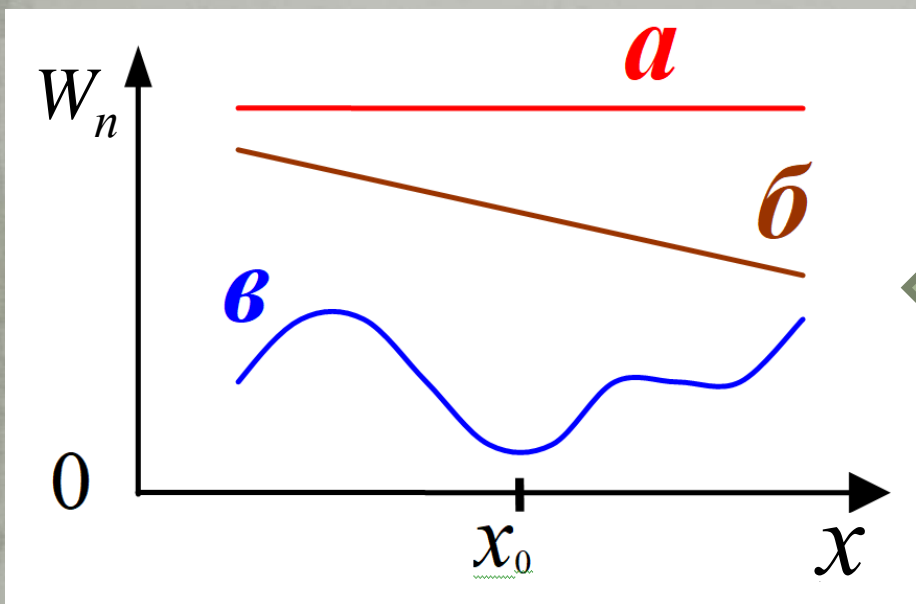
$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \cdot \xi = 0$$

*А как это так
получается?*

$F \sim x$??

Система консервативна \Rightarrow

$$F_x = -\frac{dW_n}{dx}$$



$\Rightarrow W_n \sim x^2$, пружина $W_n(x) = \frac{kx^2}{2}$

← *А если $W_n(x)$ – сложная функция?*

$x - x_0 \equiv \xi$ – «малый аргумент»

Разложим в ряд

$$W_n(x) = W_n(x_0) + \left. \frac{dW_n}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2W_n}{dx^2} \right|_{x=x_0} \cdot (x - x_0)^2 + \dots$$



$$W_n(\xi) = U(0) + \left. \frac{dW_n}{dx} \right|_{\xi=0} \cdot \xi + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2W_n}{dx^2} \right|_{\xi=0} \cdot \xi^2 + \dots$$

ξ мало! Тогда:

$$W_n(\xi) \approx W_n(0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2W_n}{dx^2} \right|_{\xi=0} \cdot \xi^2 = W_n(0) + \frac{k\xi^2}{2}$$

Но: $F_x = -\frac{dW_n}{dx}$ **и тогда**

$$F_x = -k\xi$$

$$k = \left. \frac{d^2W_n}{dx^2} \right|_{\xi=0}$$

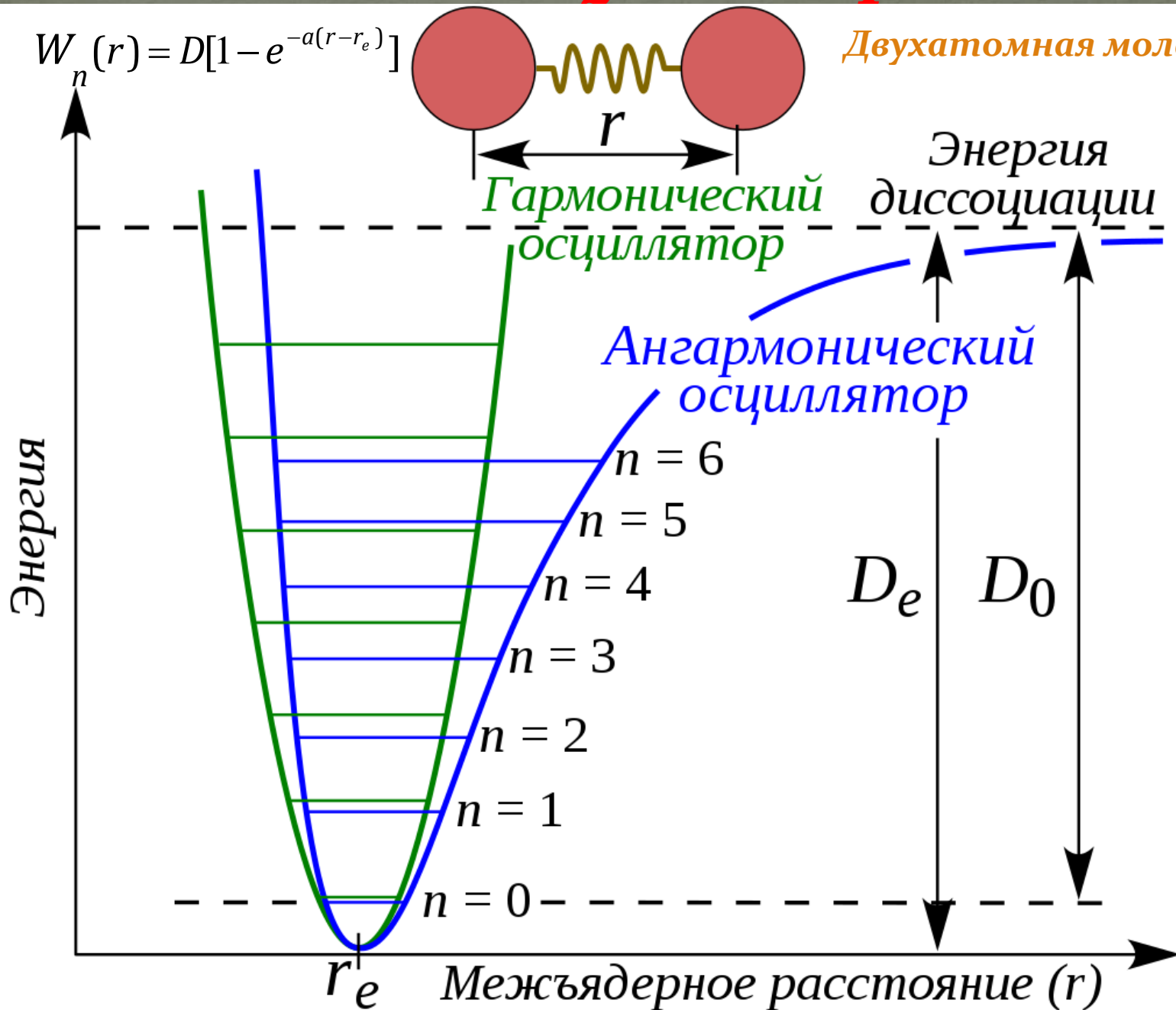
«Возвращающая сила», линейный, гармонический осциллятор !!!

А если $W_n(\xi)$ не пропорциональна ξ^2 ?

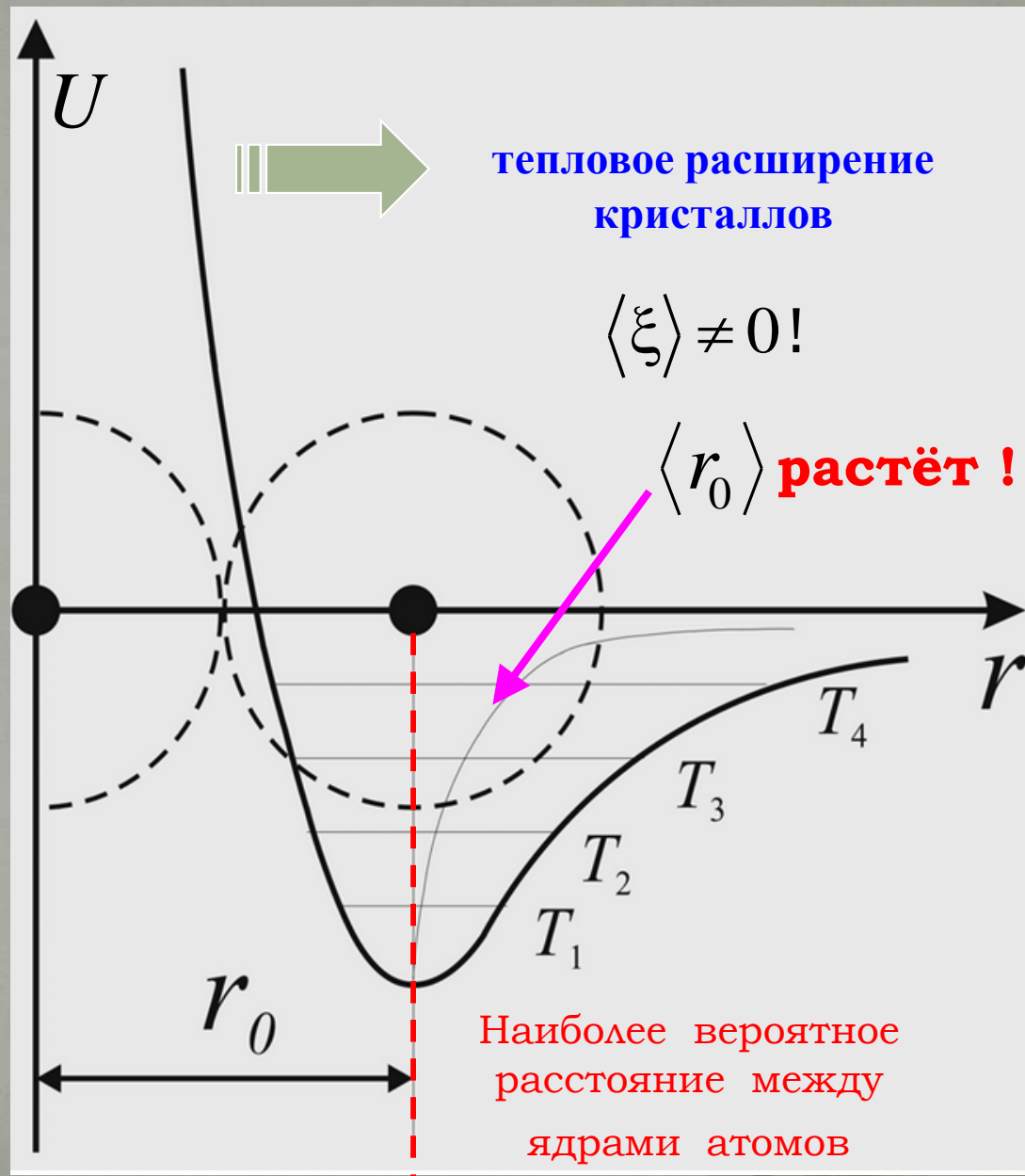
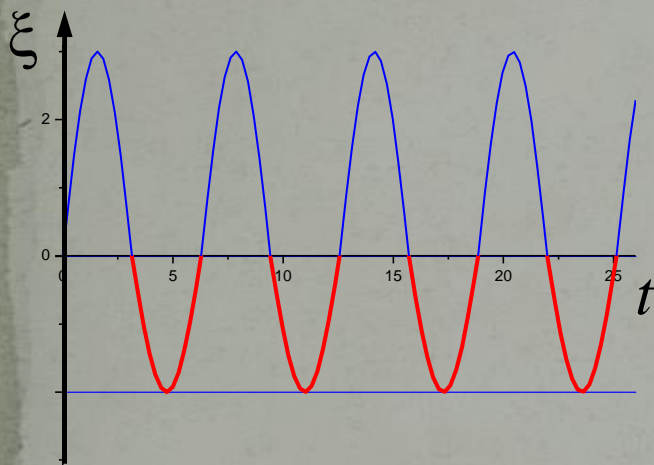
Примеры: “Потенциал Морзе”, ... (“Леннард-Джонса” (6/12), “Бакингема”, ...)

«Потенциал Морзе»

Двухатомная молекула



- Ангармонизм колебаний нелинейного осциллятора





1.5.2. Нелинейный («ангармонический») осциллятор

ξ растёт \Rightarrow нельзя «аппроксимировать параболой»

$$\ddot{\xi} + f(\xi) = 0 \quad \downarrow \quad f(\xi) = k \cdot \xi + k_2 \cdot \xi^2 + k_3 \cdot \xi^3 + \dots$$

$$\xi(t) = A_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + A_2 \cdot \cos(2\omega_0 t + \varphi_{02}) + A_3 \cdot \cos(3\omega_0 t + \varphi_{03}) + \dots$$

Ангармонизм

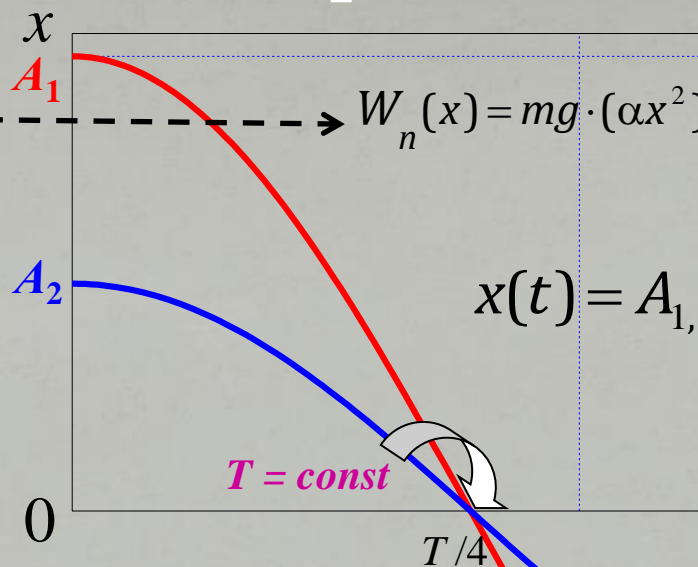
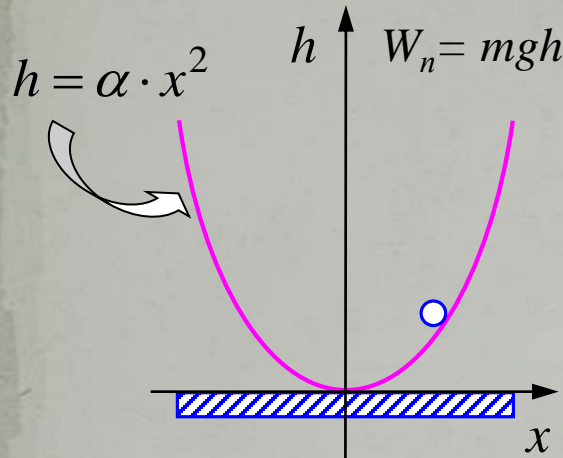
Неизохронность

! ??



Изохронность / Неизохронность

Пример 1: "Чаша", ...



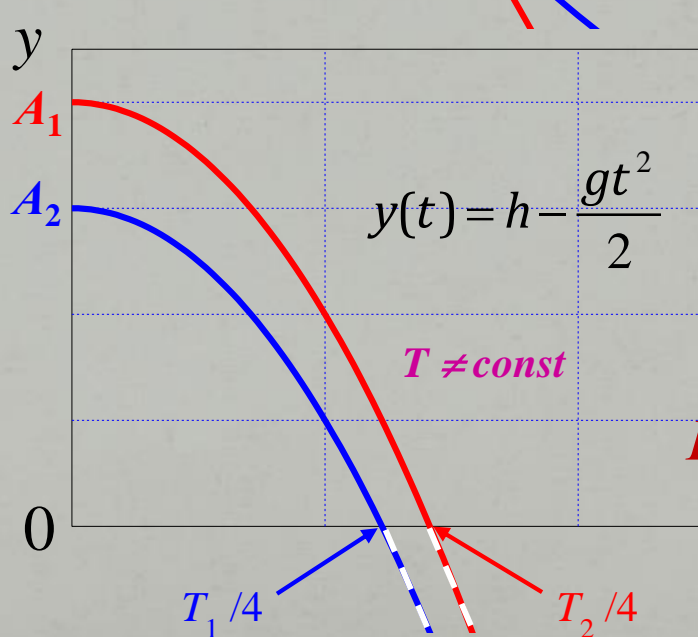
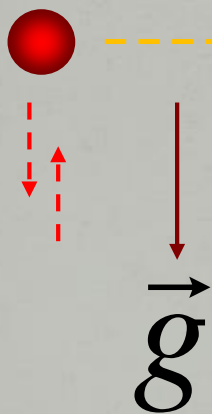
m.e. $W_n(x) \sim x^2$

$F_x = -kx$

Изохронность

Пример 2:

$W_n = mg \cdot y$



$F = const$

$a_y = const = g$

Неизохронность!

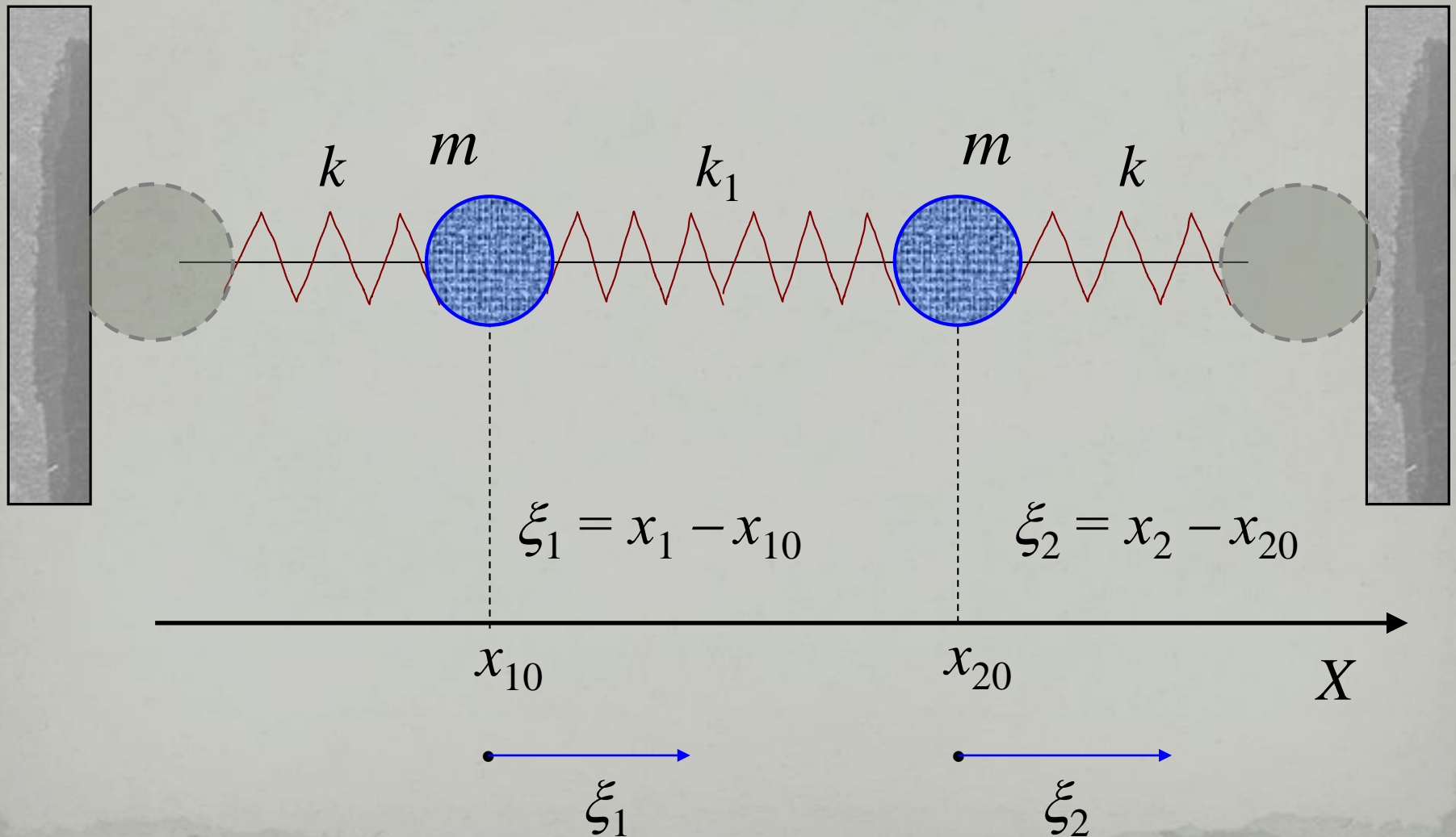
Амплитуды разные



§ 2. Свободные колебания в системе связанных осцилляторов. (о “модах” ...)

Колебания молекул

- 2.1. Симметричная система двух связанных осцилляторов.
- Нормальные колебания



Модель:

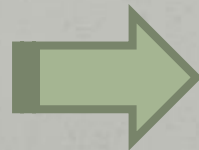
- Крайние атомы неподвижны, а «средние» одинаковы ;
- Одномерный случай;
- Система консервативна – трения нет;
- Все связи – квазиупругие – взаимодействуют линейные осцилляторы. Средняя пружинка моделирует связь осцилляторов:

$$k_1 = \frac{d^2 W}{dx^2} \bigg|_{\substack{x_1 = x_{10} \\ x_2 = x_{20}}}$$

Система уравнений и её решение: ...

► (Опр.) *Нормальными координатами называются линейные комбинации исходных координат, которые позволяют свести систему уравнений к системе уравнений гармонических осцилляторов*

Частоты нормальных колебаний (мод)



$$\omega_I = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}$$

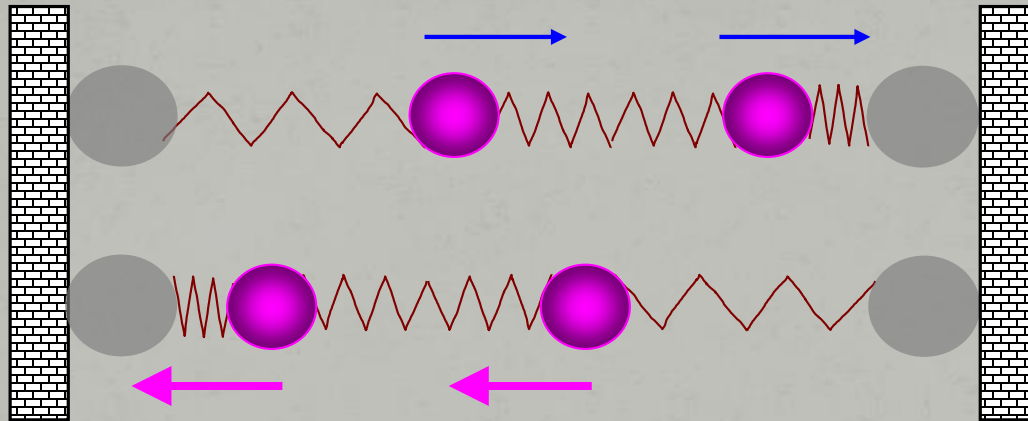
??



**А что же это за «моды» такие,
и как движутся сами атомы**

Симметричная система связанных осцилляторов

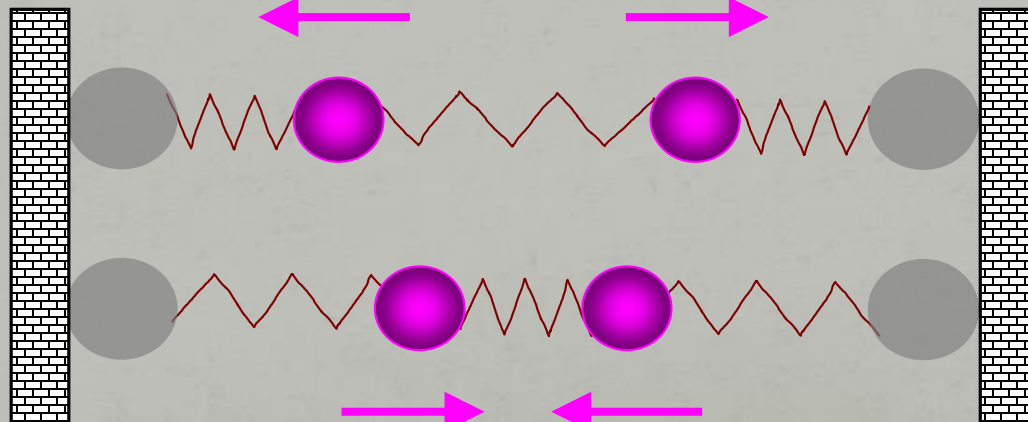
- “Нормальные колебания” \equiv “Моды”



$$\omega_I = \sqrt{\frac{k}{m}};$$

a

Синфазно



$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}$$

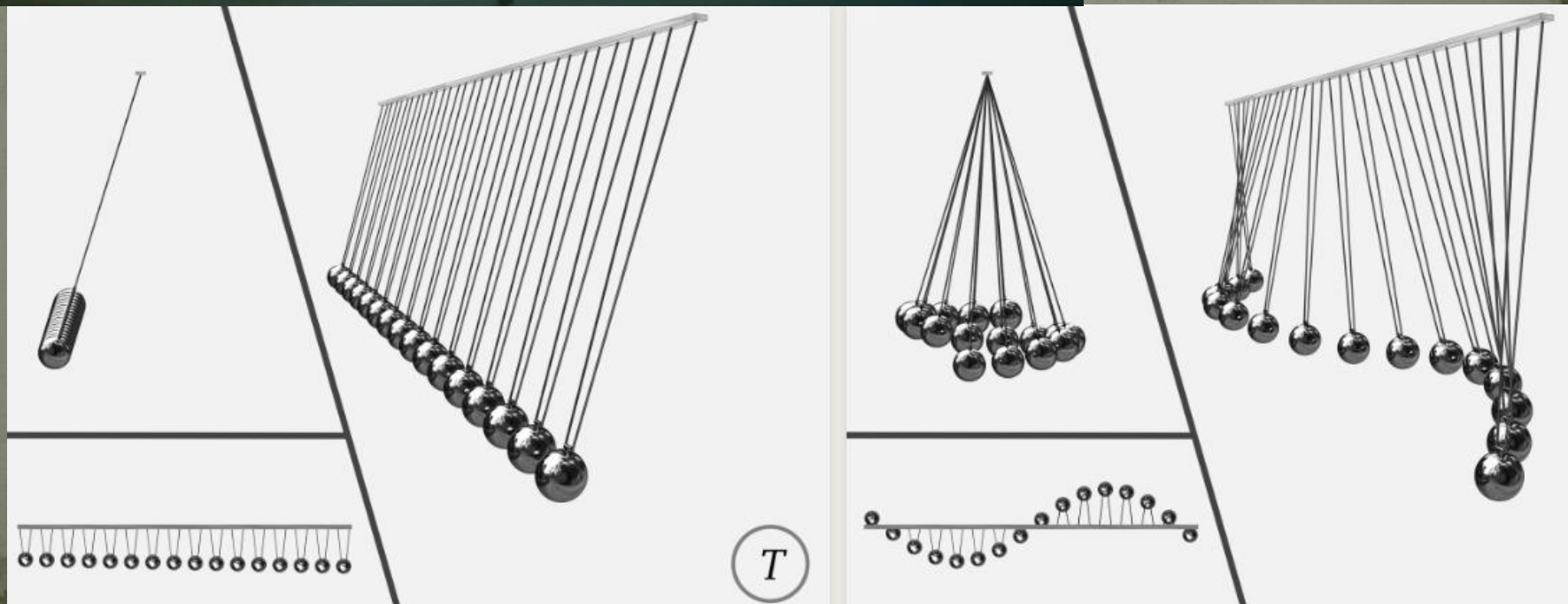
б

Противофазно

Маятник Чеботаява

Антракт

Pendulum
Waves



Антракт



- **Замечания:** 1) Симметричная система со слабой связью $k_1 \ll k$

“Биения”

2) Моды энергетически независимы !!

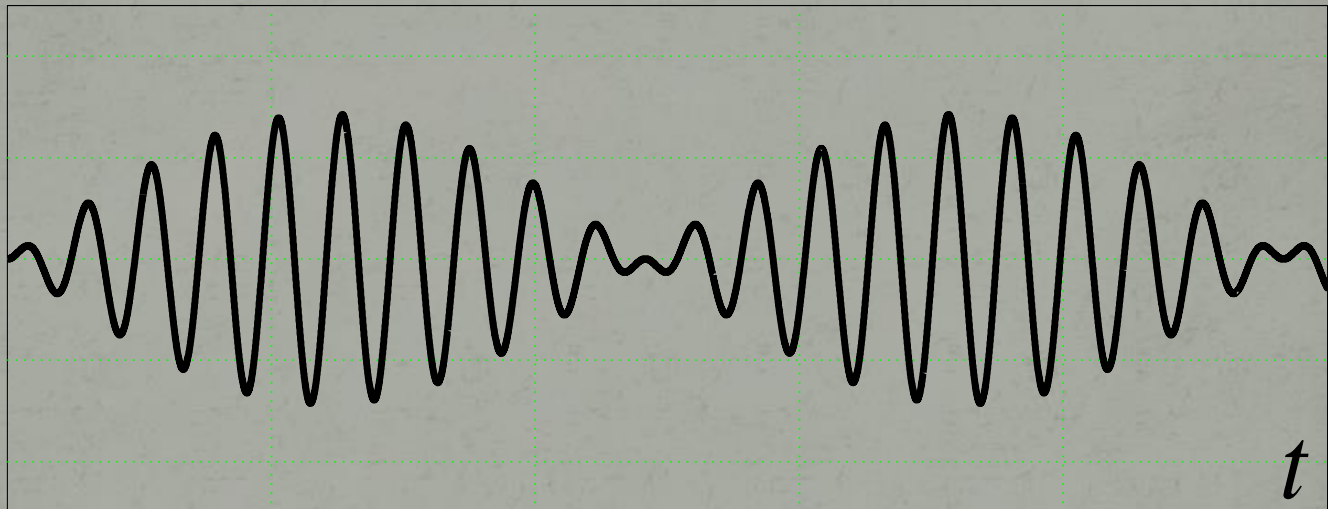
3) Несимметричные системы

??

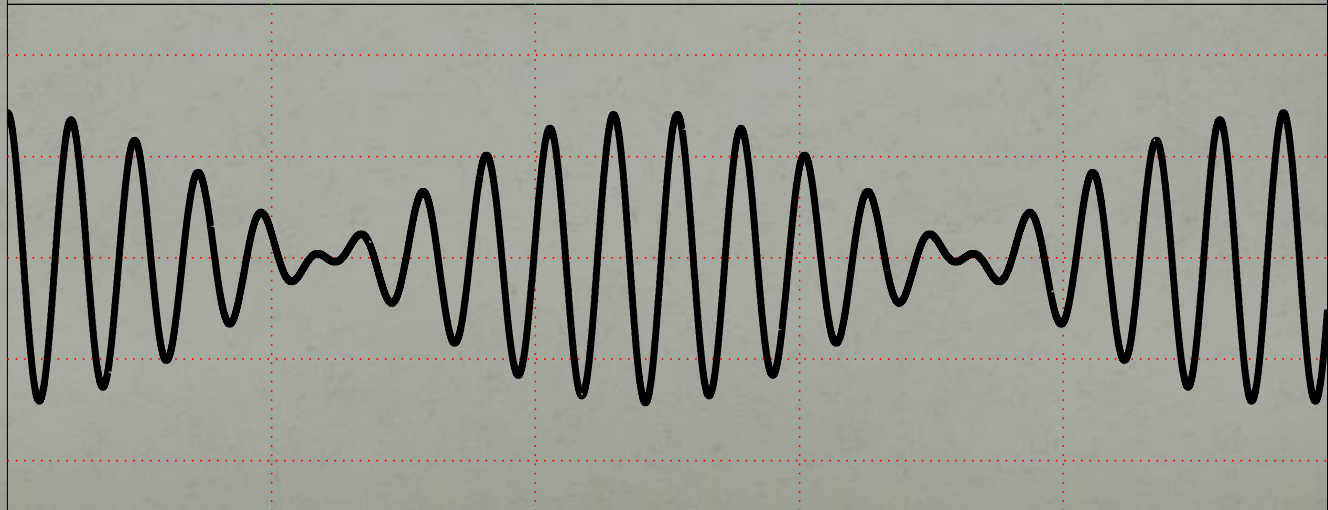
- **Замечания:** 1) Симметричная система со слабой связью $k_1 \ll k$

Биения

$\xi_1(t)$



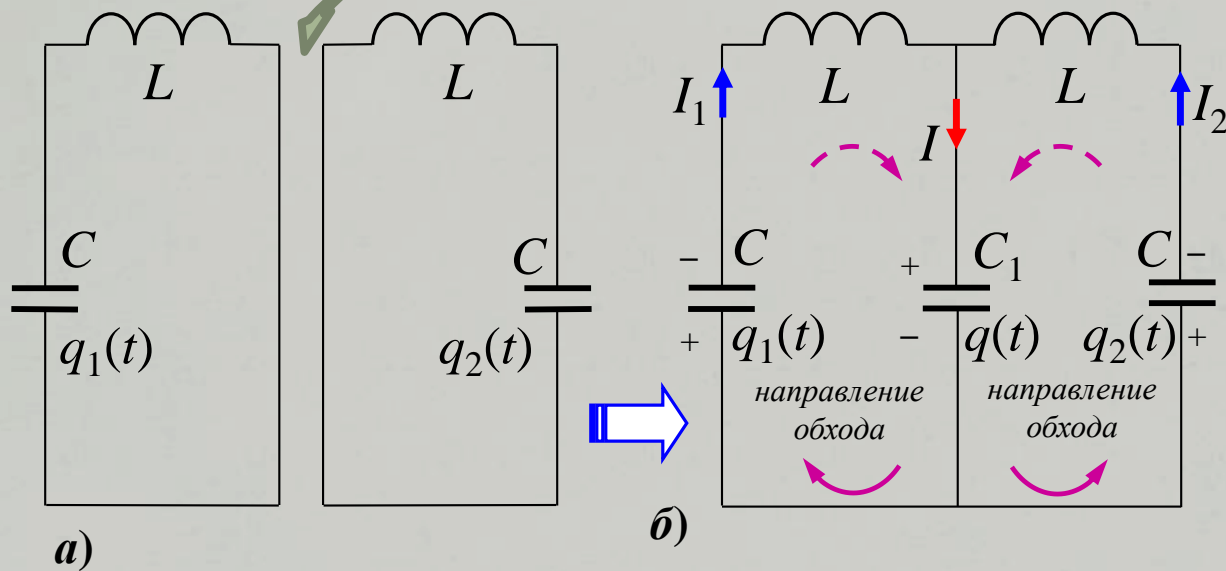
$\xi_2(t)$



2.2. Связанные колебательные контуры

- «Ёмкостная связь» контуров

“Вместо” $k_1 \rightarrow 1/C_1$



а) Два одинаковых контура и б) Контуры с ёмкостной связью.

2.2. Связанные колебательные контуры

- Ёмкостная связь контуров

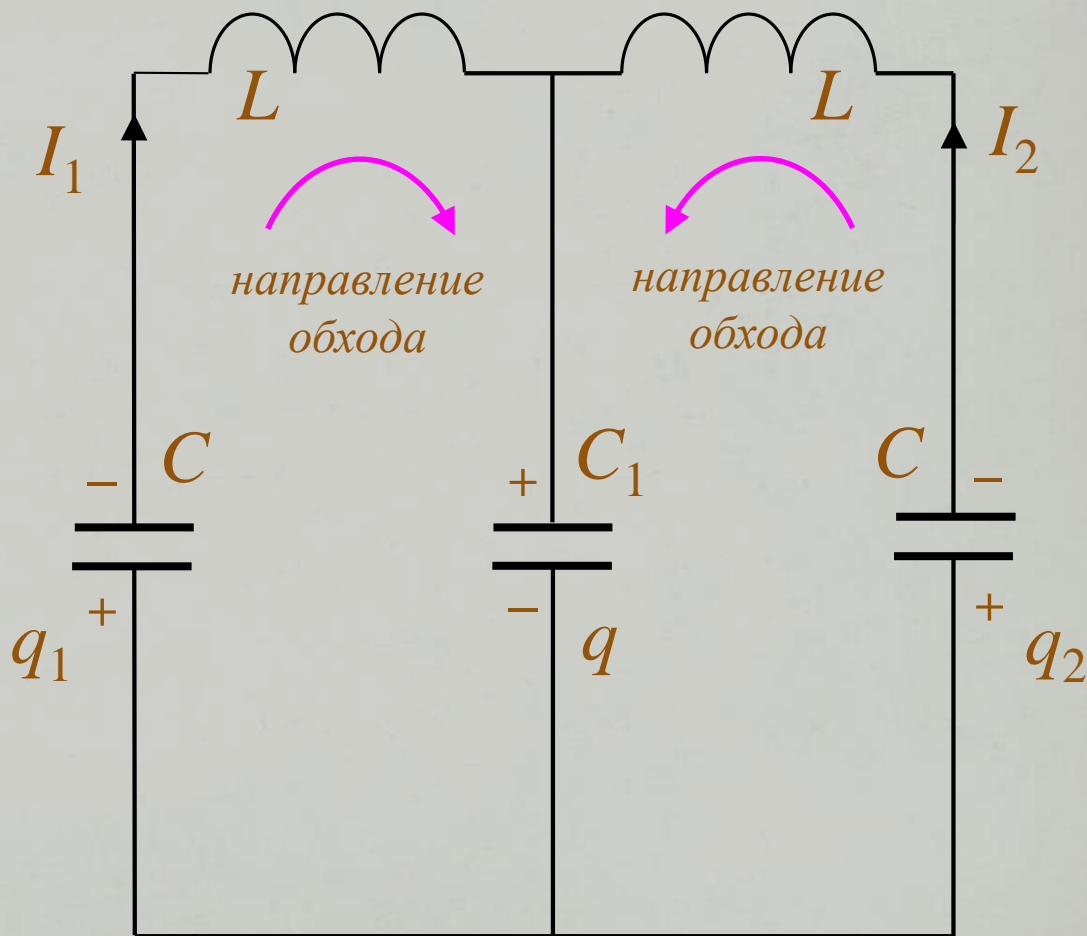
2-е правило Кирхгофа
и “-/+”:

$$Q_I : \omega_I = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Синфазно

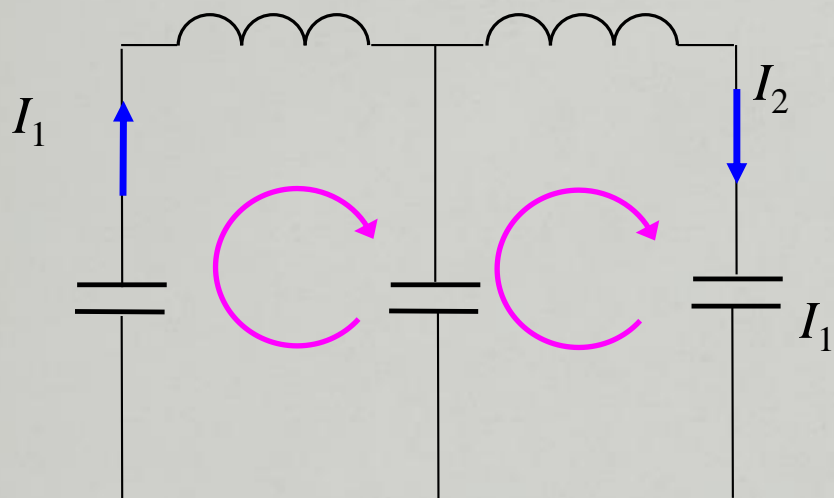
$$Q_{II} : \omega_{II} = \sqrt{\frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_1} \right)}$$

Противофазно



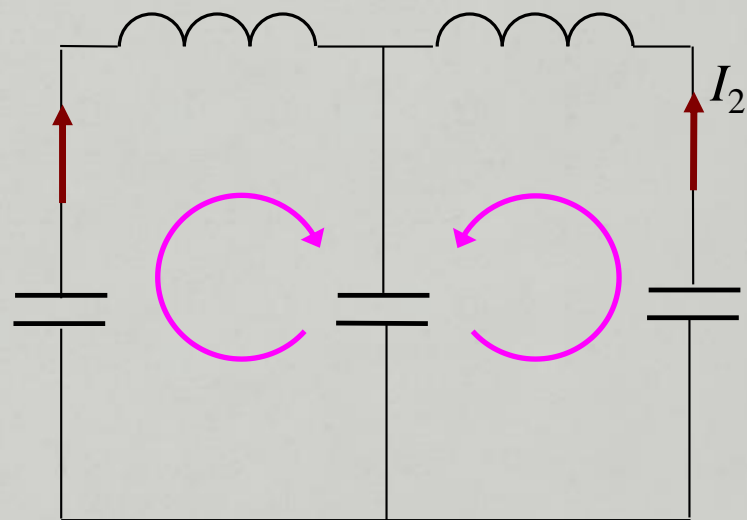
Связанные электрические контуры

- Ёмкостная связь контуров



а) Синфазно

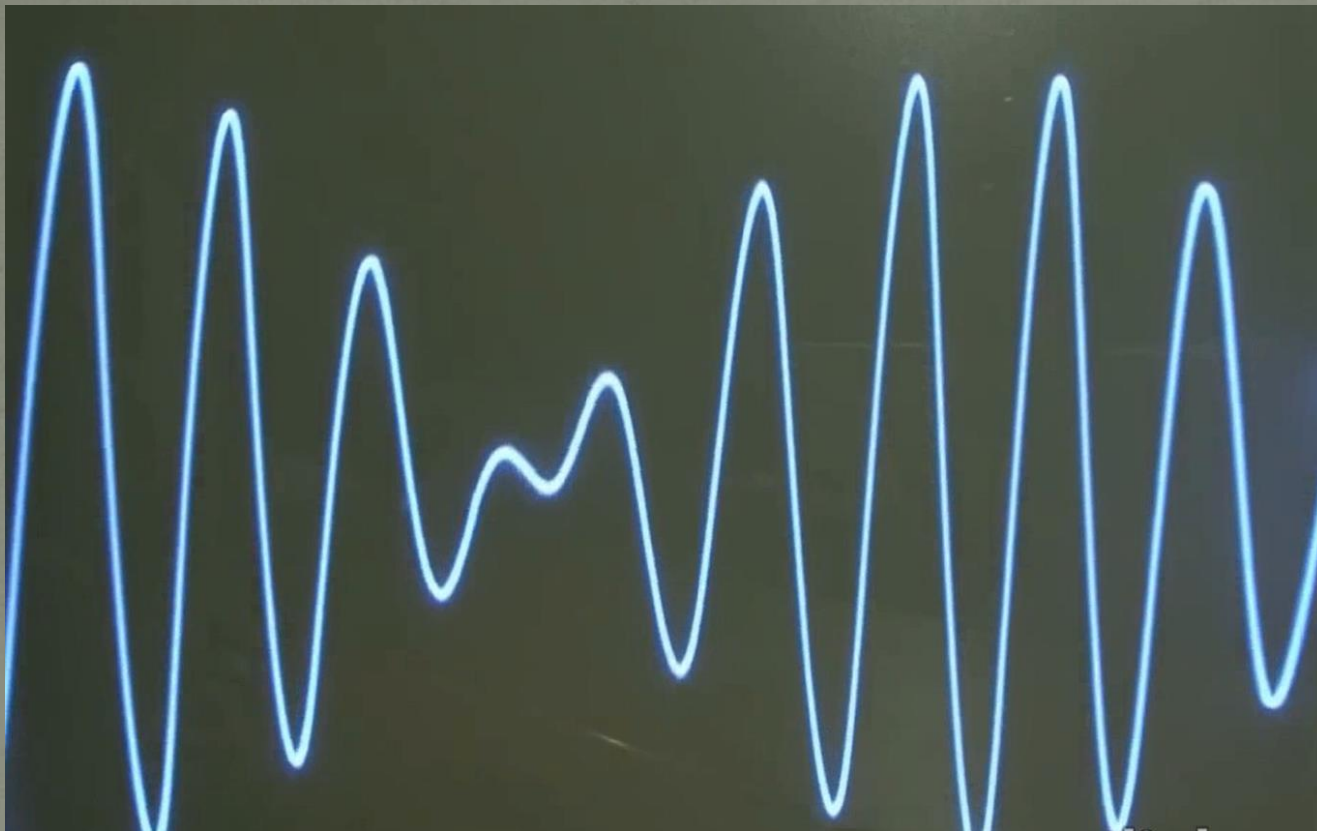
$$\omega_I = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



б) Противофазно

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{1}{L} \left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_1} \right)}$$

Биения для связанных электрических контуров



2.3. Колебания молекул

(колебательная/молекулярная спектроскопия)

2.3.1. Двухатомная молекула

Внутримолекулярные колебания свободной двухатомной молекулы (Модель «гармонический осциллятор» в химии)

Задачи 2.3 – 2.5 : $\xi = x_2 - x_1 - l_0$

Одна «колебательная степень свободы» ??

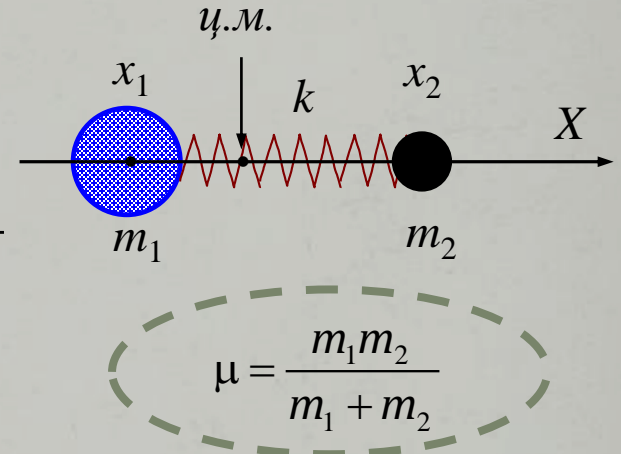
А где её можно «увидеть»??

Пример 1. Изотопные сдвиги в колебательных спектрах

$$\frac{\omega_0^{OH}}{\omega_0^{OD}} = \sqrt{\frac{\mu_{OD}}{\mu_{OH}}} = \sqrt{\frac{m_D(m_O + m_H)}{m_H(m_O + m_D)}} \approx 1,37$$

Пример 2. Свободные и связанные гидроксилы

$$\frac{\omega_0^{своб}}{\omega_0^{связ}} = \sqrt{\frac{(m_O + m_H)}{m_O}} \approx 1,031$$



«Приведённая масса молекулы»

2.3.2. Многоатомные молекулы. Колебательные степени свободы молекул: $3N - 6 / 3N - 5$

?? проверим



Колебания молекул H_2O

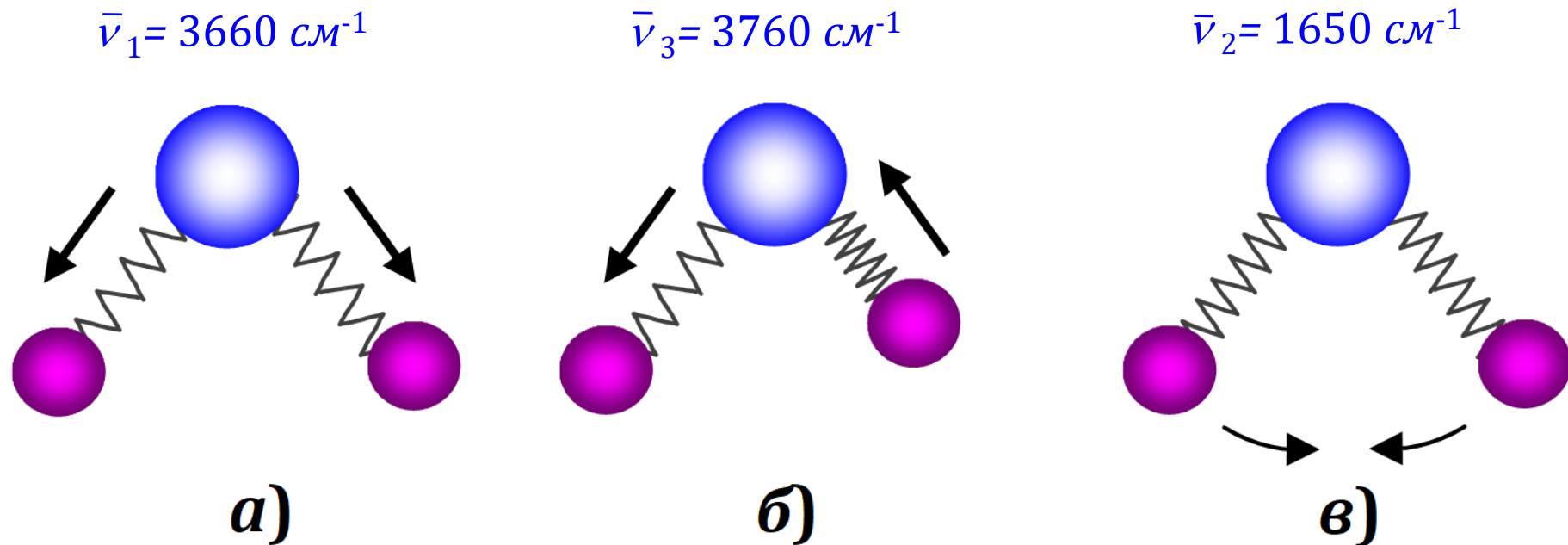


Рис. 2.7. Валентные (а и б) и деформационные (в) моды молекул H_2O

Молекулярная / Колебательная спектроскопия :

**1) Инфракрасного *поглощения* света
(ИК-спектроскопия)**

IR-Spectroscopy

**2) Комбинационного *рассеяния* света
(КР-спектроскопия \equiv "Рамановская")**

Raman Spectroscopy

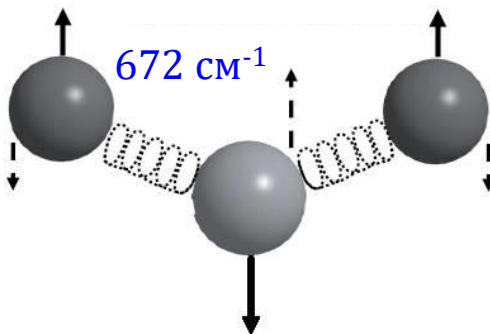
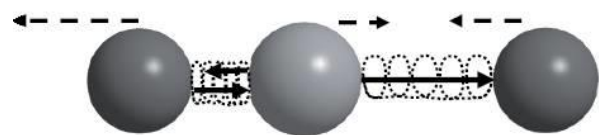
2.3. Колебания молекул (колебательная/молекулярная спектроскопия)

продолжение ...

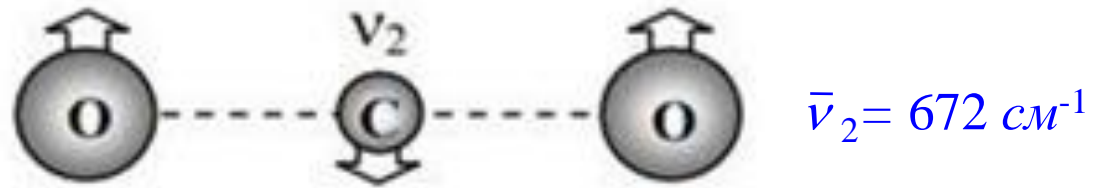
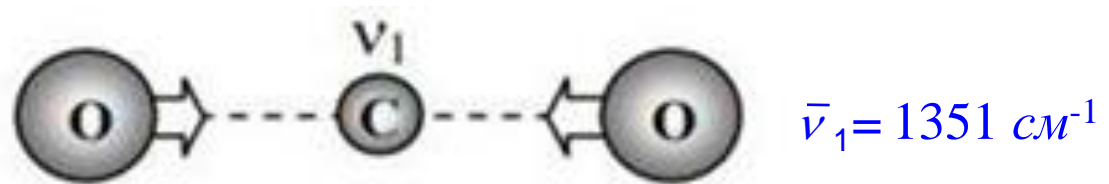
2.3.2. Многоатомные молекулы. Колебательные степени свободы молекул:

$$3N - 6 / 3N - 5$$

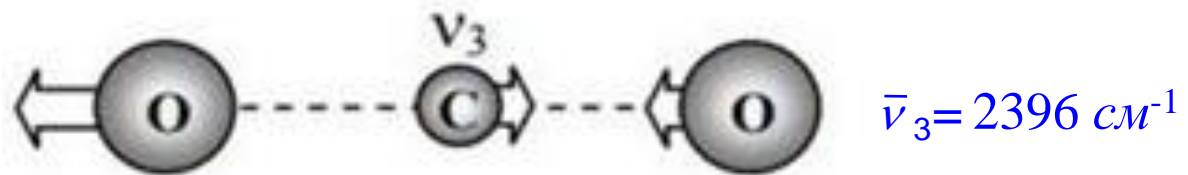
• Линейные молекулы (CO_2)



Деформационная мода



$\bar{\nu}$? в спектроскопии: "Частота" / "Волновое число". $\bar{\nu} = 1/\lambda$



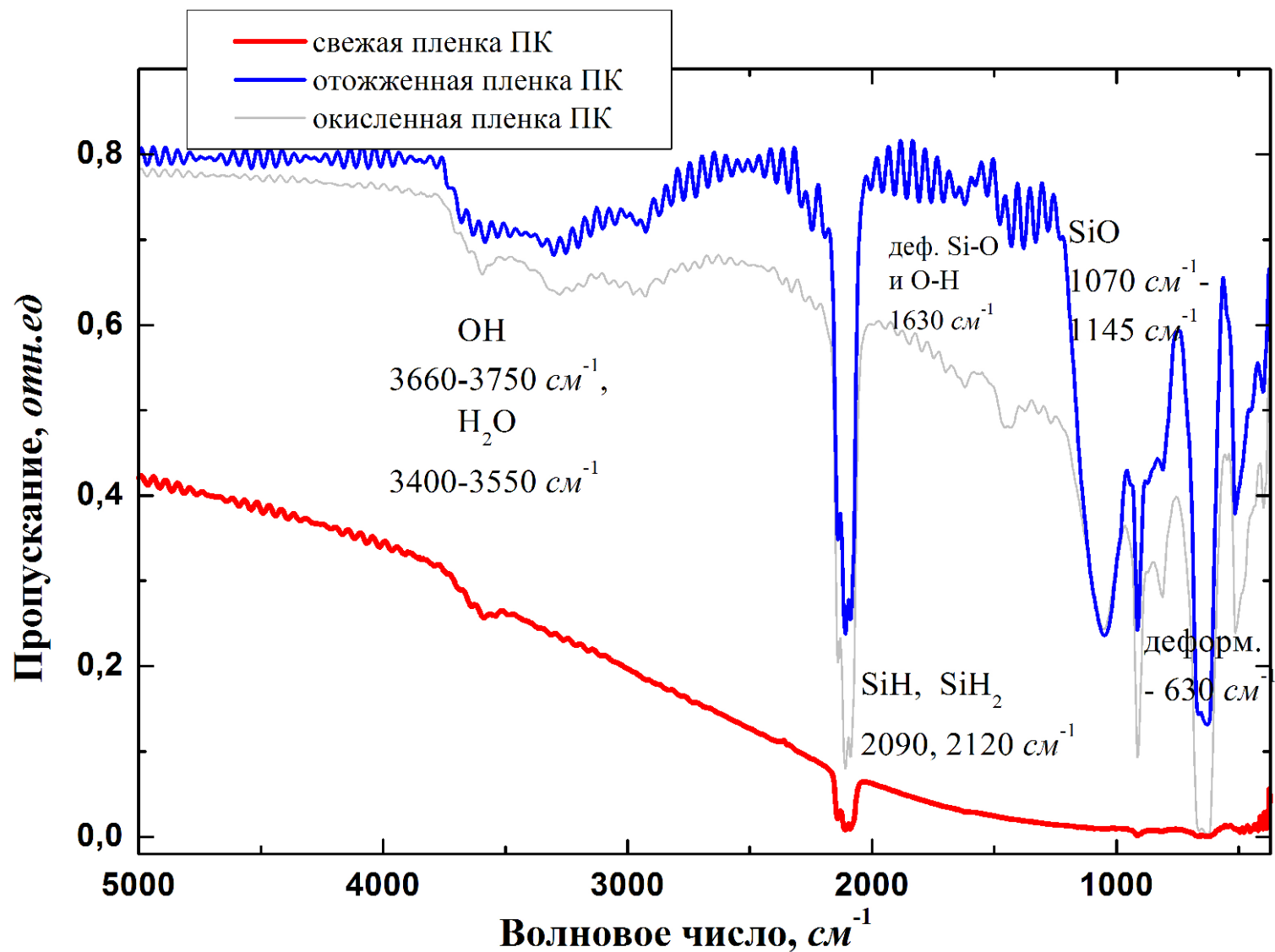
Три фундаментальные моды молекулы CO_2 :

ν_1 - Симметричная валентная мода;

ν_2 - деформационная мода

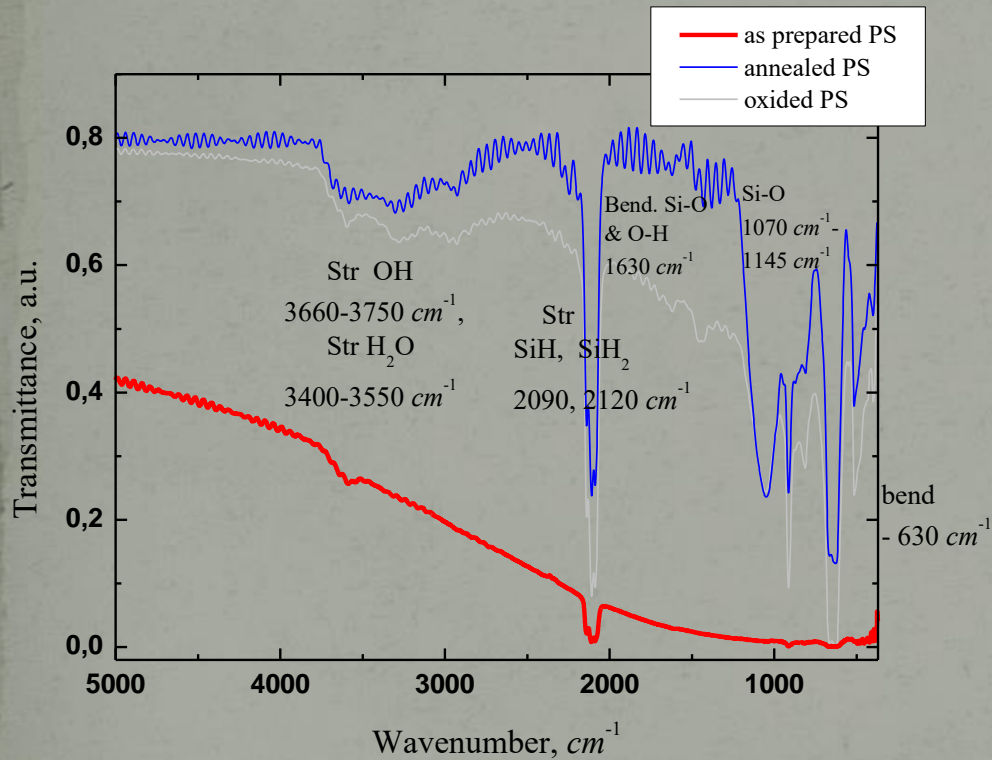
ν_3 - антисимметричная валентная мода;

Молекулярная колебательная спектроскопия



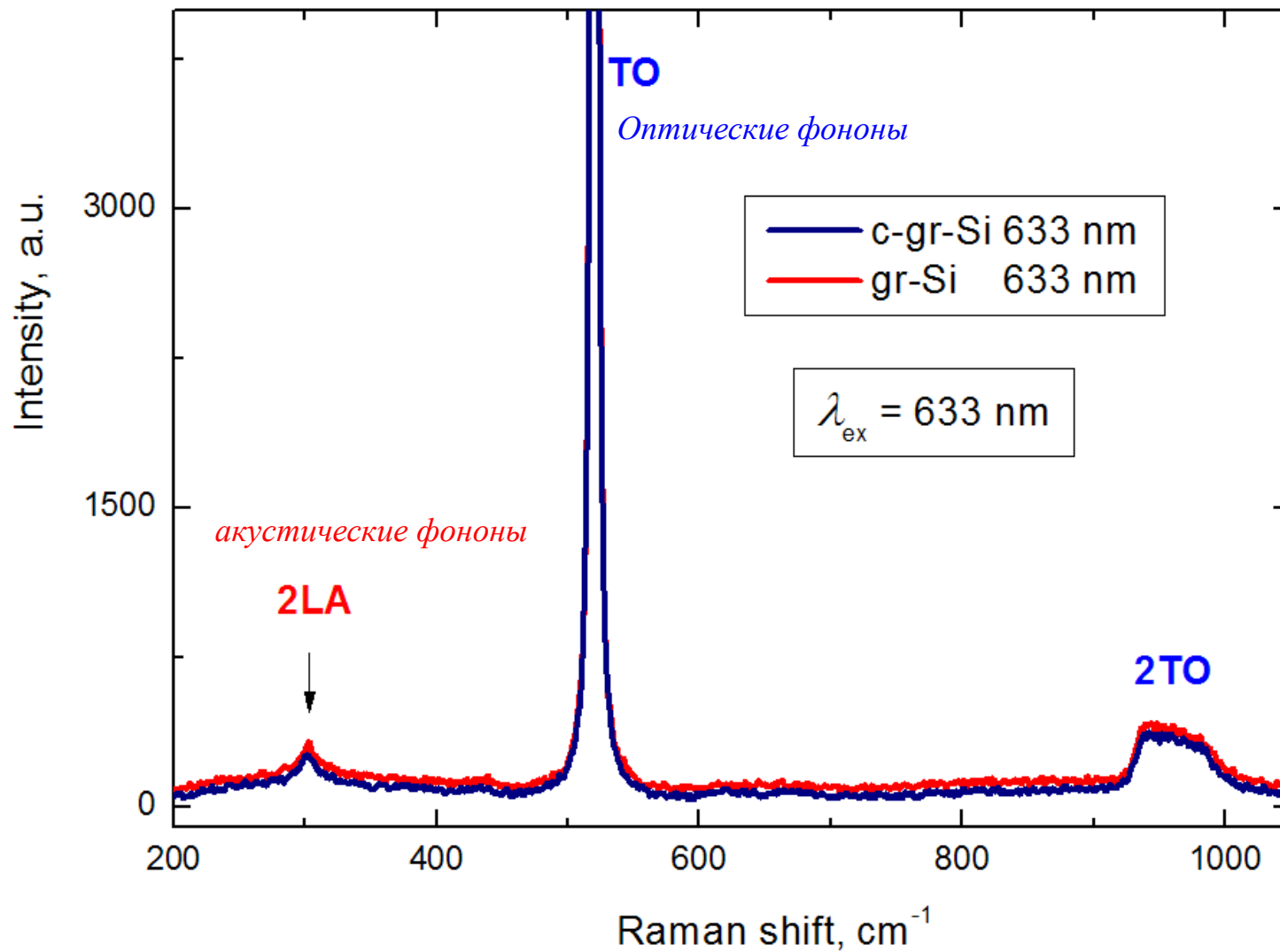
ИК спектроскопия

- The infra-red (IR) spectroscopy of porous silicon

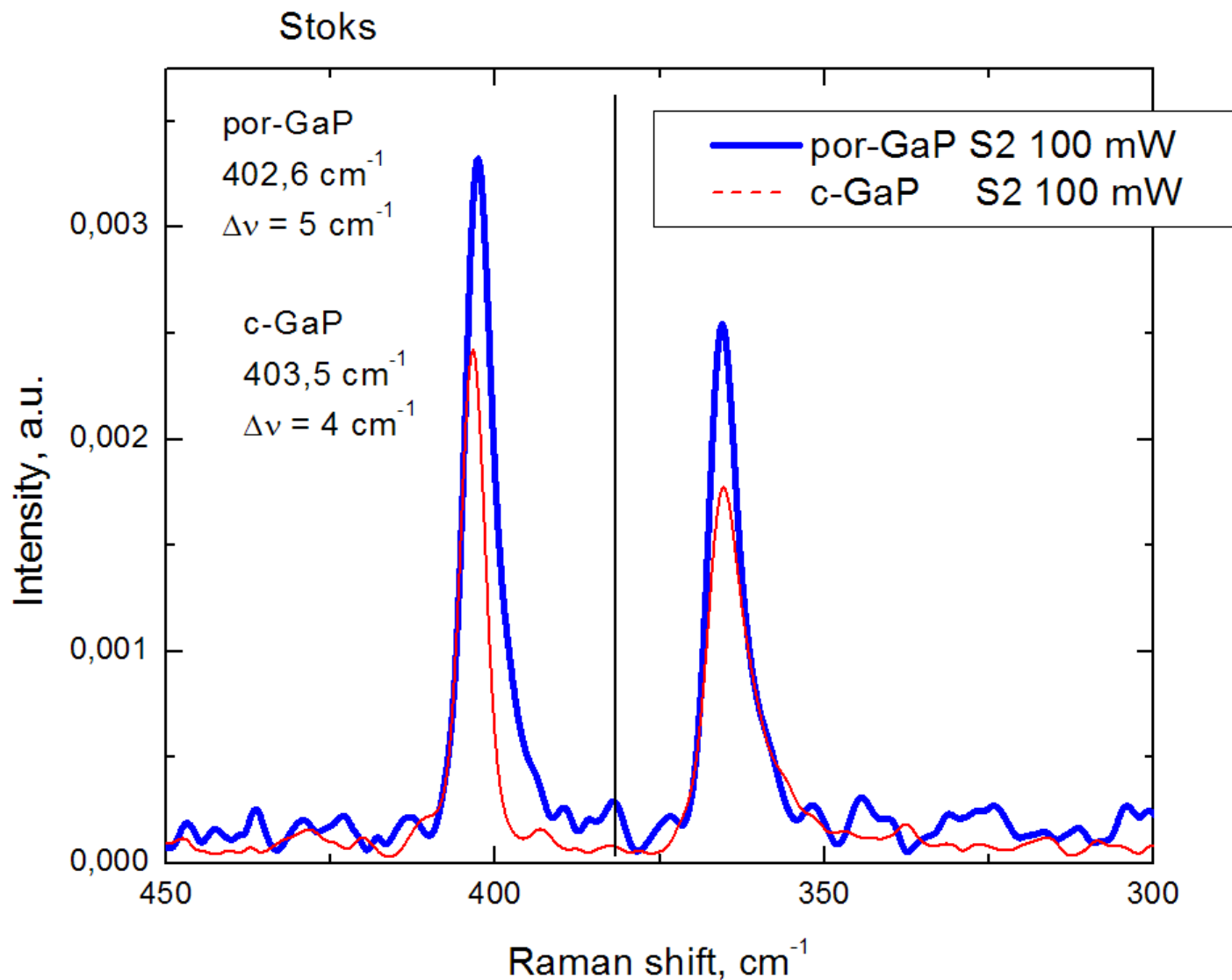


Absorption line, (cm^{-1})	Types of vibration mode
3745	Si-OH
3610	O-H stretching vibrations (in SiOH)
3452	O-H stretching vibrations (in H_2O)
2958	C-H stretching vibrations (in CH_3)
2927	C-H stretching vibrations (in CH_2)
2856	C-H stretching vibrations (in CH)
2197	Si-H stretching vibrations (in $\text{SiO}_2\text{-SiH}$)
2140	Si- H_3 stretching vibrations (in $\text{SiH}_2\text{-SiH}$)
2116	Si- H_2 stretching vibrations (in $\text{Si}_2\text{H-SiH}$)
1720	C=O
1056-1160	Si-O stretching vibrations (in Si-O-Si и C-Si-O)
980	Si-F stretching vibrations
979	Si-H bending vibrations (in $\text{Si}_2\text{H-SiH}$)
950	Si-F stretching vibrations
948	Si-H bending vibrations (in $\text{Si}_2\text{H-SiH}$)
827	Si-O bending vibrations (in Si-O-Si)
800	Si- CH_3
624	Si-H bending vibrations ($\text{Si}_3\text{-SiH}$)
617	Si-Si

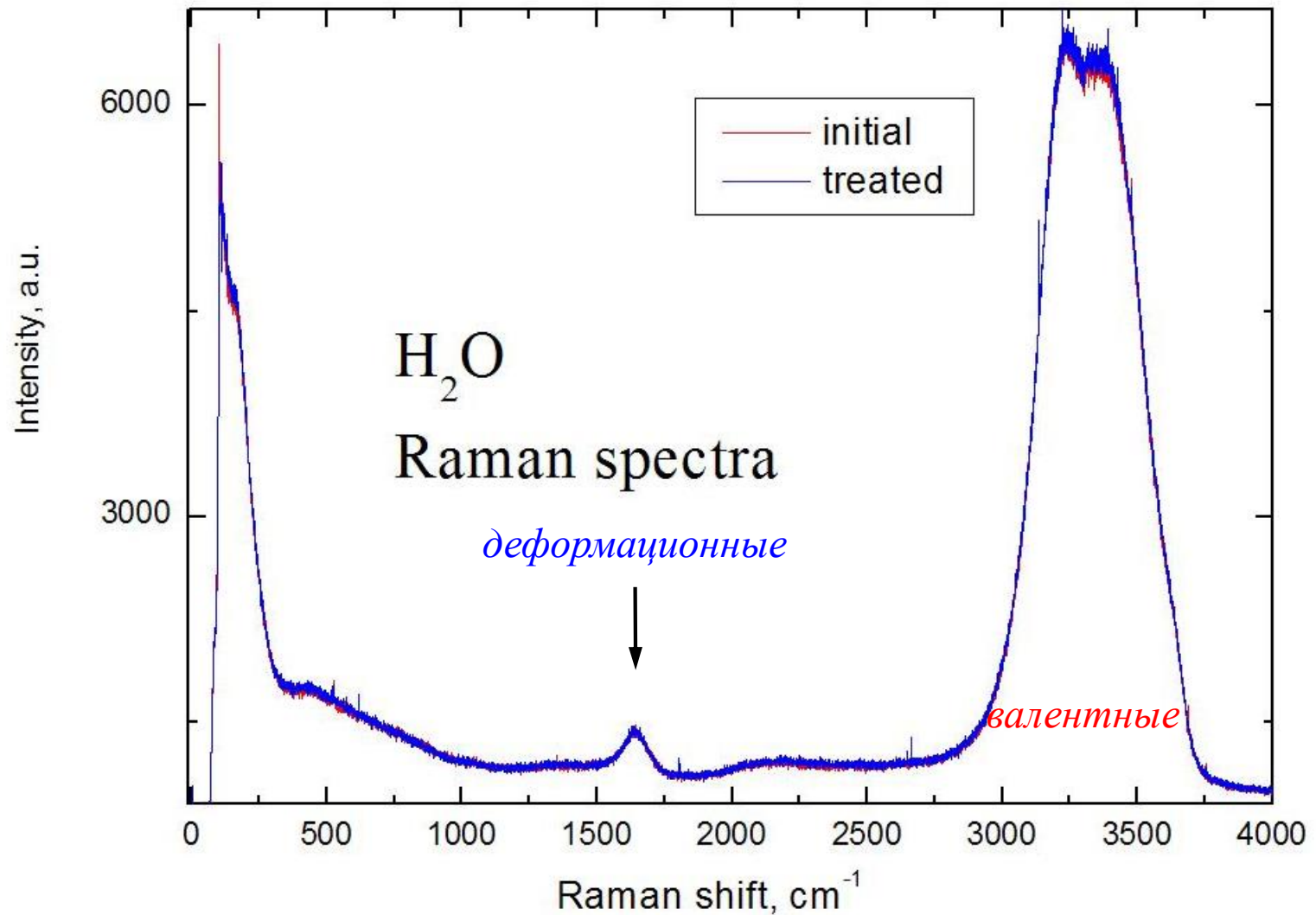
Спектры комбинационного рассеяния света c-Si



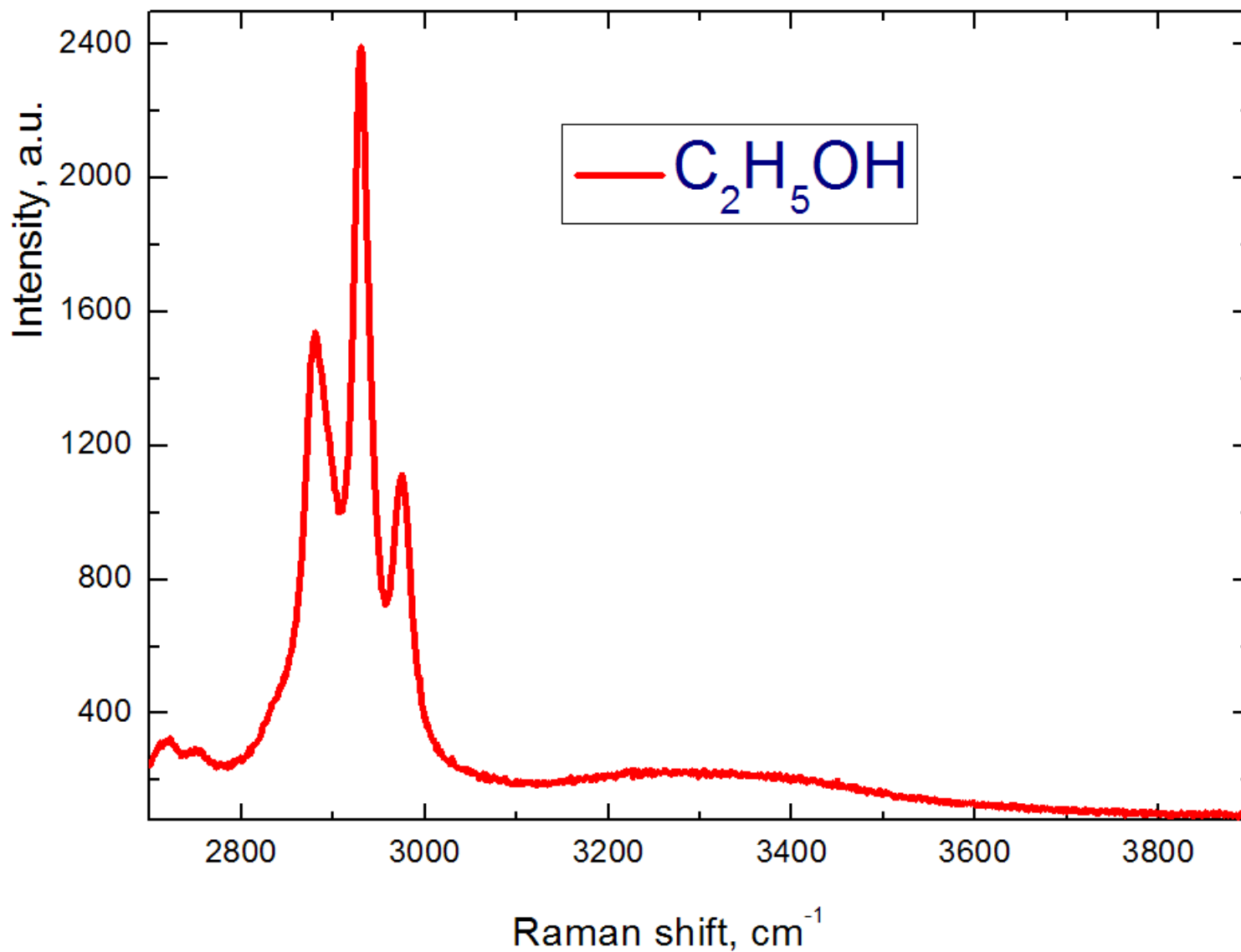
Спектры КРС арсенида галлия (GaP)



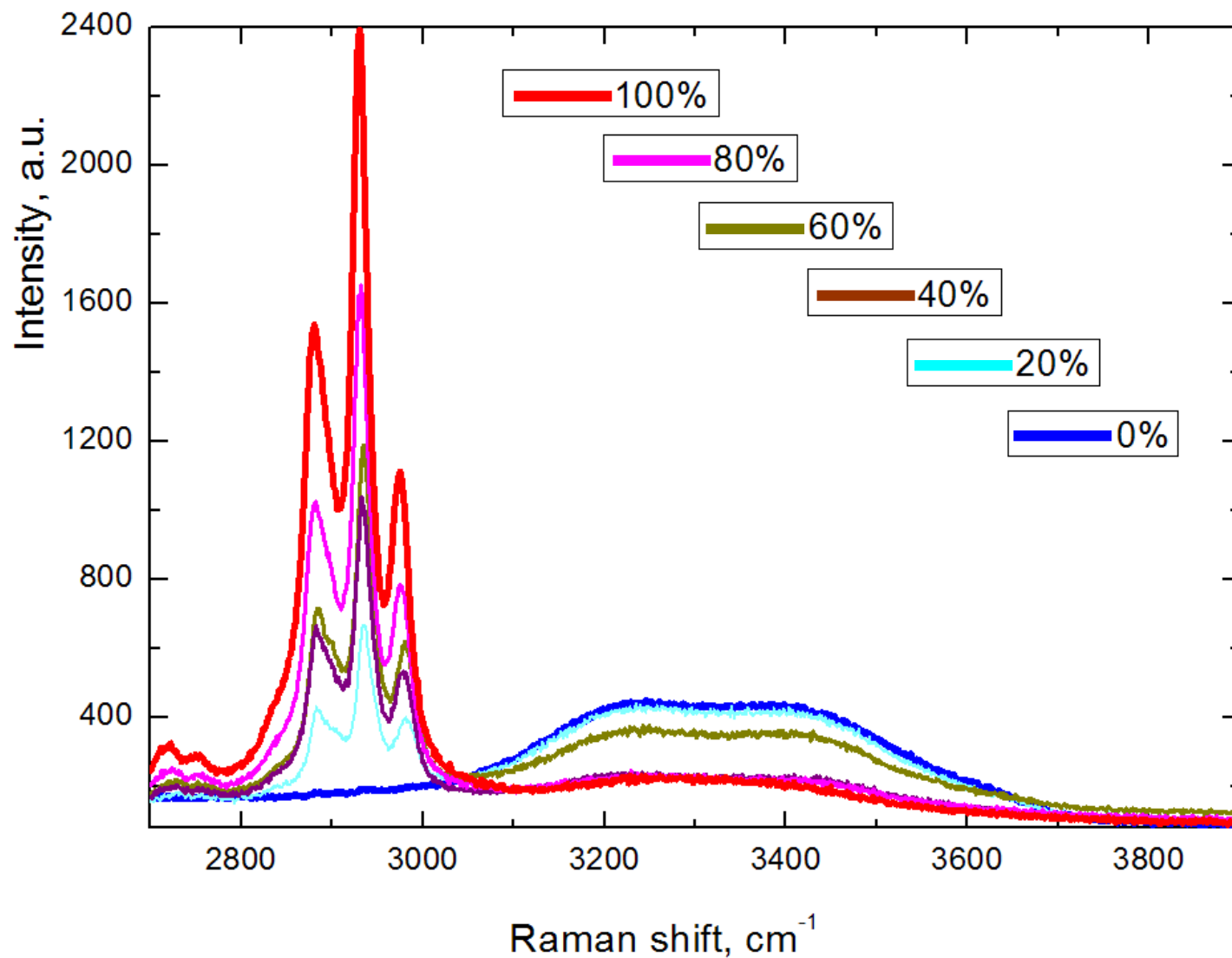
Спектр комбинационного рассеяния света воды



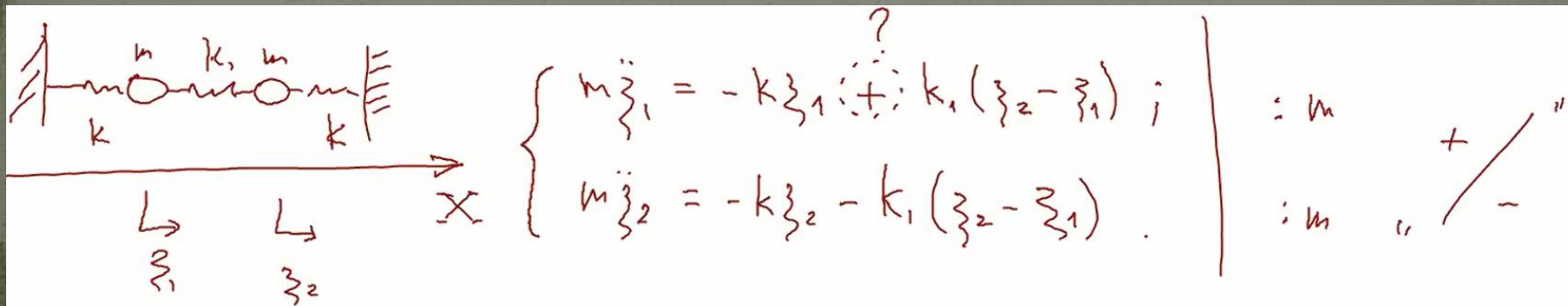
Спектр комбинационного рассеяния света



Спектры комбинационного рассеяния света



Доска 1



"+" : $\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = -\frac{k}{m}(z_1 + z_2) \rightarrow \ddot{z}_{\text{I}} = \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2$

$\ddot{z}_{\text{I}} + \frac{k}{m}z_{\text{I}} = 0 \rightarrow z_{\text{I}}(t) = A_{\text{I}} \cdot \cos(\omega_{0\text{I}}t + \varphi_{0\text{I}})$

"-" : $\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 = -\frac{k}{m}(z_2 - z_1) - \frac{2k_1}{m}(z_2 - z_1) \rightarrow \ddot{z}_{\text{II}} = \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1$

$\ddot{z}_{\text{II}} + \frac{k+2k_1}{m}z_{\text{II}} = 0 \rightarrow z_{\text{II}}(t) = A_{\text{II}} \cdot \cos(\omega_{0\text{II}}t + \varphi_{0\text{II}})$

Доска 2

$$\begin{array}{l} \xi_{\bar{I}} = \xi_1 + \xi_2 ; \\ \xi_{\bar{II}} = \xi_2 - \xi_1 . \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \xi_1 = \frac{\xi_{\bar{I}} - \xi_{\bar{II}}}{2} ; \\ \xi_2 = \frac{\xi_{\bar{I}} + \xi_{\bar{II}}}{2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \omega_{\sigma_{\bar{I}}} = \sqrt{\frac{k}{m}} ; \\ \omega_{\sigma_{\bar{II}}} = \sqrt{\frac{k+2k_1}{m}} \end{array}$$

$$\xi_1(t) = \frac{1}{2} \left[A_{\bar{I}} \cos(\omega_{\sigma_{\bar{I}}} t + \varphi_{\sigma_{\bar{I}}}) - A_{\bar{II}} \cos(\omega_{\sigma_{\bar{II}}} t + \varphi_{\sigma_{\bar{II}}}) \right] ;$$

$$\xi_2(t) = \frac{1}{2} \left[\dots + \dots \right] .$$

Доска 3

$$\left\{ \begin{array}{l} -L \frac{dI_1}{dt} = \frac{q_1}{C} + \frac{q}{C_1} ; \quad - \ddot{q}_1 = \frac{1}{LC} q_1 + \frac{1}{LC_1} q \\ \underbrace{\hspace{2cm}}_{E_{si}} \\ -L \frac{dI_2}{dt} = \frac{q_2}{C} + \frac{q}{C_1} ; \quad - \ddot{q}_2 = \frac{1}{LC} q_2 + \frac{1}{LC_1} q \\ \\ q = q_1 + q_2 ; \quad I_1 = \frac{dq_1}{dt} \equiv \dot{q}_1 ; \quad I_2 = \frac{dq_2}{dt} \equiv \dot{q}_2 \end{array} \right.$$

Доска 4

$$-(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) = \frac{1}{LC} (q_1 - q_2) \quad ; \quad \begin{cases} - \ddot{q}_1 = \frac{1}{LC} q_1 + \frac{1}{LC_1} (q_1 - q_2) \\ - \ddot{q}_2 = \frac{1}{LC} q_2 + \frac{1}{LC_1} (q_2 - q_1) \end{cases}$$
$$q_{\bar{1}} = q_1 - q_2 \quad ; \quad \begin{cases} - \\ + \end{cases}$$

$$\ddot{q}_{\bar{1}} + \frac{1}{LC} q_{\bar{1}} = 0 \quad \rightarrow \quad q_{\bar{1}}(t) = Q_{\bar{1}} \cdot \cos(\omega_{o\bar{1}} t + \varphi_{o\bar{1}})$$

$$q_{\bar{2}} = q_1 + q_2$$

$$\left(\omega_{o\bar{1}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \leftarrow \underline{\text{симметрично}}$$

$$-(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = \frac{1}{LC} (q_1 + q_2) + \frac{2}{LC_1} (q_1 + q_2)$$