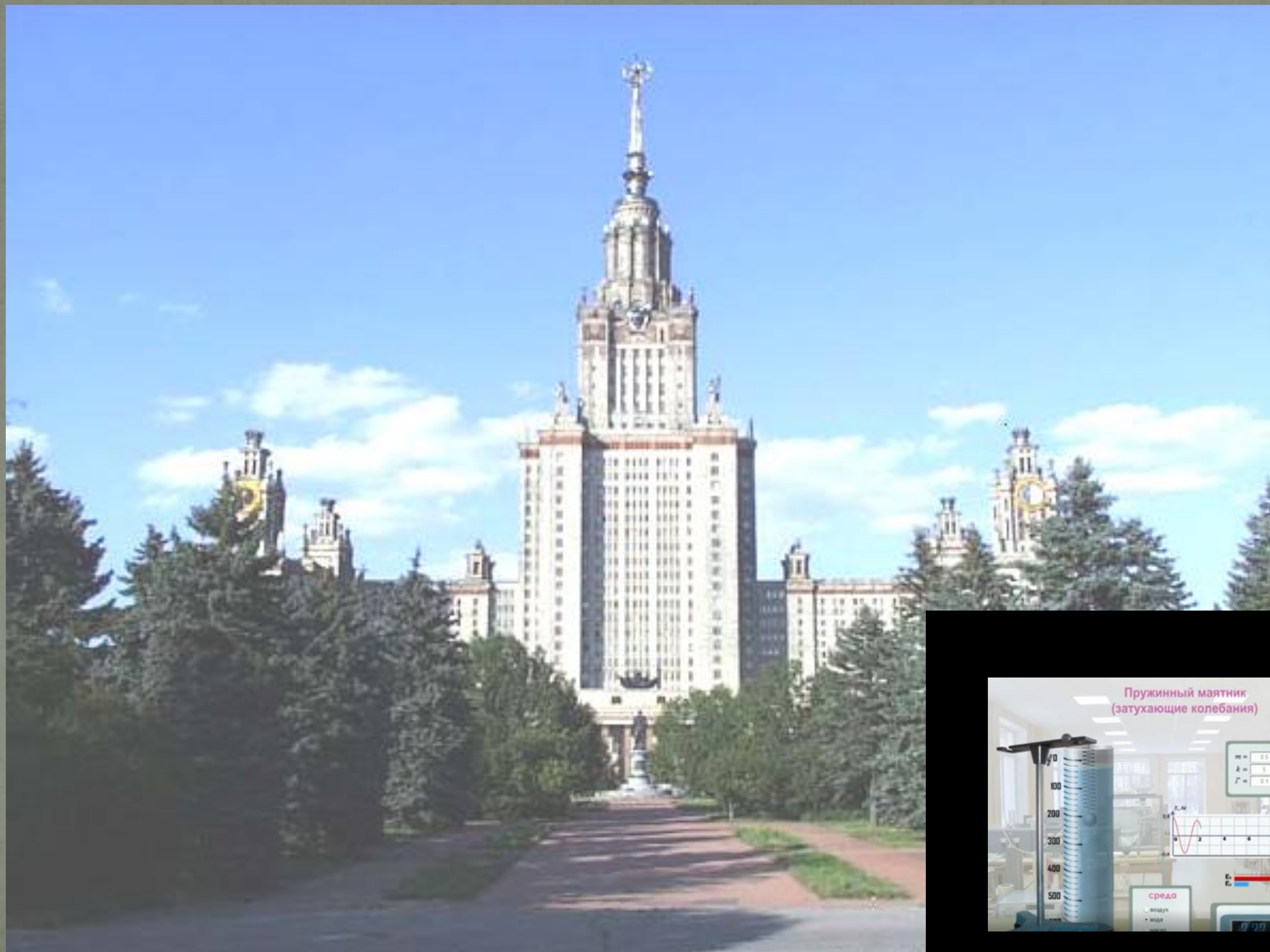
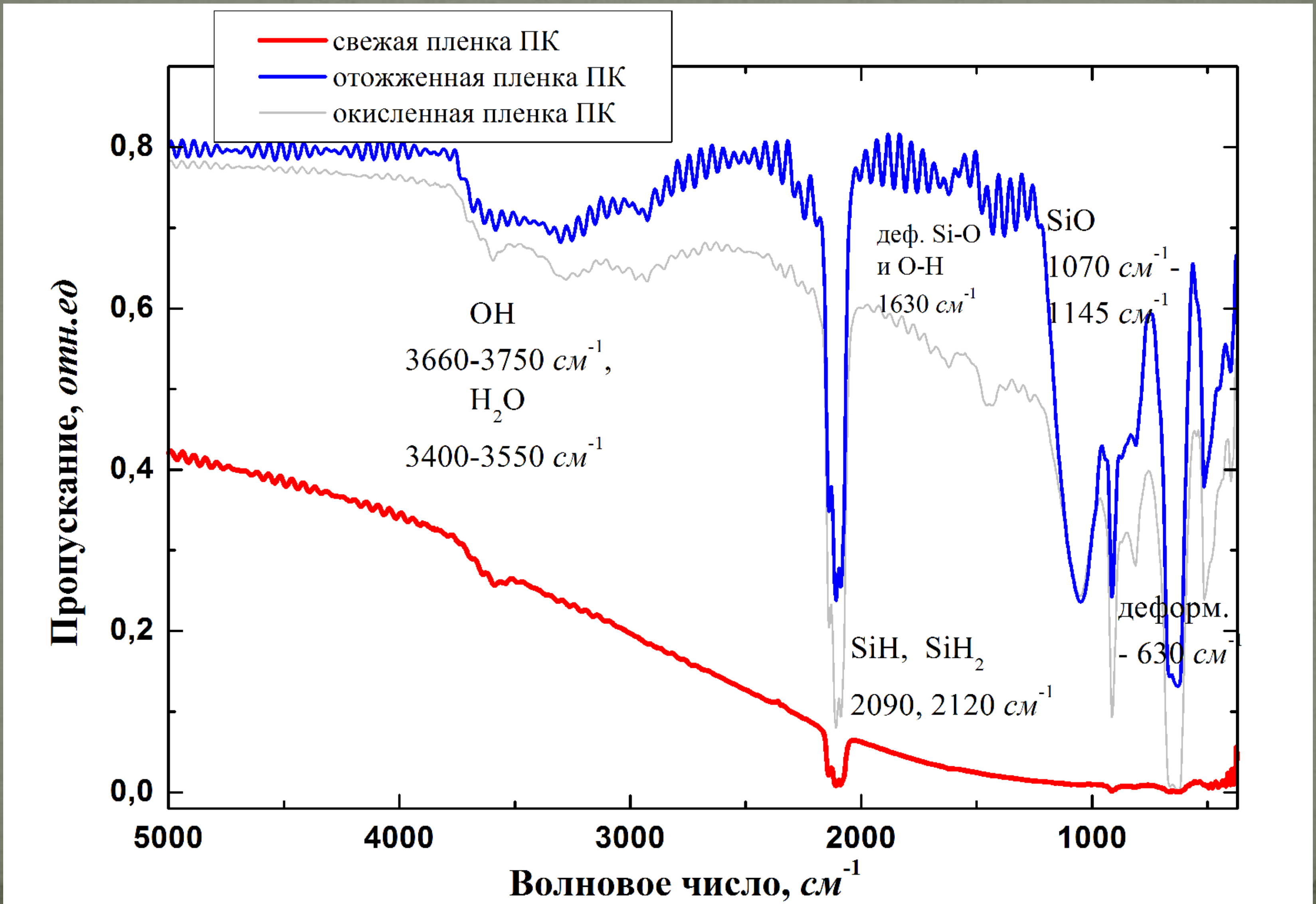
Лекция 3
Осциллятор с затуханием



… завершение: "Колебания молекул"

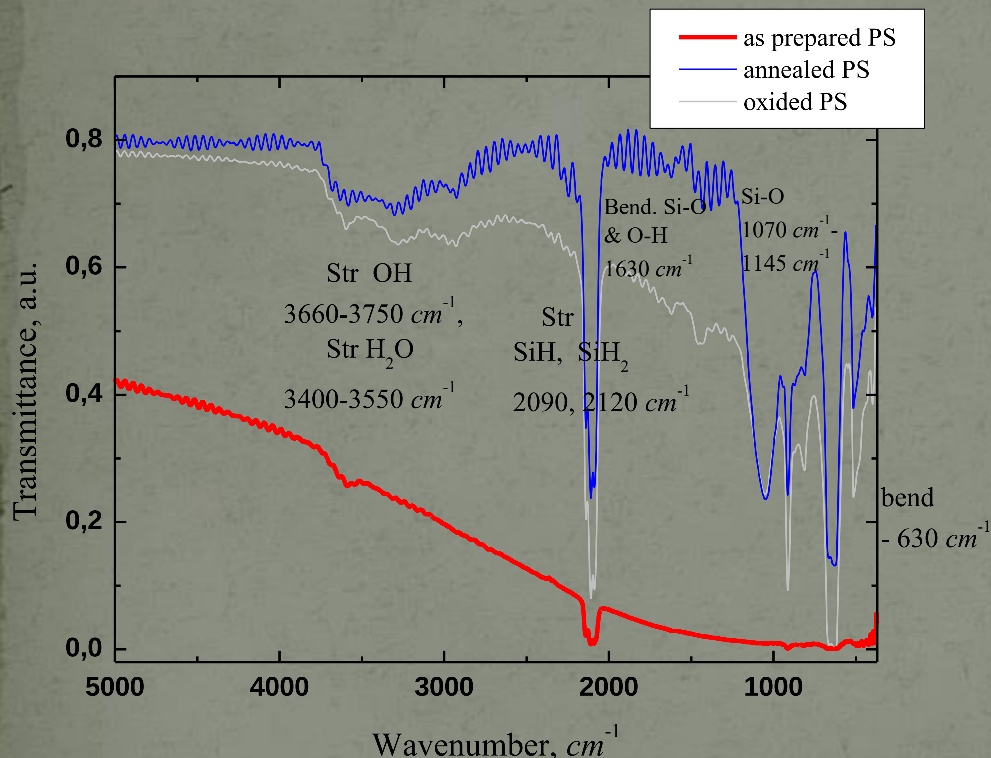
Молекулярная колебательная спектроскопия

- ИК спектры



ИК спектроскопия

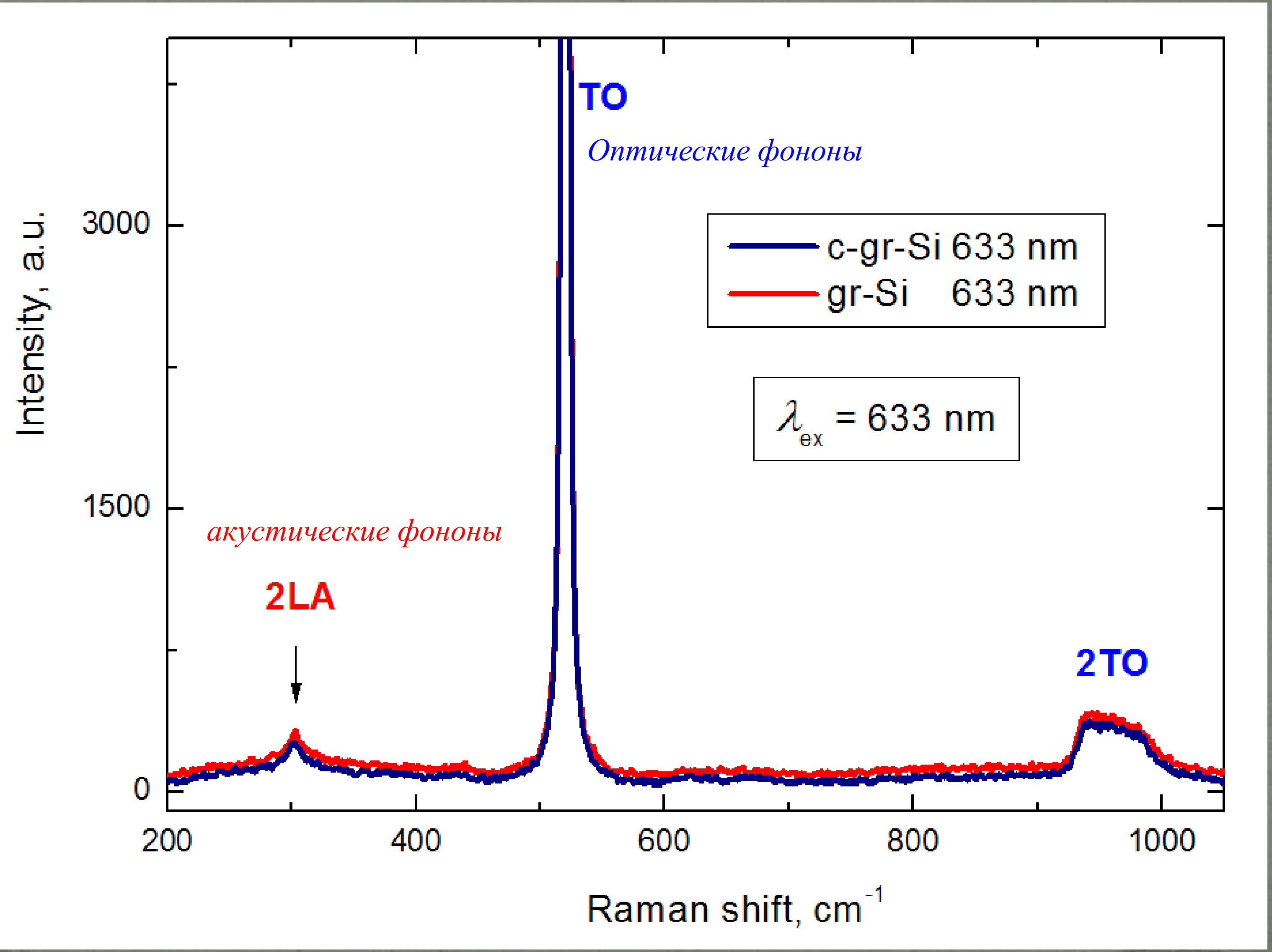
- **The infra-red (IR) spectroscopy of porous silicon**



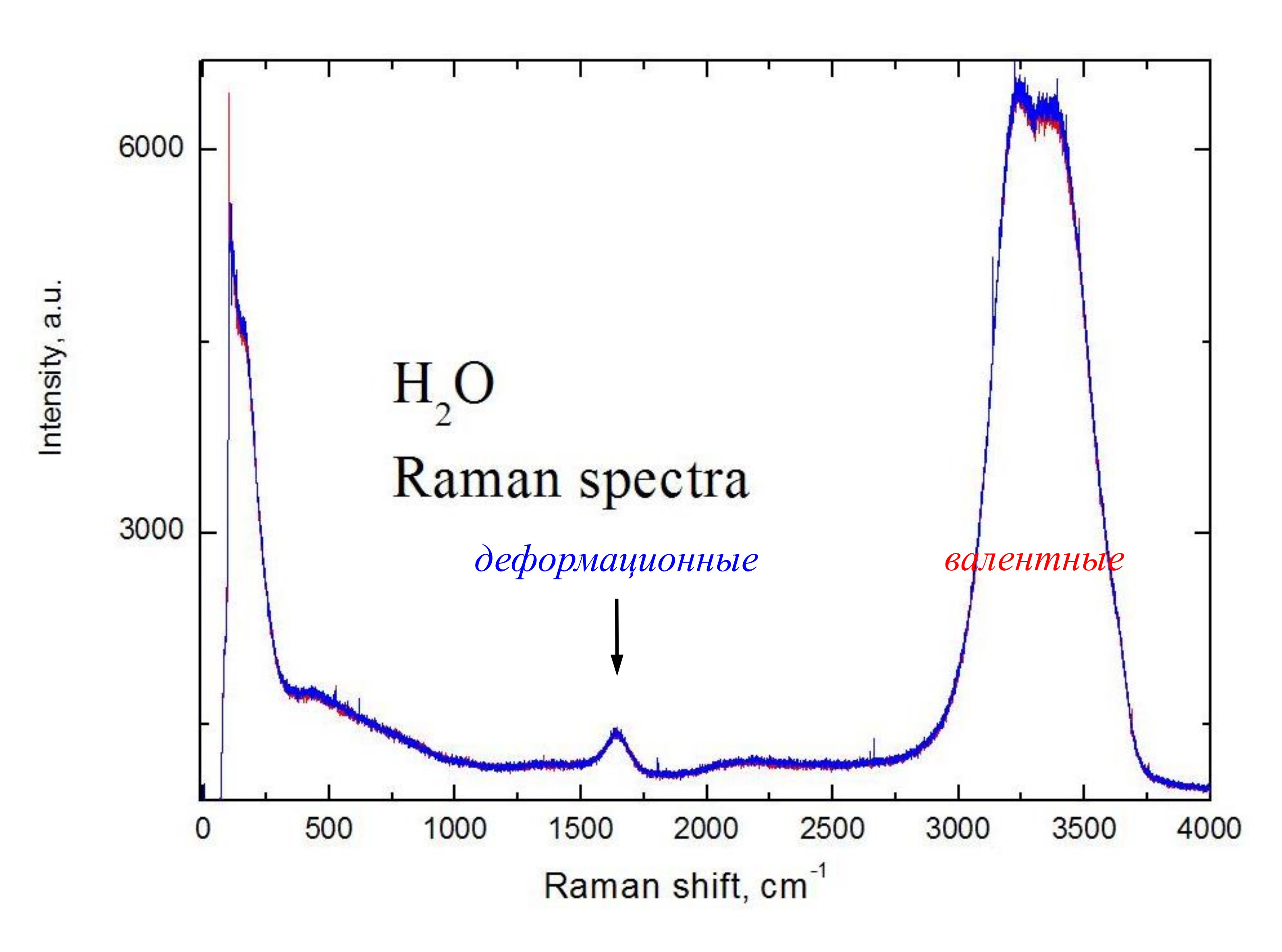
Absorption line, (cm^{-1})	Types of vibration mode
3745	Si–OH
3610	O–H stretching vibrations (in SiOH)
3452	O–H stretching vibrations (in H_2O)
2958	C–H stretching vibrations (in CH_3)
2927	C–H stretching vibrations (in CH_2)
2856	C–H stretching vibrations (in CH)
2197	Si–H stretching vibrations (in SiO_2–SiH)
2140	Si-H_3 stretching vibrations (in SiH_2–SiH)
2116	Si–H_2 stretching vibrations (in Si_2H–SiH)
1720	C=O
1056-1160	Si–O stretching vibrations (in Si–O–Si и C–Si–O)
980	Si–F stretching vibrations
979	Si–H bending vibrations (in Si_2H–SiH)
950	Si–F stretching vibrations
948	Si–H bending vibrations (in Si_2H–SiH)
827	Si–O bending vibrations (in Si–O–Si)
800	Si–CH_3
624	Si–H bending vibrations (Si_3–SiH)
617	Si–Si

Спектры комбинационного рассеяния света c-Si

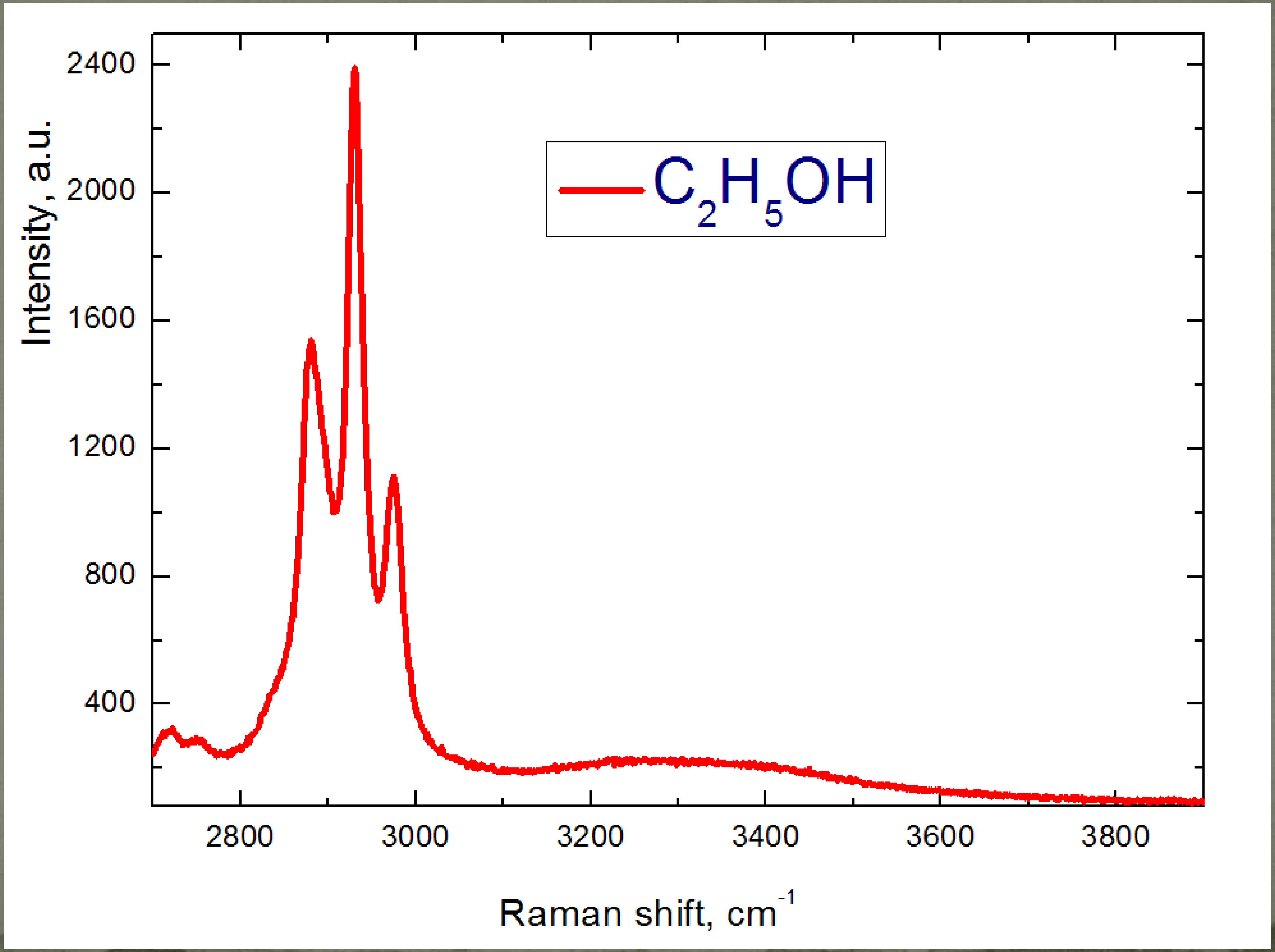
- Кристаллический кремний (c-Si)



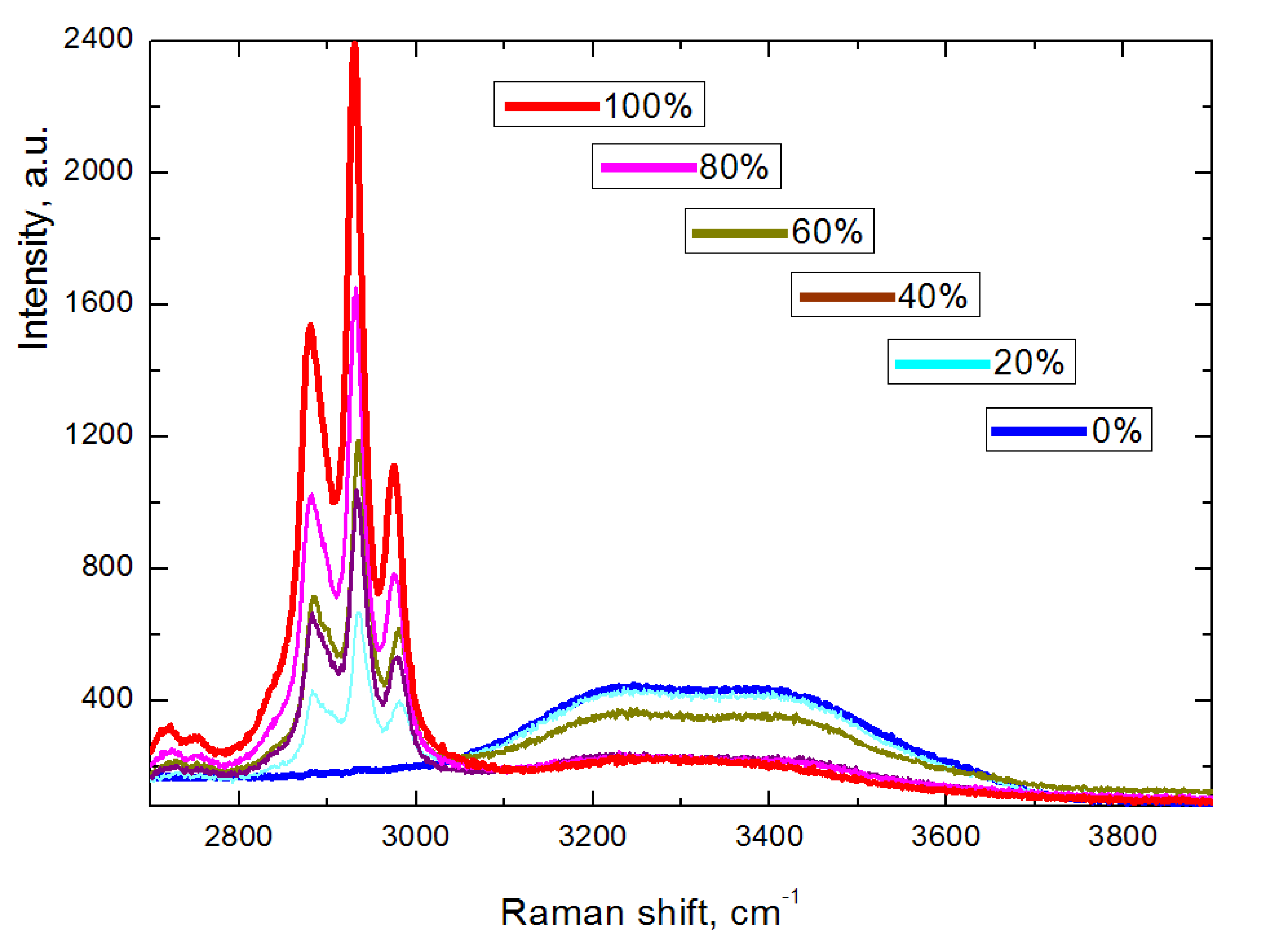
Спектр комбинационного рассеяния света воды



Спектр комбинационного рассеяния света



Спектры комбинационного рассеяния света



§ 3. Свободные затухающие колебания

3.1. Дифференциальное уравнение для осциллятора с затуханием

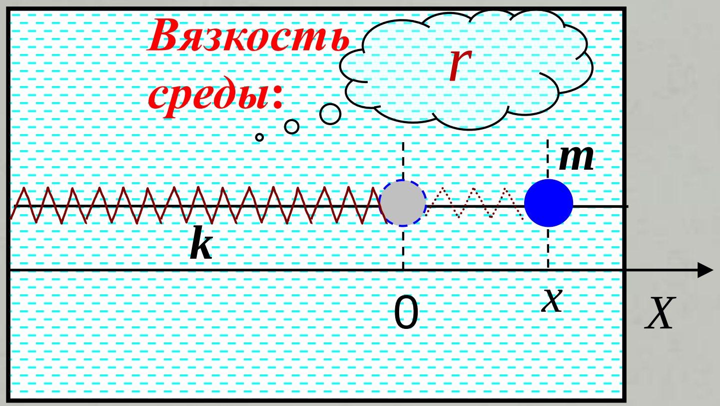


Рис. 1. Пружинный маятник в вязкой среде

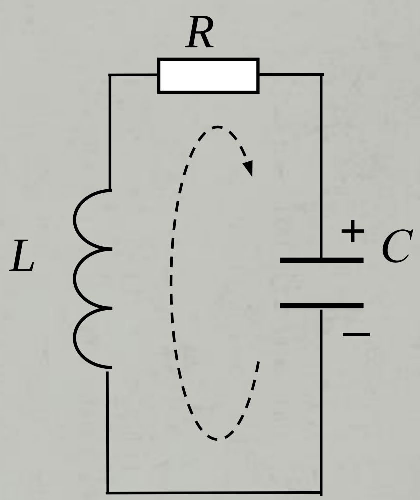


Рис. 2. Контур с затуханием

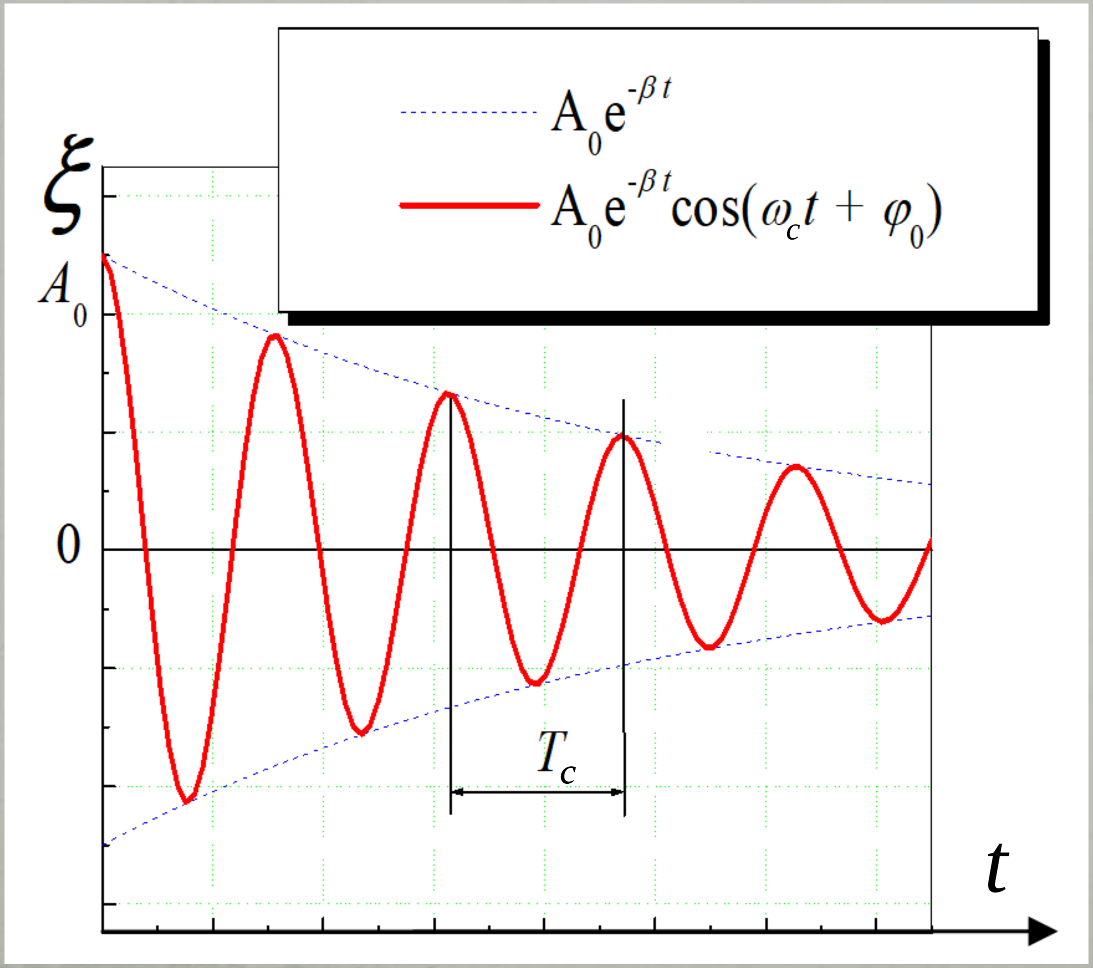
$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$$

$$-L\ddot{q} = \frac{1}{C}q + R\dot{q}$$

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = 0$$

3.2. Малое затухание: $\beta < \omega_0$

Вид решения: $\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_0)$

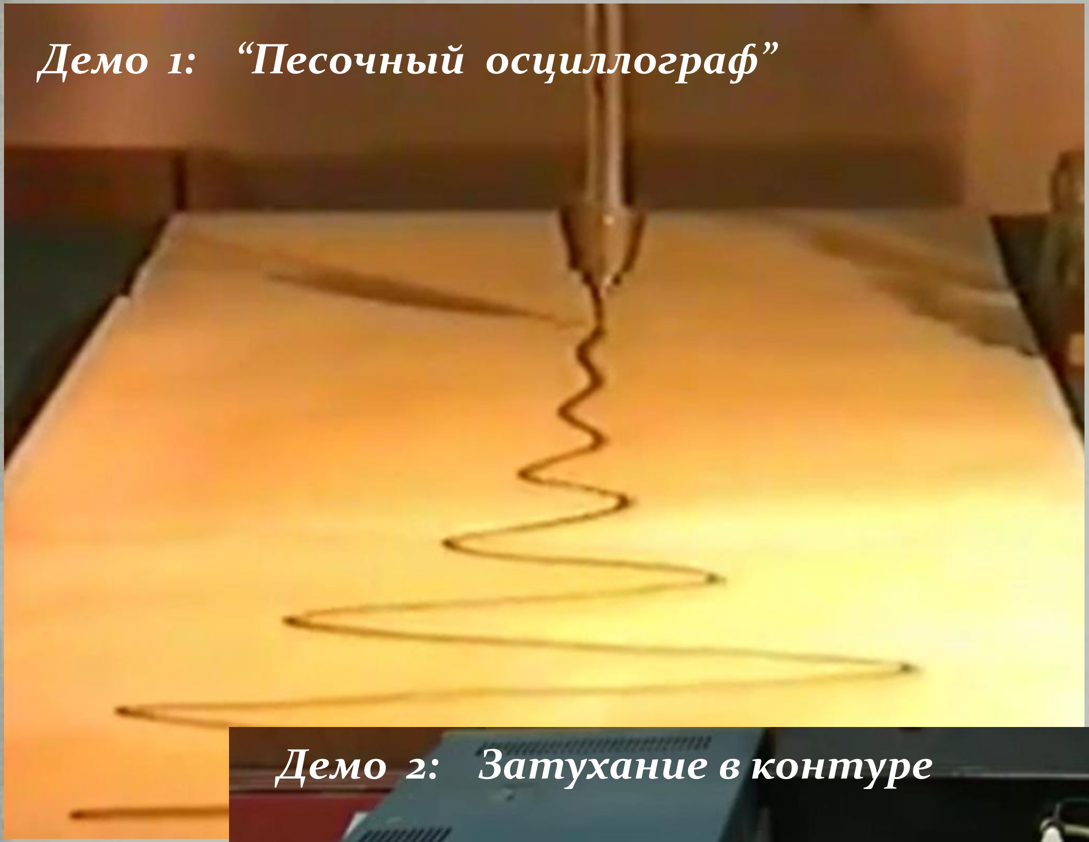


$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$$

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

“Собственная частота затухающих колебаний”

3.2. Малое затухание: $\beta < \omega_0$



Демо 1: “Песочный осциллограф”

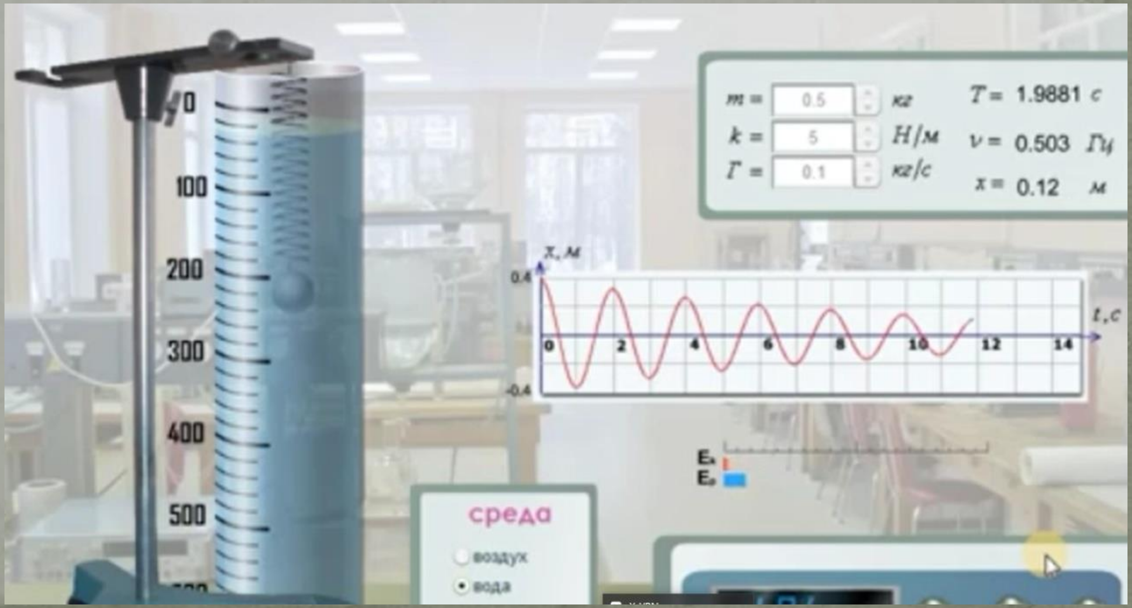
Демо 2: Затухание в контуре

Маятник с затуханием. Анимация

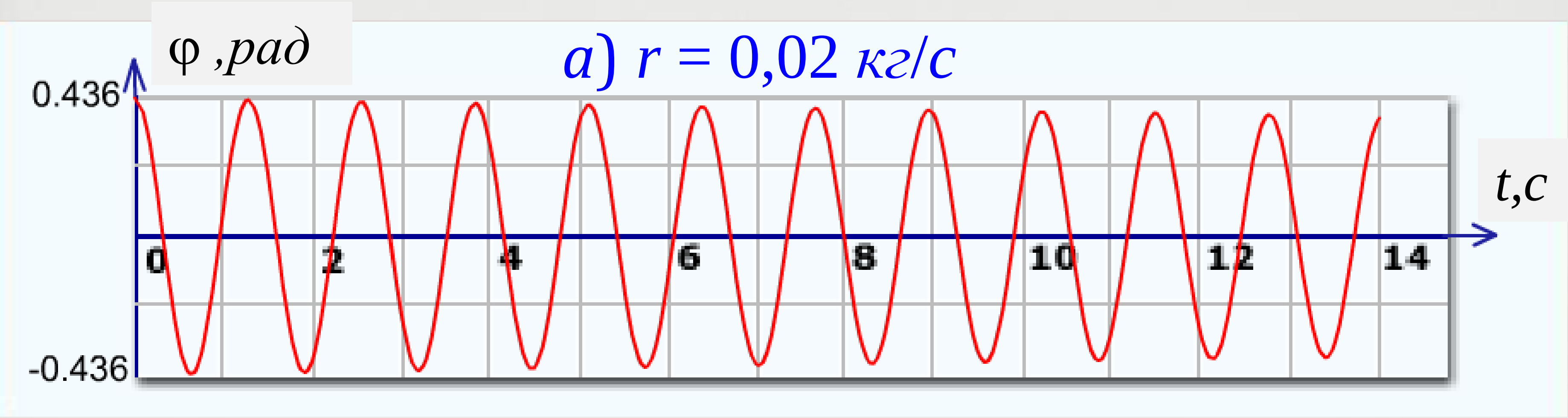
- http://somit.ru/roliki/fizm_z.swf

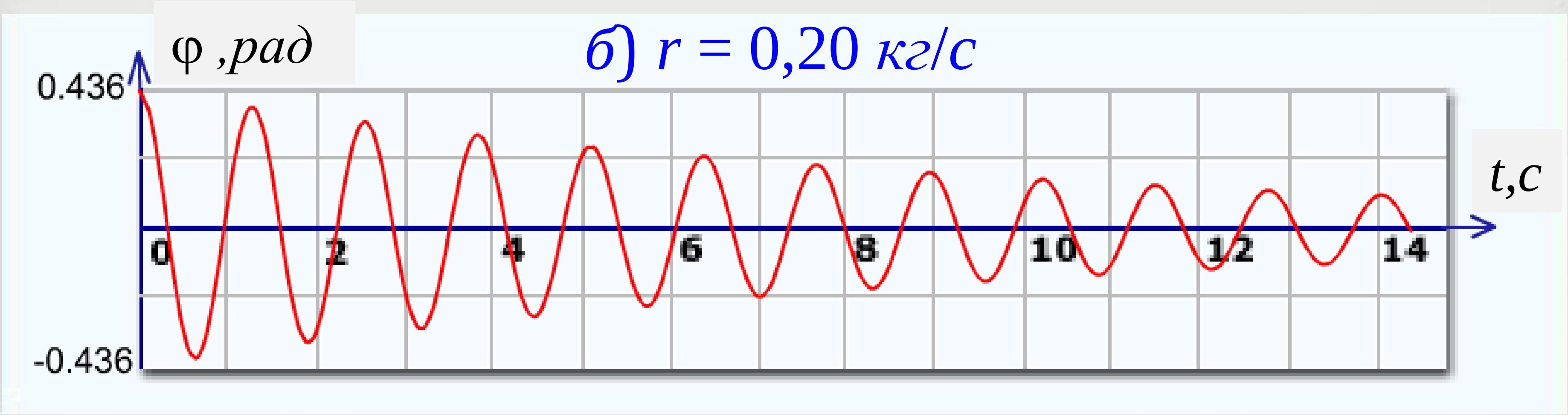
Пружинный маятник в воде

$r = 0{,}1$ *кг/с*



Малое затухание: $\beta < \omega_0$





3.3. Характеристики осциллятора с малым затуханием

- ***Коэффициент затухания*** β : $\Leftarrow$ ***график*** $\ln A = f(t)$

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$$

- ***Время релаксации амплитуды*** τ_A :

$$\frac{A_0}{A_0 e^{-\beta \tau_A}} = e \quad \Rightarrow \tau_A = 1/\beta$$

- ***Количество колебаний*** N_e :

$$N_e = \frac{\tau_A}{T_c} = \frac{1}{\beta T_c}$$

- ***Декремент затухания – величин, равная отношению амплитуд двух последовательных колебаний***:

$$D = \frac{A(t)}{A(t+T_c)} = e^{\beta T_c}$$

- ***Логарифмический декемент затухания*** :

$$\gamma = \ln D = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T_c = \frac{1}{N_e} \qquad \gamma \approx \frac{\Delta A_T}{A}$$

3.4. Добротность колебательной системы

Зам. …

Добротность: $Q = \pi \cdot N_e$ **или** $\dfrac{\pi}{\gamma}$ **или** $\dfrac{\pi}{\beta T}$

Нельзя ли без π ?

Подберём k: $\ln(k) = \pi$ $\Rightarrow$ $k = 23$ $\Rightarrow$ $Q = \pi \cdot N_e = N_k = N_{23}$

подсказка: $\dfrac{A_0}{A_0 e^{-\beta \tau_k}} = k$

А ещё: $Q = \dfrac{\pi}{\gamma} = \dfrac{\pi}{\beta T_c} = \dfrac{\omega_c}{2\beta}$ $\left(\beta << \omega_0 : \quad Q \cong \dfrac{\omega_0}{2\beta} \right)$

"Примеры добротностей":

1) Земная кора - сейсмические волны – $Q \cong 10^1 \div 10^3$;
2) «Маятники», …, камертон, …, струна, пьезокварц, … $Q \cong 10^1 \div 10^4$;
3) «колебательный контур» … $Q \sim 10^2$
4) «СВЧ – резонаторы», …, оптические резонаторы, … $Q \cong 10^4 \div 10^7$;
5) Молекулы, атомы …, ядра атомов …, $Q \cong 10^4 \div 10^7 \div 10^{12}$;

…

Система «Лектор – аудитория»:

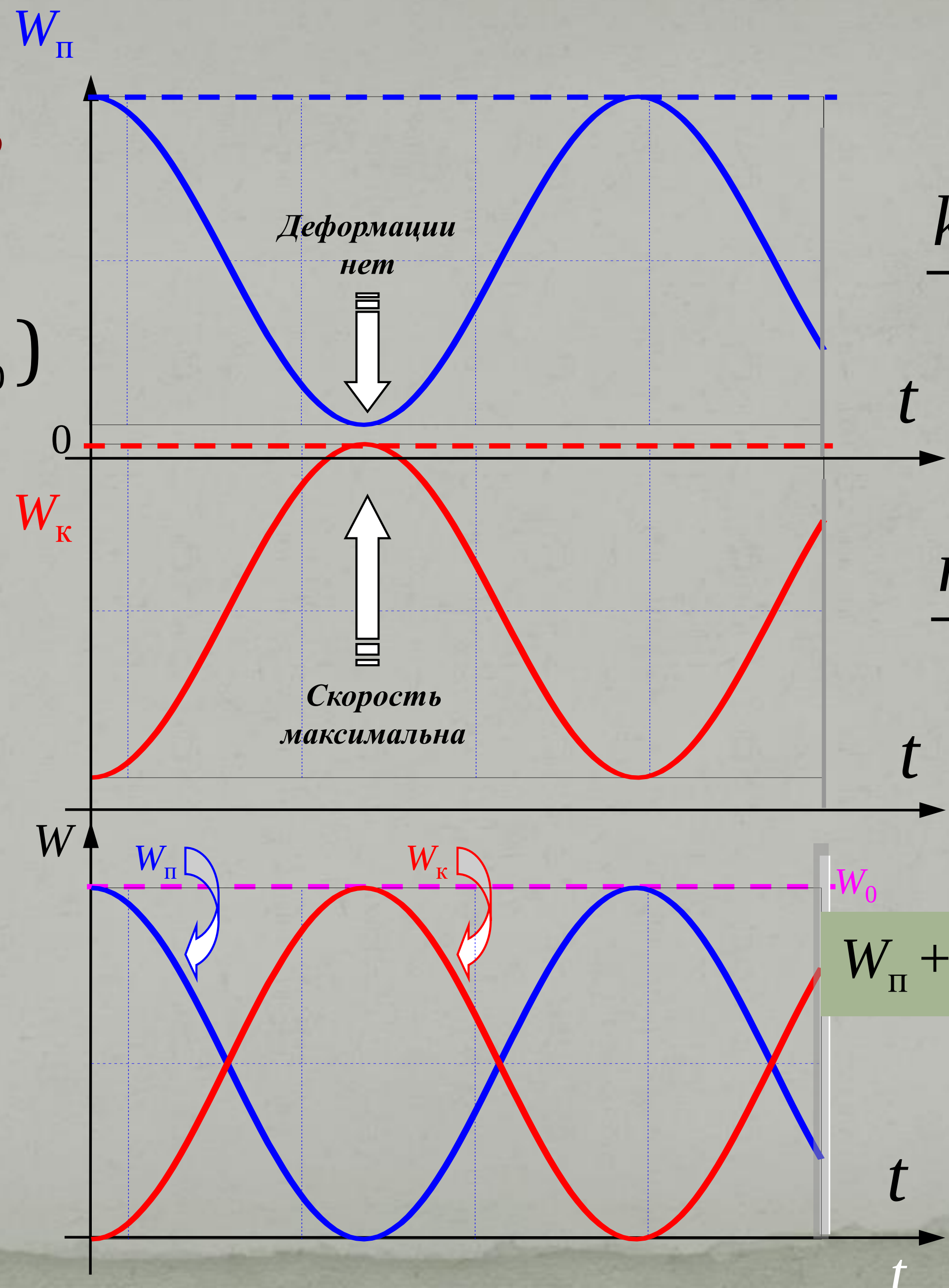
Д.З. : Q = ??? ☺

3.5. Энергия затухающих колебаний

Rem:

Энергия гармонического осциллятора

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$



$$\frac{kx^2(t)}{2}$$

$$\frac{m\dot{x}^2(t)}{2}$$

$$W_п + W_к = const$$

А W осциллятора с малым затуханием

??

Энергия $W(t)$:

$$W_n(t)=\frac{k\xi^2(t)}{2}=\frac{kA_0^2}{2}e^{-2\beta t}\{1+\cos[2(\omega_c t+\varphi_0)]\}$$

$$W_\kappa(t)=\frac{m\dot{\xi}^2(t)}{2}=\ldots$$

$$W(t)=W_\kappa(t)+W_\kappa(t)=\ldots$$ **... см. рис.:**

Ещё про "Добротность" ...

$$W(t)\approx W_0e^{-2\beta t}=W_0e^{-t/\tau_W}$$

(пренебрегая малыми пульсациями – см. рис.)

$$\frac{W(t)}{\Delta W_T(t)}=\frac{1}{1-e^{-2\beta T}}$$

При условии $\beta \ll \omega_0:$ $\quad e^{-2\beta T}\approx 1-2\beta T$

$$\frac{W(t)}{\Delta W_T(t)}\approx\frac{1}{2\beta T_c}=\frac{N_e}{2}=\frac{1}{2\gamma}\qquad\Rightarrow$$

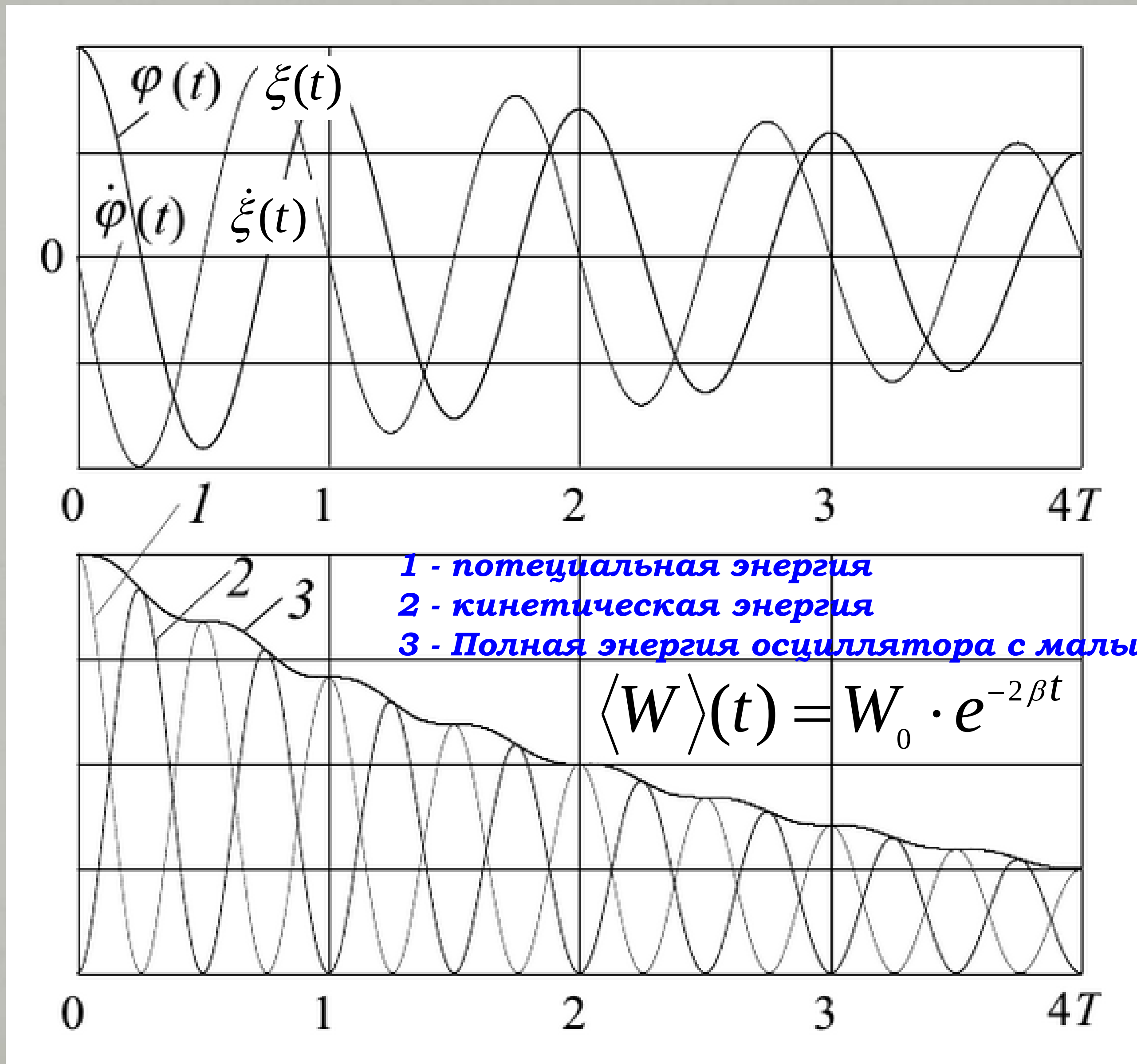
$$Q\cong 2\pi\cdot\frac{W(t)}{\Delta W_T(t)}$$

(**Опр.**) ***Добротность пропорциональна отношению энергии, запасённой осциллятором, к энергии, теряемой за период при свободных колебаниях***

$$Q=\frac{\omega_c}{2\beta}=\omega_c\tau_W\cong\omega_0\tau_W$$

... и ещё:

Энергия осциллятора с малым затуханием



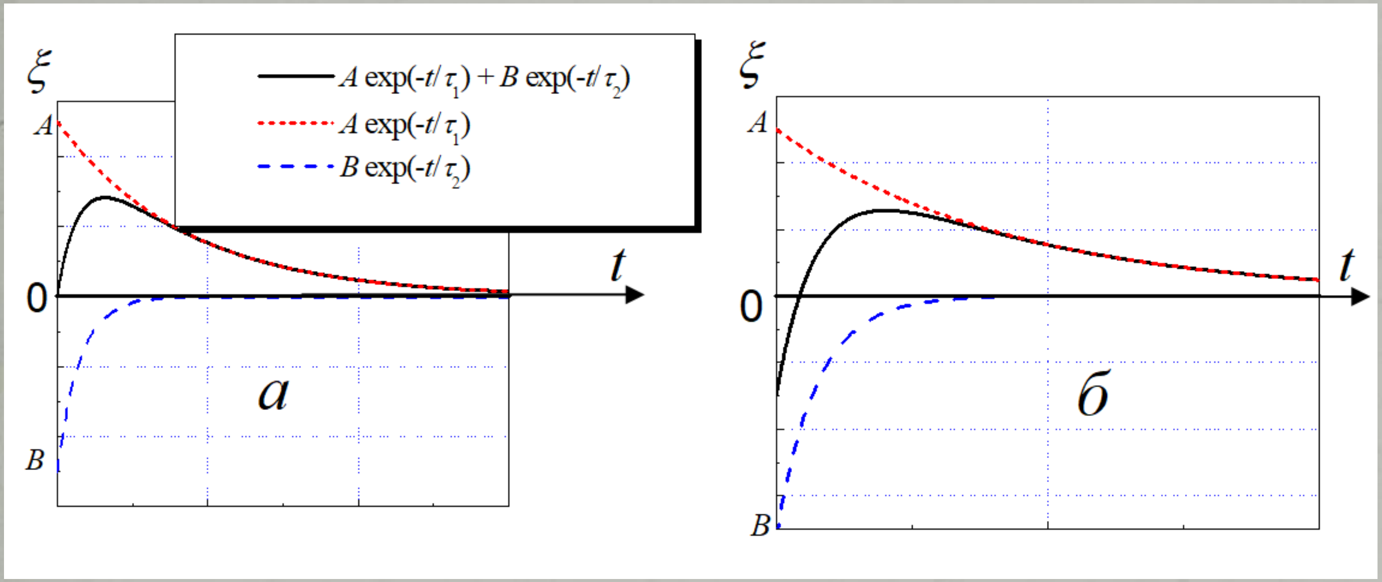
1 - потецуиальная энергия
2 - кинетическая энергия
3 - Полная энергия осциллятора с малым затуханием

$$\langle W \rangle (t) = W_0 \cdot e^{-2\beta t}$$

3.6. Осциллятор с большим затуханием. Релаксация

3.6.1. Большое затухание: $\beta > \omega_0$

другое решения: $\xi(t) = e^{-\beta t}\left(Ae^{\beta_1 t} + Be^{-\beta_1 t}\right) = A\cdot e^{-t/\tau_1} + B\cdot e^{-t/\tau_2}$



$$\beta_1 = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\beta - \beta_1},$$

$$\tau_2 = \frac{1}{\beta + \beta_1}$$

"Большое затухание"

$a)\ \xi(0) = 0$

$\dot{\xi}(0) = \upsilon_0$

$б)\ \xi(0) = \xi_0$

$\dot{\xi}(0) = 0$

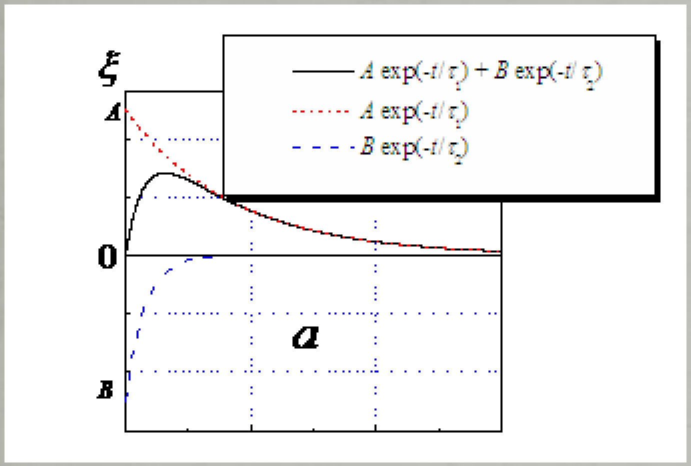
3.6. Осциллятор с большим затуханием. Релаксация

Маятник «в масле»: $\beta \le \omega_0$, $r = 1\ кг/с$

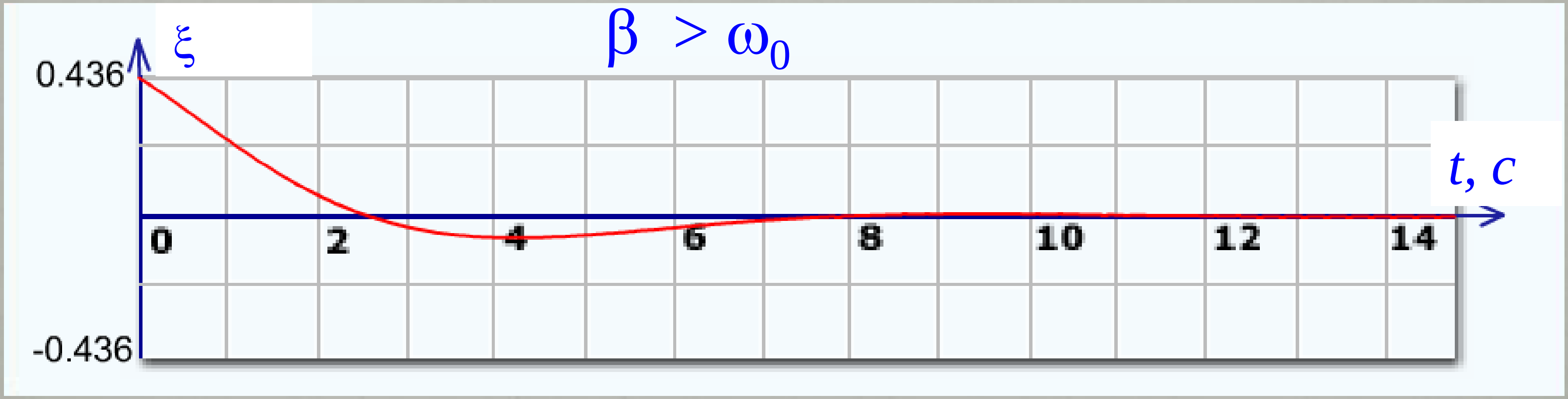
Маятник «в масле»: $\beta > \omega_0$, $r = 2\ кг/с$

Большое затухание:

$\beta \geq \omega_0$



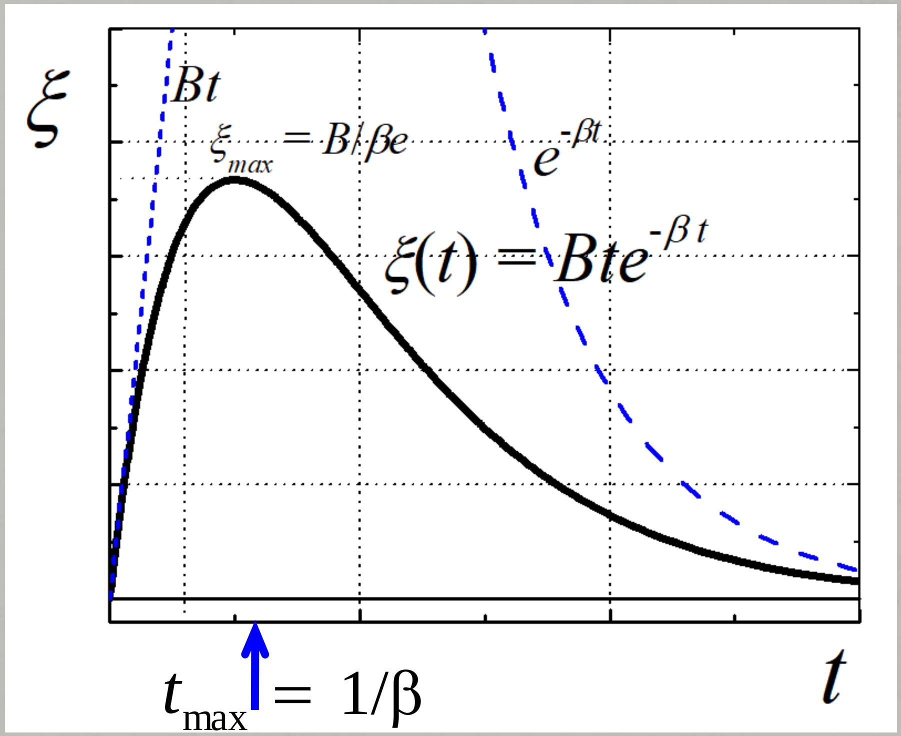
$$\xi(t) = A \cdot e^{-t/\tau_1} + B \cdot e^{-t/\tau_2}$$



3.6.2. Осциллятор в «критическом режиме»: $\beta = \omega_0$

$$\beta_1 = 0$$

Вид решения: $\xi(t) = (A + B \cdot t)e^{-\beta t}$



$a)\ \xi(0) = A = 0;$

$$\dot{\xi}(0) = B = \upsilon_0$$

$$\xi_{max} \sim \upsilon_0$$

"баллистические приборы"

3.7. Особенности затухающих колебаний в системе связанных осцилляторов

1) Число мод = …

2) Разная добротность мод ⇒ спектры …

3) Энергетическая независимость мод …
… искажения «гармоничности мод» …
появление «гармоник»

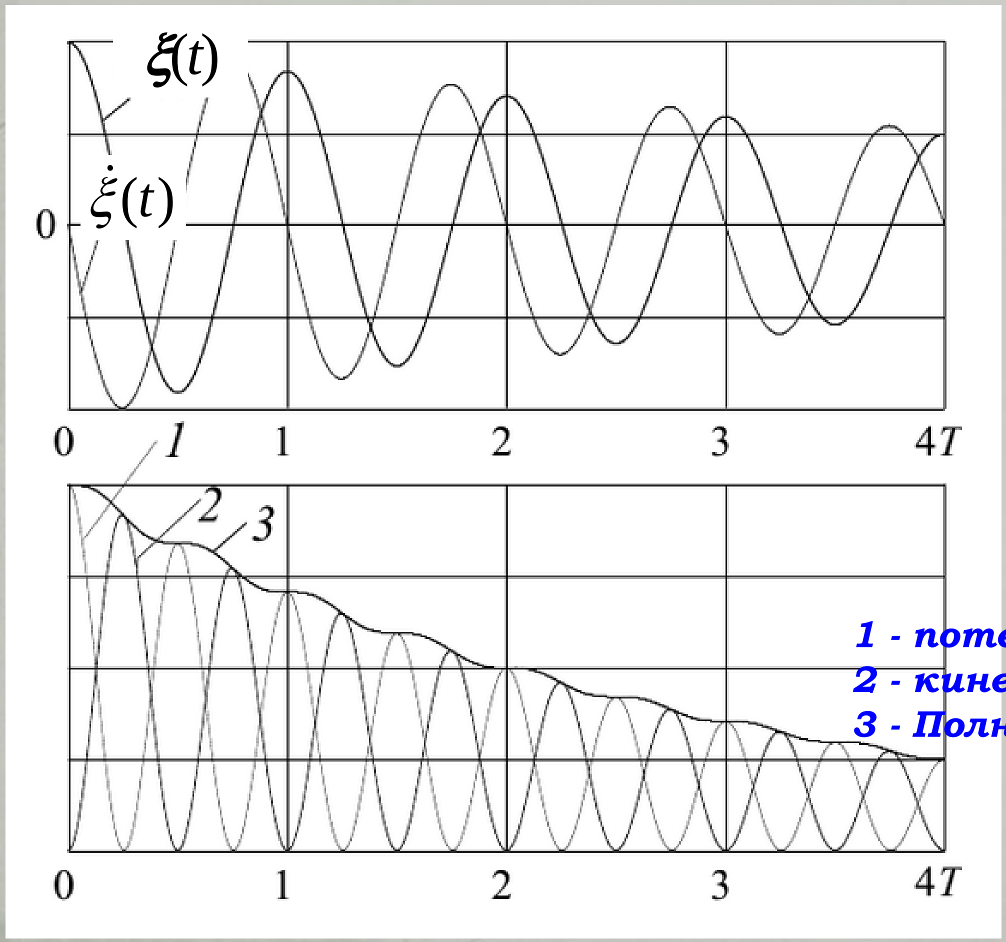
4) Большое затухание – «моды исчезают»
… ☺

Глава II. Вынужденные колебания

§1. Вынужденные механические колебания при гармоническом внешнем воздействии

1.1. Дифференциальное уравнение для вынужденных колебаний

Rem :



Свободные

Затухающие

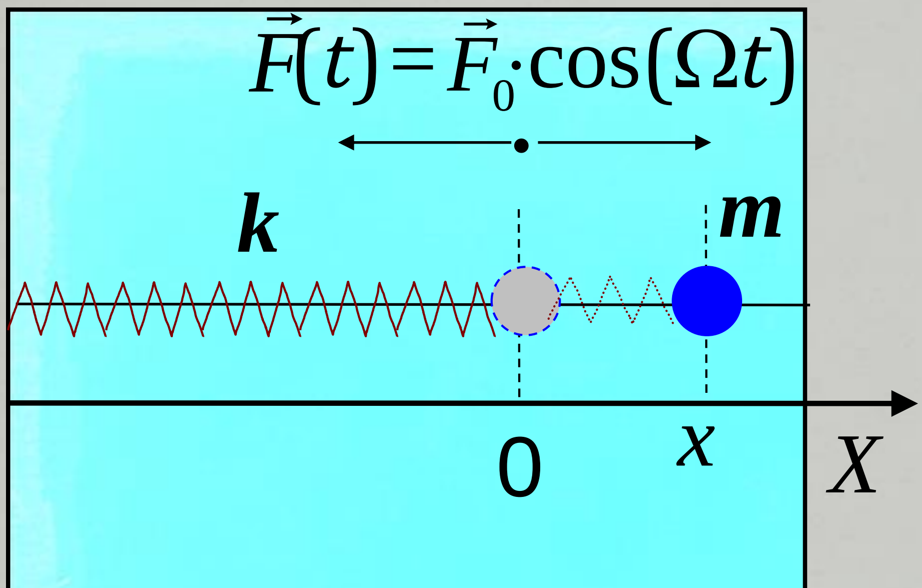
Энергия осциллятора с затуханием

1 - потецициальная энергия
2 - кинетическая энергия
3 - Полная энергия осциллятора с затуханием

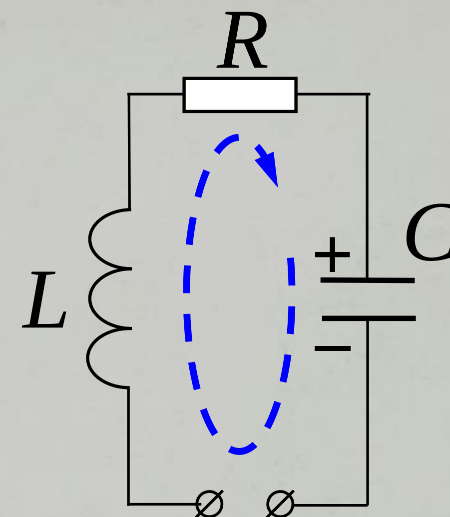
$$\langle W\rangle(t) = W_0 \cdot e^{-2\beta t}$$

Убыль надо восполнять **!**

К выводу уравнения вынужденных колебаний



или



$u(t) = u_0\cos(\Omega t)$

$$m\ddot{x} = -r\dot{x} - kx + F_0\cos(\Omega t)$$

$$-L\ddot{q} + u_0\cos(\Omega t) = \frac{1}{C}q + R\dot{q}$$

Итог:

$$\boxed{\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = f_0 \cdot \cos(\Omega t)}$$

$f_0 = F_0/m$ или u_0/L

1.2. Вид решения дифференциального уравнения для вынужденных колебаний

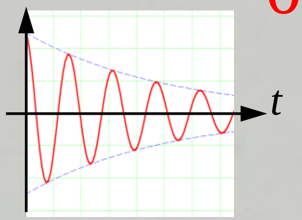
Математика: “общее однородного + частное неоднородного”

Свободные: ↓

$$\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_0) \quad + \quad \text{“частное”}$$

$\to 0$

Но при $t >> \tau_A = 1/\beta$:



И останутся:

$$\xi_{у.в.к.}(t) = \mathcal{A} \cdot \cos(\Omega t - \alpha)$$

Установившиеся вынужденные колебания (у.в.к.)

$\mathcal{A}$ – *амплитуда установившихся вынужденных колебаний;*

Ω - *частота у.в.к.;*

α - *сдвиг фаз у.в.к.*

Замечания:

1) у.в.к.;
2) Ω;
3) “α”
4) $\mathcal{A}$ и α - **??**