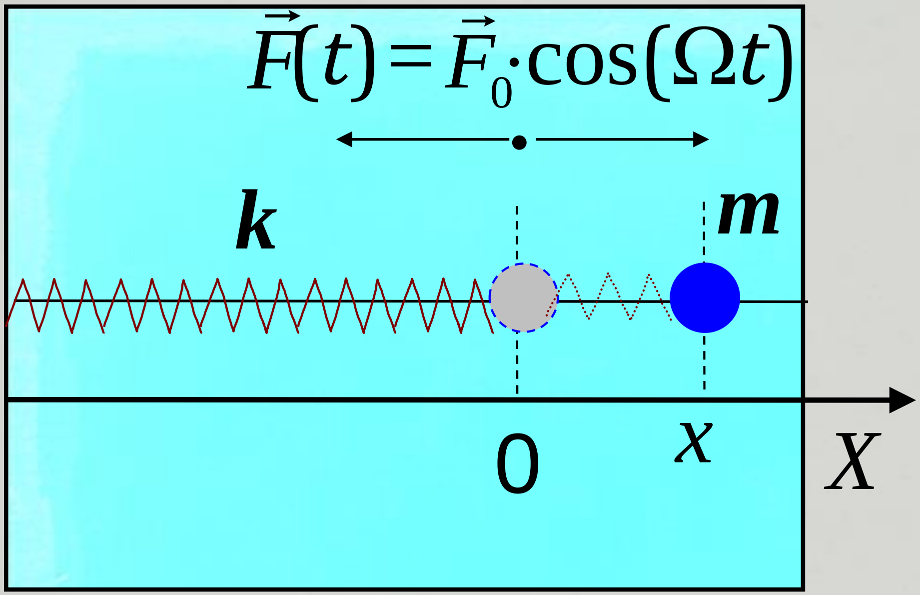
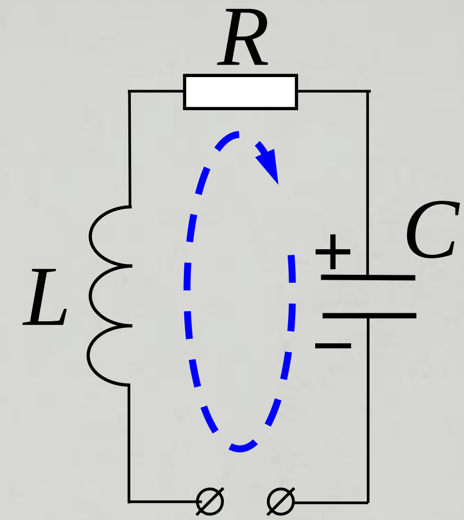
Лекция 4. Вынужденные колебания

К выводу уравнения вынужденных колебаний



или



$u(t) = u_0\cos(\Omega t)$

$$m\ddot{x}=-r\dot{x}-kx+F_0\cos(\Omega t)$$

$$-L\ddot{q}+u_0\cos(\Omega t)=\frac{1}{C}q+R\dot{q}$$

Итог:

$$\boxed{\ddot{\xi}+2\beta\dot{\xi}+\omega_0^2\xi=f_0\cdot\cos(\Omega t)}$$

$f_0 = F_0/m$ или u_0/L

1.2. Вид решения дифференциального уравнения для вынужденных колебаний

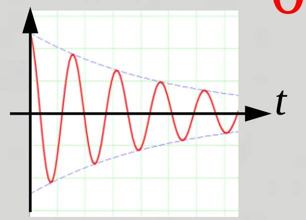
Математика: "общее однородного **+** *частное неоднородного*"

Свободные: ↓

$$\xi(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_c t + \varphi_0)$$ + "**частное**"

0

Но при $t >> \tau_A = 1/\beta$:



И останутся:

$$\xi_{у.в.к.}(t) = \mathcal{A} \cdot \cos(\Omega t - \alpha)$$

Установившиеся вынужденные колебания (у.в.к.)

$\mathcal{A}$ – *амплитуда установившихся вынужденных колебаний;*

Ω - *частота у.в.к.;*

α - *сдвиг фаз у.в.к.*

Замечания:

1) у.в.к.;

2) Ω;

3) "α"

4) $\mathcal{A}$ и α - **??**

1.3. Амплитуда и фаза установившихся вынужденных колебаний

??

Метод векторных диаграмм

!!

$$\xi(t) = \mathcal{A}\cdot\cos(\Omega t - \alpha)$$

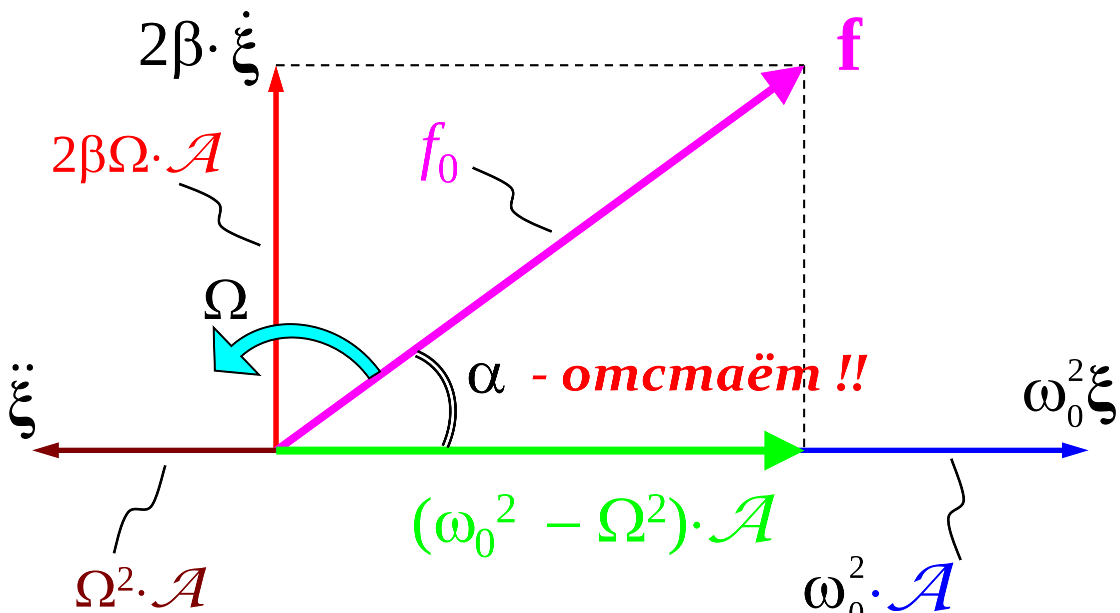
$$\dot{\xi}(t) = \mathcal{A}\Omega\cdot\cos(\Omega t - \alpha + \pi/2)$$

$$\ddot{\xi}(t) = \mathcal{A}\Omega^2\cdot\cos(\Omega t - \alpha + \pi)$$

Гармонические функции

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = f_0\cdot\cos(\Omega t)$$

“Урожай”



“Векторы-колебания”

1.4. Резонансные кривые. Резонанс

Теорема Пифагора: $\mathcal{A}^2 \cdot [(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2] = f_0{}^2 \quad \Rightarrow$

“Урожай”:

$$\mathcal{A}(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{2\beta\,\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

ω_0, β, f_0 - константы данной колебательной системы. Меняем Ω ! $\Rightarrow$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega)$$

!!

“Амплитудно-частотная” и
“фазо-частотная” зависимости

$$\alpha = \alpha(\Omega)$$

*“**Резонансные**”* ??

Ассимптотики:

$a)\ \Omega \ll \omega_0$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{\Omega\to 0} = \dfrac{f_0}{\omega_0^2}, \\ tg\alpha = \dfrac{2\beta\,\Omega}{\omega_0^2} \to 0,\ \ \alpha \to 0 \end{cases}$$

ассимптотика
“$\Omega \to 0$”
или “**нч**”

$б)\ \Omega \gg \omega_0$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\Omega) = \dfrac{f_0}{\Omega^2} \to 0 \\ \mathrm{tg}\alpha = \dfrac{-2\beta}{\Omega} \to -0,\ \ \ \alpha \to \pi \end{cases}$$

ассимптотика
“$\Omega \to \infty$”
или “**вч**”

ω_0, β, f_0 – константы данной колебательной системы ! $\Rightarrow$

$в)\ \mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega)$ и $\alpha = \alpha(\Omega)$

!!

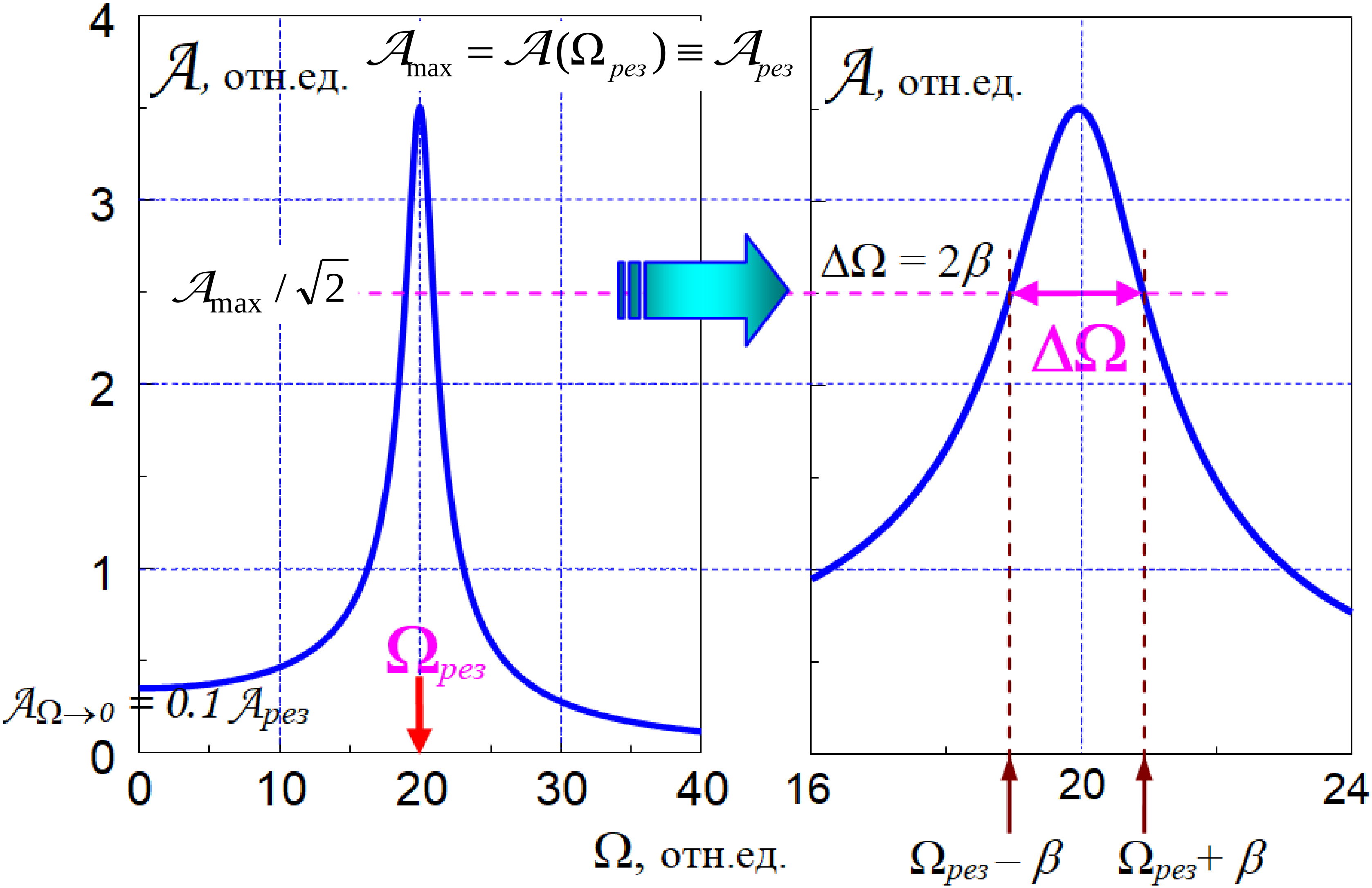
“Амплитудно-частотная” и
“фазо-частотная” зависимости

Зависимость с экстремумом !!

“***Резонансные***” **??**

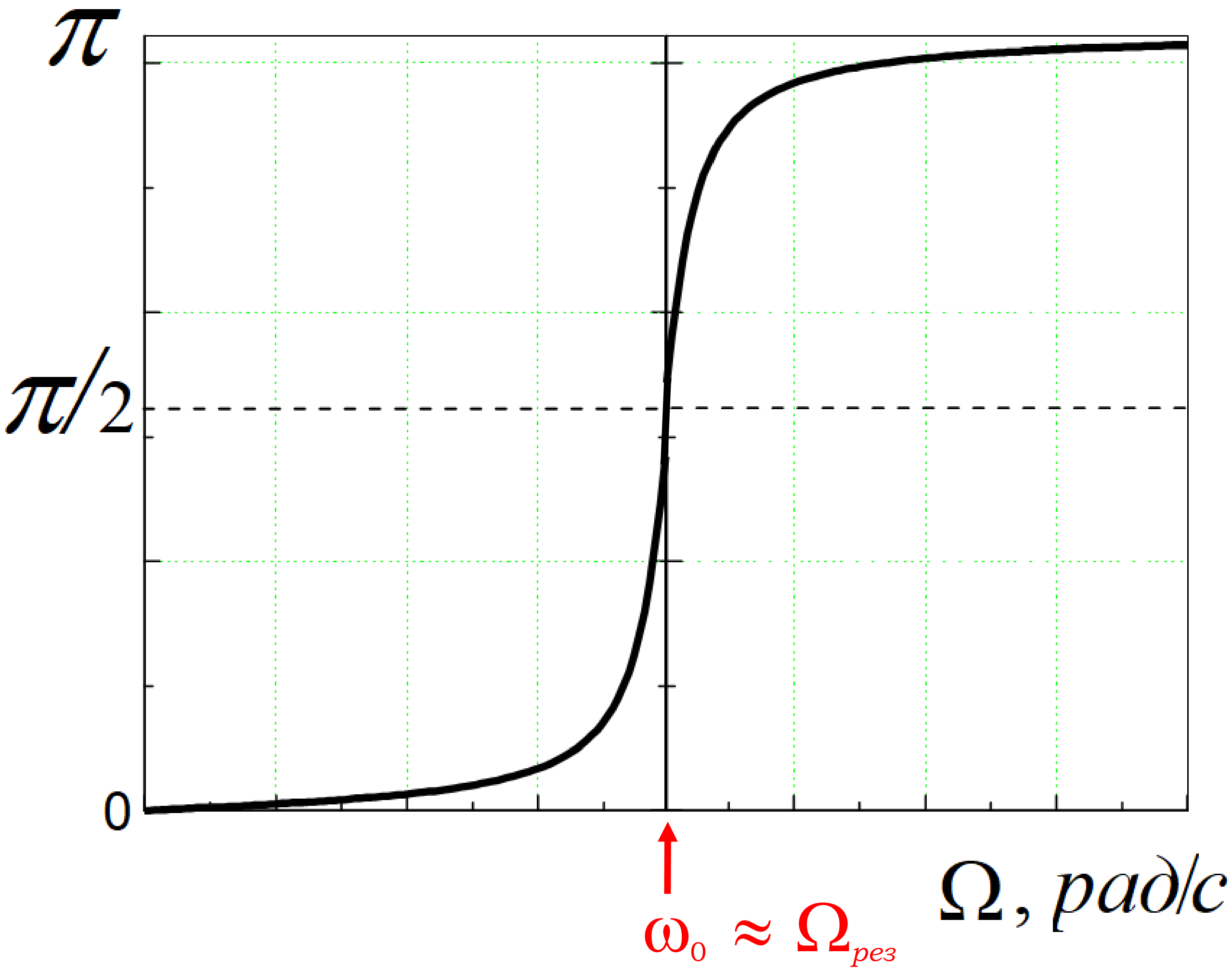
Амплитудная резонансная зависимость

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_c^2 - \beta^2}$$

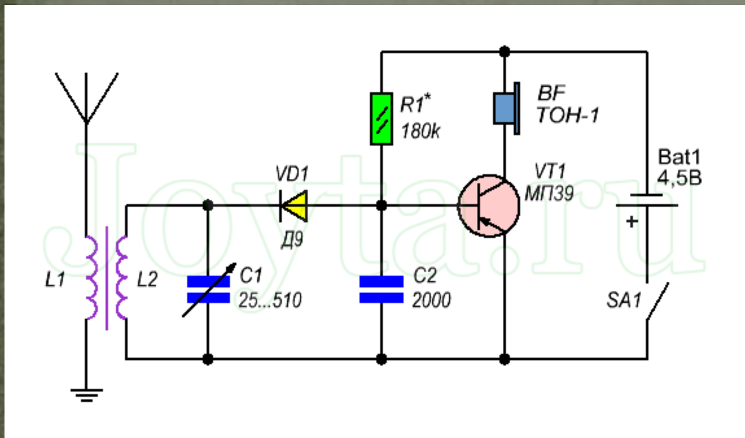


Фазовая частотная зависимость

$$\alpha = \alpha(\Omega)$$



О пользе резонанса



Ещё раз (ввиду важности): $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Omega)$

Зависимость с экстремумом !!

(*Опр.*) ***Резонанс*** – *явление, которое состоит в том, что амплитуда вынужденных колебаний оказывается максимальной при частоте внешнего воздействия, близкой к собственной частоте колебательной системы*

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_c^2 - \beta^2}$$

$$\mathcal{A}_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\omega_c}$$, а при $\beta << \omega_0$: $$\mathcal{A}_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\omega_0}$$

$$\mathrm{tg}\alpha_{рез} = \frac{\omega_0}{\beta}; \quad \alpha_{рез} \approx \frac{\pi}{2}$$

Rem: $\mathcal{A}_{\Omega\to 0} = \dfrac{f_0}{\omega_0^2}$,

(*Опр.*) *Добротность*

$$\frac{\mathcal{A}_р}{\mathcal{A}_{\Omega\to 0}} = \frac{\omega_0^2}{2\beta_c} \cong \frac{\omega_0}{2\beta} = Q$$ **?**

$$Q = \frac{\mathcal{A}_р}{\mathcal{A}_{\Omega\to 0}}$$

А ещё **?**

$$Q = \frac{\Omega_{рез}}{\Delta\Omega}$$ **!!**

$$\Delta\Omega = 2\beta$$

- Разрушение бокала звуком

… и моста Такома ветром

1.6. Мощность, затрачиваемая для поддержания вынужденных колебаний

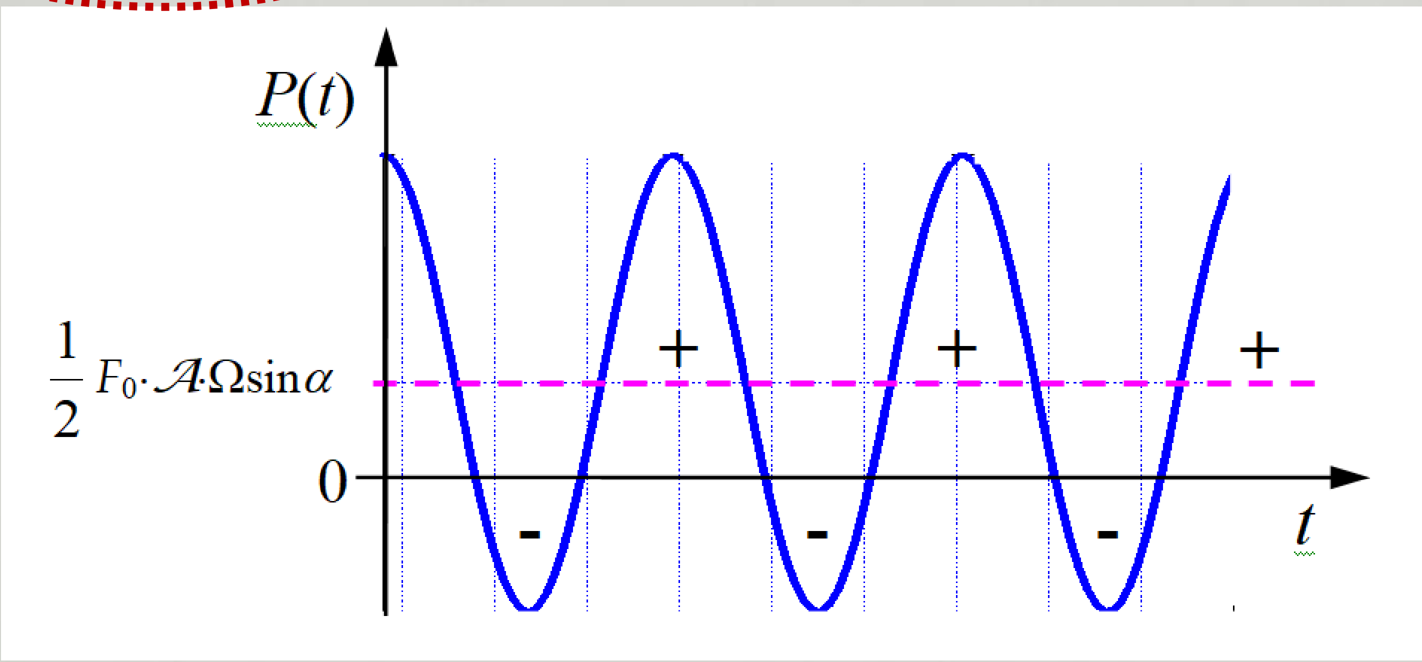
$$P(t) = F(t)\cdot\dot{\xi}(t)$$ *мгновенная* **!**

$$P(t) = F_0\cos(\Omega t)\cdot\mathcal{A}\cdot\Omega\cdot\cos(\Omega t-\alpha+\pi/2) =$$ **{ “сила” × “скорость” }**

для данной частоты Ω: **!**

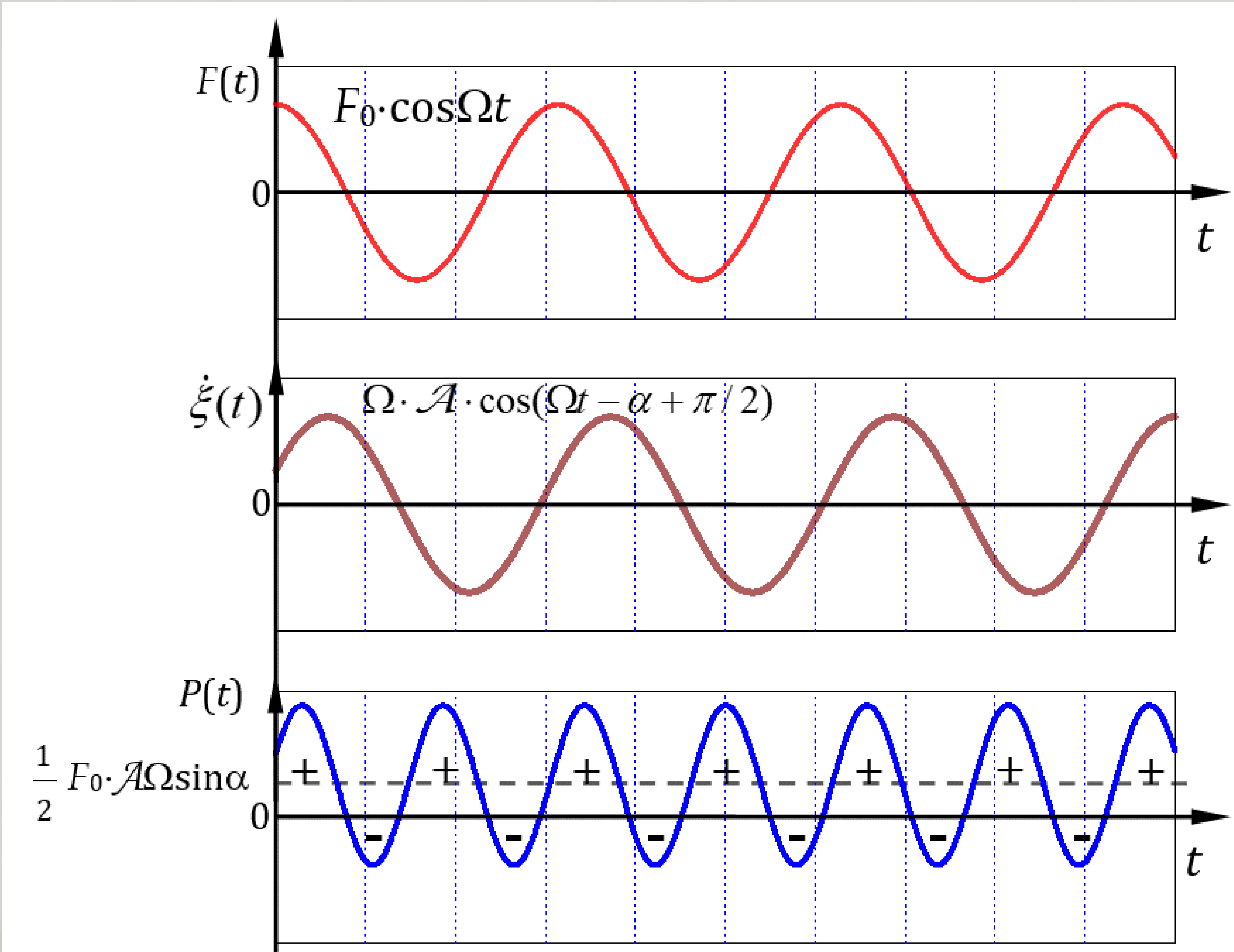
$$= \frac{1}{2}F_0\cdot\mathcal{A}\cdot\Omega\cdot\left[\underbrace{\cos(2\Omega t-\alpha+\pi/2)}_{\text{гармоническая функция времени с частотой } 2\Omega}+\underbrace{\cos(\alpha-\pi/2)}_{\text{константа}}\right]$$

!!



$$P(t)=\frac{1}{2}F_0\cdot\mathcal{A}\cdot\Omega\cdot\left[\underbrace{\cos(2\Omega t-\alpha+\pi/2)}_{\text{гармоническая функция времени с частотой } 2\Omega}+\underbrace{\cos(\alpha-\pi/2)}_{\text{константа !!}}\right]$$

!



"Источник" (сила / генератор) передаёт осциллятору "в единицу времени" энергию:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt$$

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}F_0\cdot\Omega\cdot\mathcal{A}\cdot\sin\alpha$$

за период: $\Delta W_T = \langle P\rangle\cdot T$

необратимо

("без-воз-мез-дно" ☺)

!

$$\mathcal{A}\cdot\sin\alpha \equiv \mathcal{A}_n$$

"Амплитуда поглощения"

Как $\langle P\rangle$ зависит от частоты Ω?

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{2}F_0\cdot\Omega\cdot\mathcal{A}\cdot\sin\alpha = \left\{ \sin\alpha = \frac{2\beta\cdot\Omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\Omega^2\right)^2+4\beta^2\Omega^2}};\quad \mathcal{A}(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}} \right\}$$

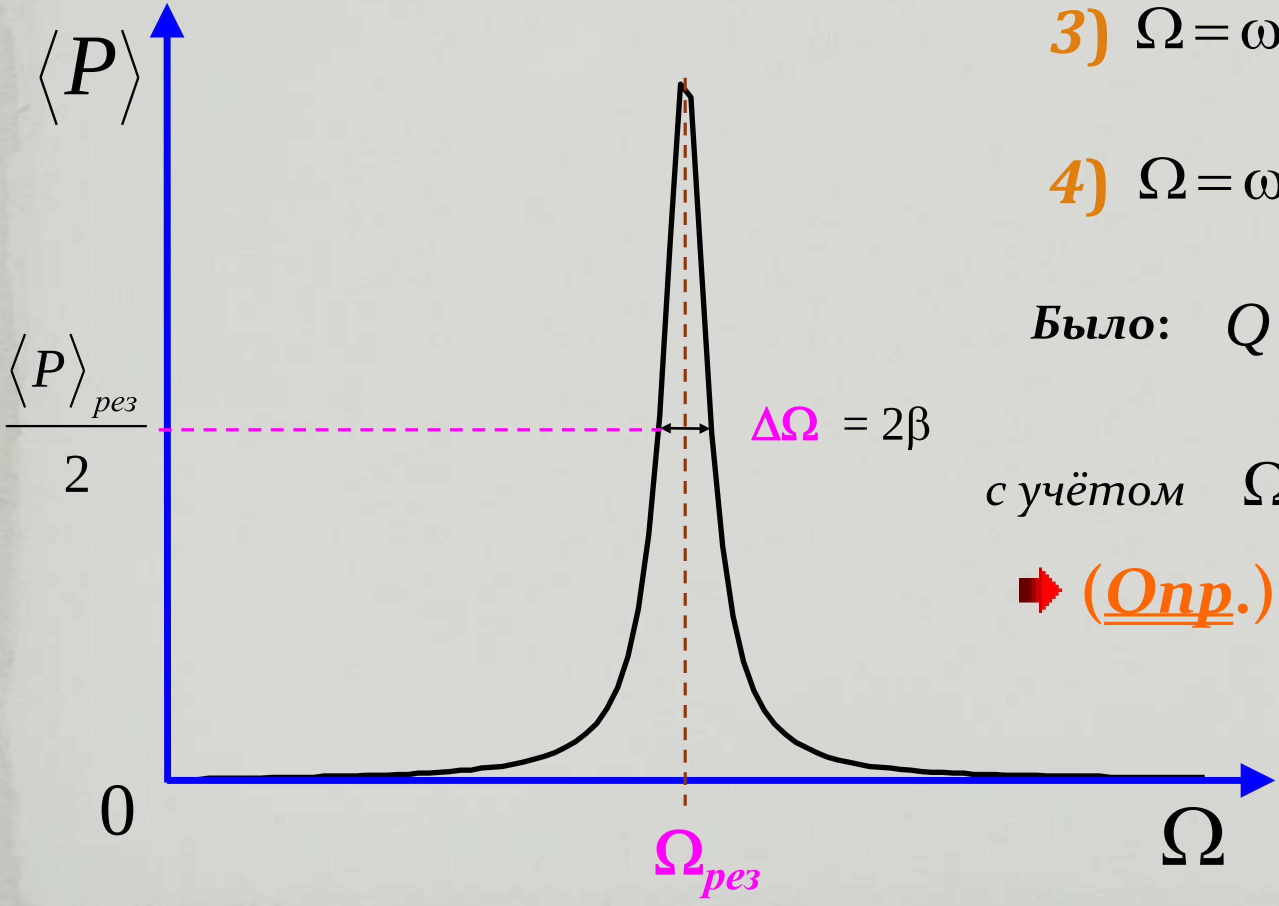
$$(\Omega^2-\omega_0^2)^2 = \left[(\Omega-\omega_0)\cdot\underbrace{(\Omega+\omega_0)}_{\approx 2\Omega}\right]^2 \approx (\Omega-\omega_0)^2\cdot 4\Omega^2 \dashrightarrow \sim \frac{\beta^2\Omega^2}{4(\Omega-\omega_0)^2\Omega^2+4\beta^2\Omega^2}$$

$$\langle P\rangle \sim \mathcal{R}(\Omega) = \frac{\beta^2}{(\Omega-\omega_0)^2+\beta^2}$$

1.7* "Лоренцева" функция формы линии (поглощения)

(в спектроскопии)

$$\mathcal{R}(\Omega) = \frac{\beta^2}{(\Omega - \omega_0)^2 + \beta^2}$$



1) $\Omega = \omega_0$, $\mathcal{R}(\Omega) = 1$

2) $\Omega = \omega_0 \pm \beta$, $\mathcal{R}(\Omega) = 0{,}5$

3) $\Omega = \omega_0 \pm 2\beta$, $\mathcal{R}(\Omega) = 0{,}2$

4) $\Omega = \omega_0 \pm 3\beta$, $\mathcal{R}(\Omega) = 0{,}1$

Было: $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$

с учётом $\Omega_{рез} \approx \omega_0$ и $2\beta = \Delta\Omega$

➡ (Опр.) ***Добротность***

$$\boxed{Q = \frac{\Omega_{рез}}{\Delta\Omega}}$$

Антракт

- Резонанс бокалов

… и моста Такома ветром

Приложение

Доска 1

$F_x(t) = F_0 \cdot \cos\Omega t$

Ω $\quad$ ω_0, ω_c — своб.

Ω — вынужд.

$$m\ddot{x} = -kx - r\cdot\dot{x} + F_0\cdot\cos\Omega t$$

$$\boxed{\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = f_0\cdot\cos\Omega t}$$

$2\beta = \dfrac{r}{m}$; $\quad \omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ $\quad\quad f_0 = \dfrac{F_0}{m}$;

неоднородное диф. ур-ие

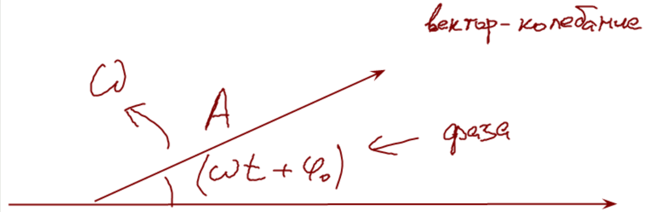
→ „математика": общ. реш. однор. д.у. + частн. неоднор.

→ „физика" $\quad A_0 e^{-\beta t}\cdot\cos(\omega_c t + \varphi_0) + \underbrace{A\cdot\cos(\Omega t - \alpha)}_{\text{у.в.к.}}$ ← !

$t \gg \tau_A = 1/\beta$ собств. затух. $\to 0$!

Приложение

Доска 2



$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}}$$

$$f_0^2 = (\omega_0^2-\Omega^2)^2\cdot A^2 + 4\beta^2\Omega^2\cdot A^2$$

$$\boxed{A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}}}$$

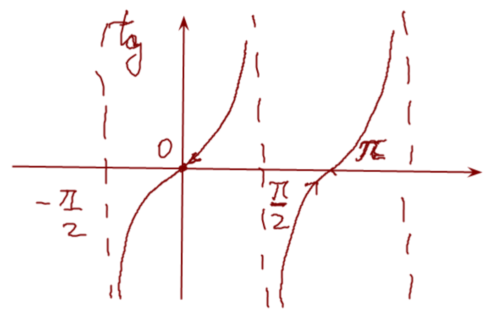
Доска 3

НЧ

1). $\underline{\Omega \ll \omega_0}$

$$A_{\Omega\to 0} = \frac{f_0}{\omega_0^2} - const;$$

$$\operatorname{tg}\alpha \sim \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2} \to 0;$$



$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}} \qquad \sim \frac{2\beta}{-\Omega}$$

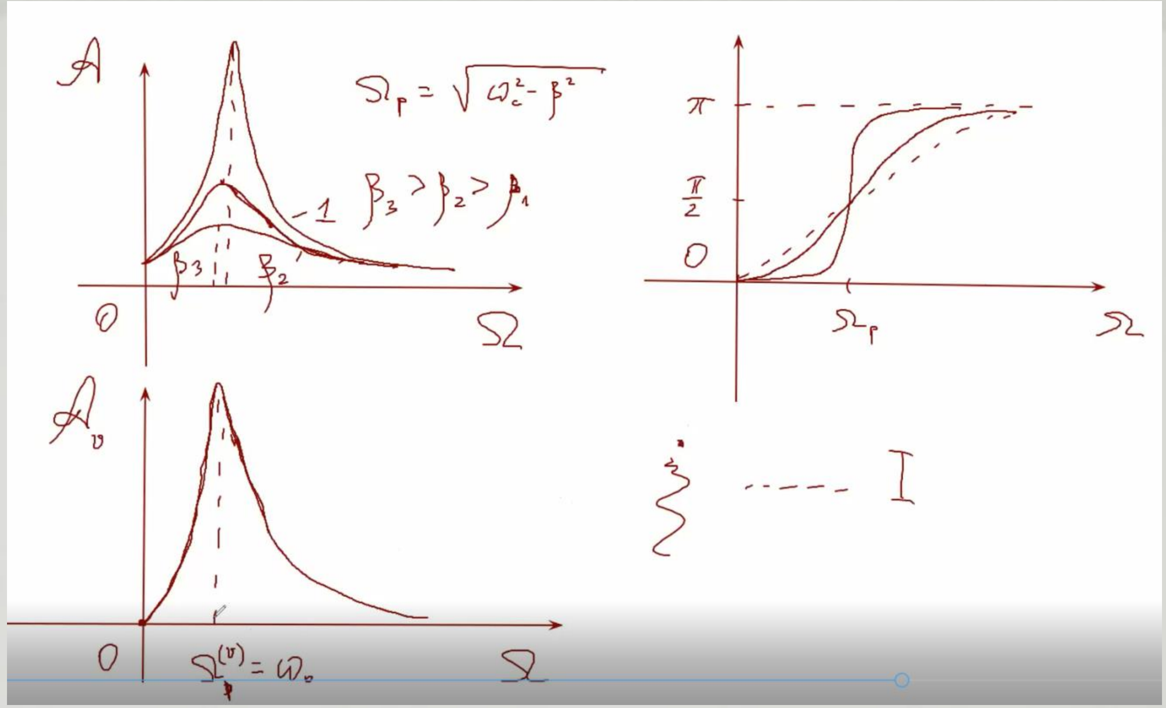
$$\operatorname{tg}\alpha \to -0!$$

2) ВЧ

$$\Omega \gg \omega_0; \quad A_{\Omega\to\infty} \sim \frac{f_0}{\Omega^2} \to 0; \quad \alpha - ?$$

Приложение

Доска 4



Доска 5