Лекция 5. Вынужденные колебания – мощность. Переменный ток

"Источник" (сила / генератор) передаёт осциллятору "в единицу времени" энергию:

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt$$

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}F_0\cdot\Omega\cdot\mathcal{A}\cdot\sin\alpha$$

за период: $\Delta W_T = \langle P\rangle\cdot T$

необратимо

("без-воз-мез-дно" ☺)

!

$$\mathcal{A}\cdot\sin\alpha \equiv \mathcal{A}_n$$

"Амплитуда поглощения"

Как $\langle P\rangle$ зависит от частоты Ω?

(для данного осциллятора при постоянной амплитуде F_0 !)

$$\langle P(t)\rangle = \frac{1}{2}F_0\cdot\Omega\cdot\mathcal{A}\cdot\sin\alpha = \left\{ \sin\alpha = \frac{2\beta\cdot\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}};\quad \mathcal{A}(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2}} \right\}$$

$$(\Omega^2-\omega_0^2)^2 = \left[(\Omega-\omega_0)\cdot\underbrace{(\Omega+\omega_0)}\right]^2 \approx (\Omega-\omega_0)^2\cdot 4\Omega^2 \quad \sim \frac{\beta^2\Omega^2}{4(\Omega-\omega_0)^2\Omega^2+4\beta^2\Omega^2}$$

Вблизи резонанса: $\approx 2\Omega$

$$\langle P\rangle \sim \mathcal{R}(\Omega) = \frac{\beta^2}{(\Omega-\omega_0)^2+\beta^2}$$

1.7* “Лоренцева” функция формы линии (поглощения)

(в спектроскопии)

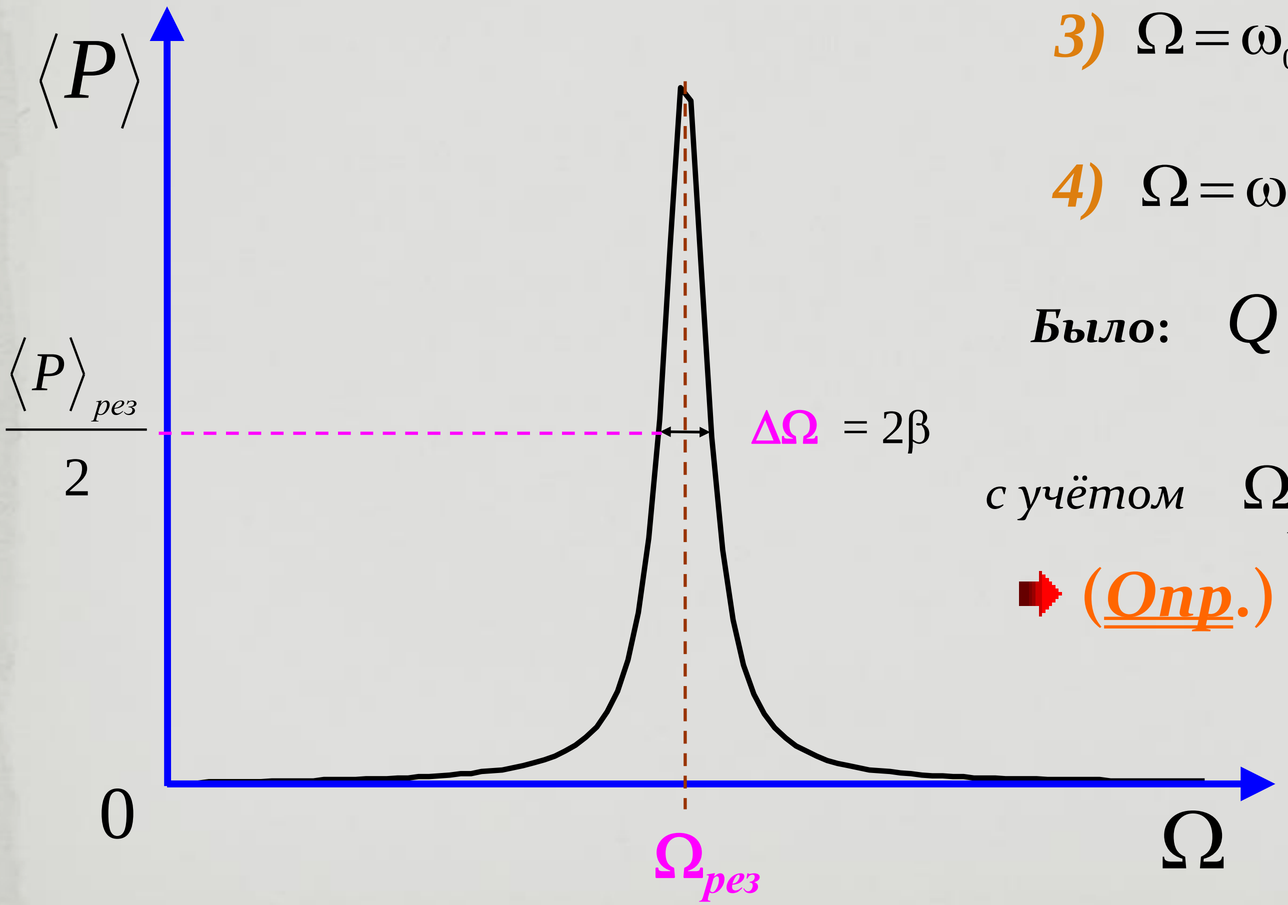
$$\mathcal{R}(\Omega)=\frac{\beta^2}{(\Omega-\omega_0)^2+\beta^2}$$

1) $\Omega=\omega_0$, $\mathcal{R}(\Omega)=1$

2) $\Omega=\omega_0\pm\beta$, $\mathcal{R}(\Omega)=0{,}5$

3) $\Omega=\omega_0\pm2\beta$, $\mathcal{R}(\Omega)=0{,}2$

4) $\Omega=\omega_0\pm3\beta$, $\mathcal{R}(\Omega)=0{,}1$



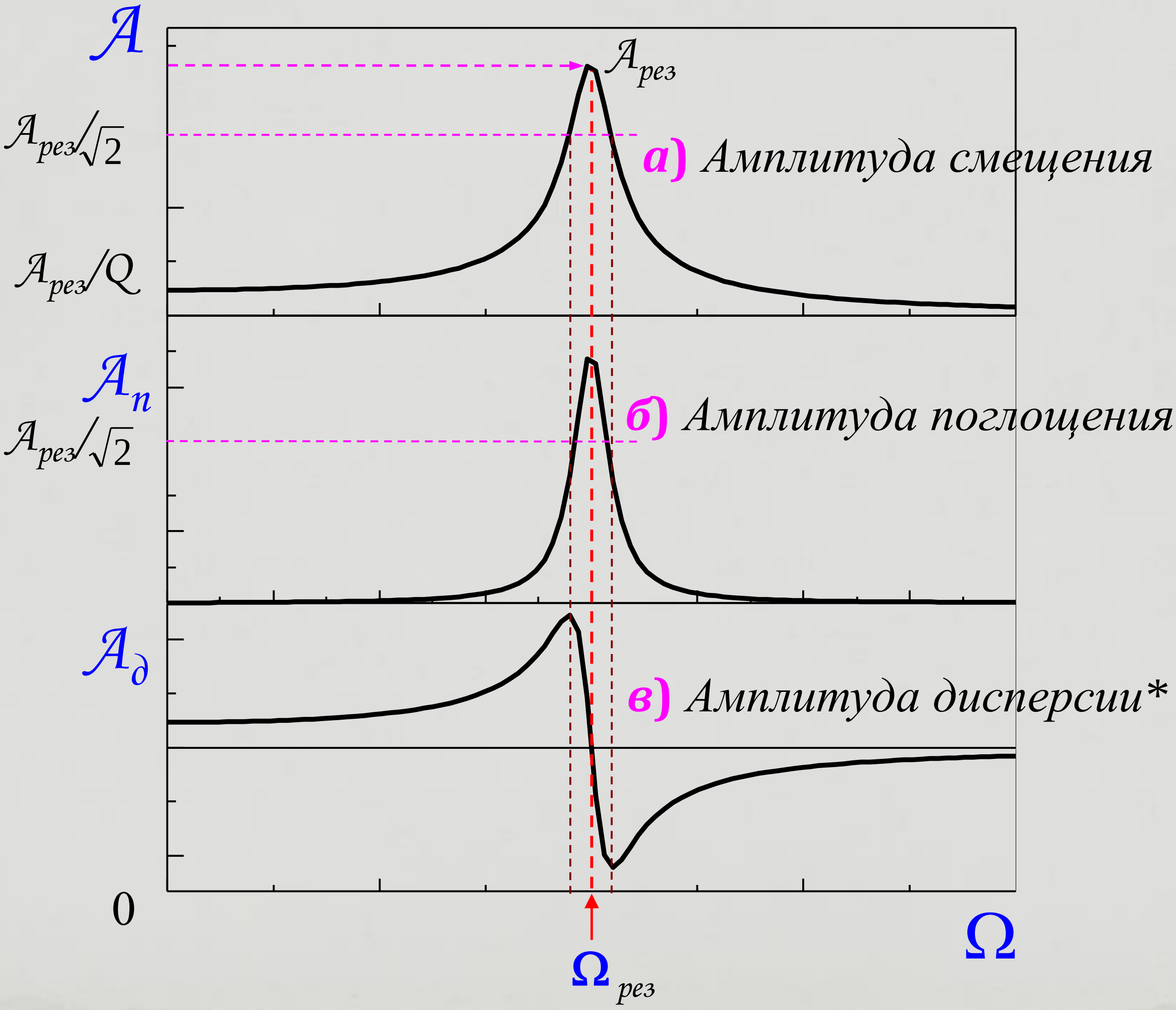
Было: $Q=\dfrac{\omega_0}{2\beta}$

с учётом $\Omega_{рез}\approx\omega_0$ и $2\beta=\Delta\Omega$

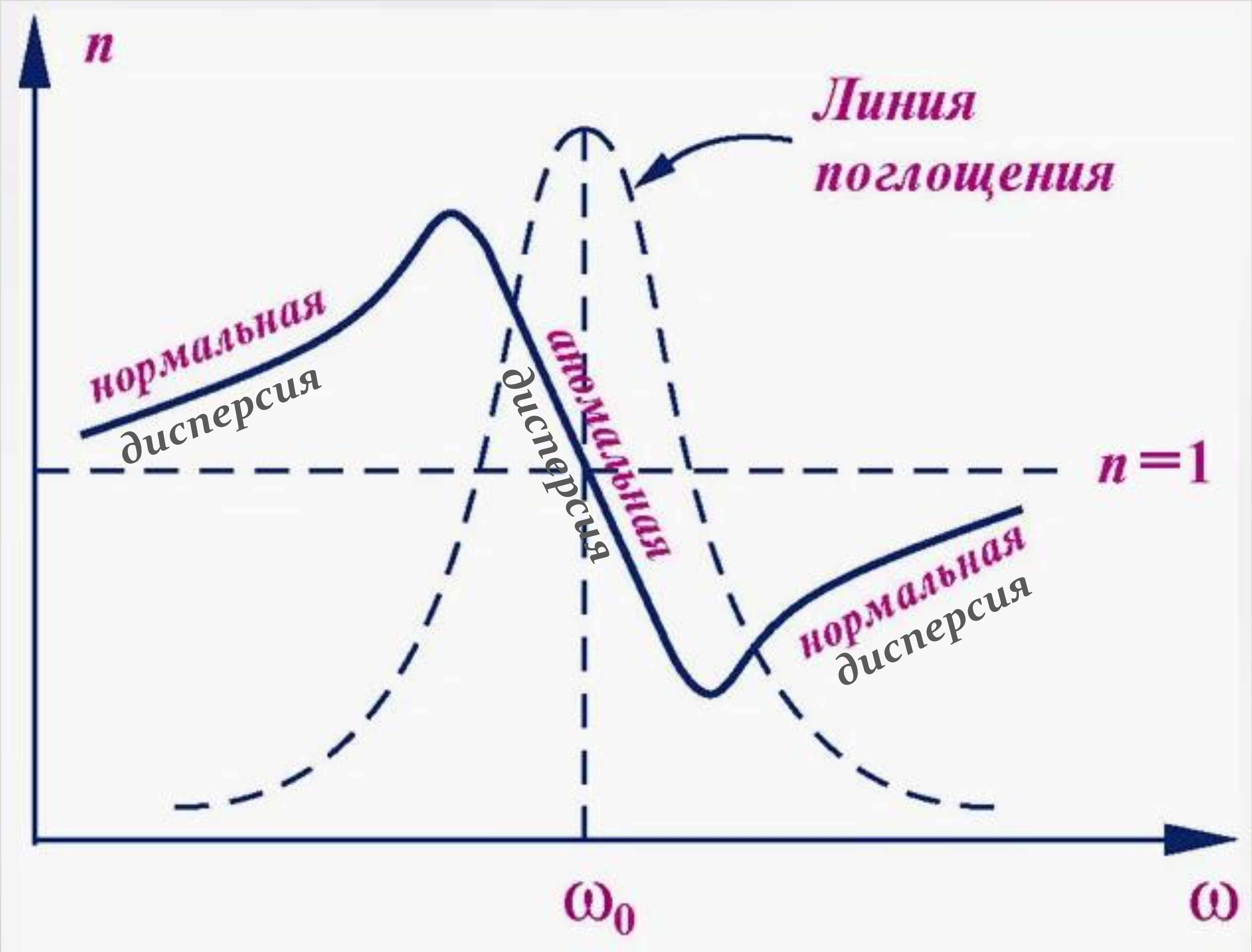
➨ (**Опр.**) ***Добротность***

$$\boxed{Q=\frac{\Omega_{рез}}{\Delta\Omega}}$$

Амплитудные резонансные зависимости



Дисперсионная зависимость показателя преломления от частоты



1.8. Вынужденные колебания в системе связанных осцилляторов

1) ***частоты мод $\Rightarrow$ резонансные частоты;***

(проявляются в спектрах)

2) ***у мод разная добротность $\Rightarrow$ … ;***

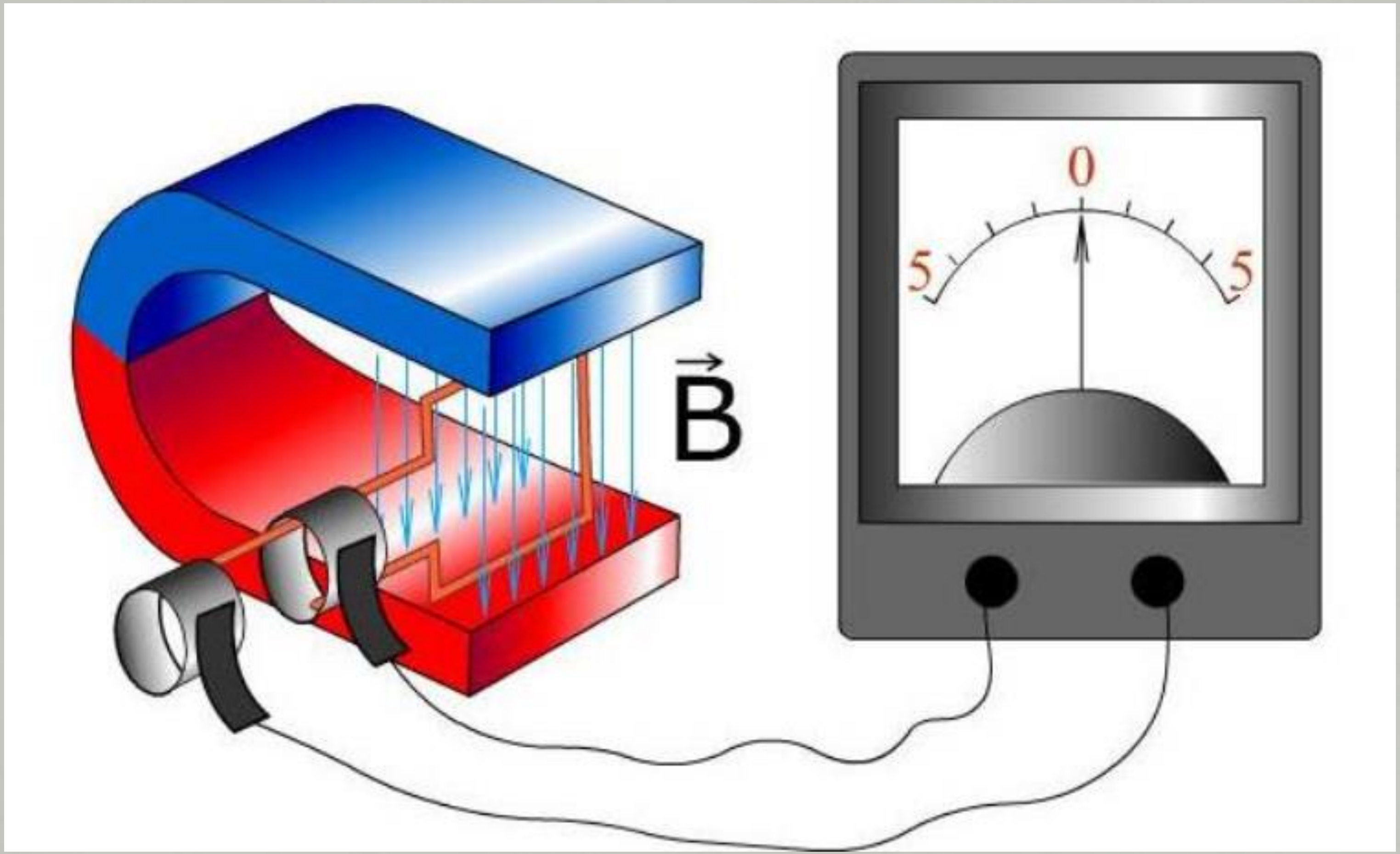
(ширина линий)

3) ***рост затухания $\Rightarrow$ …***

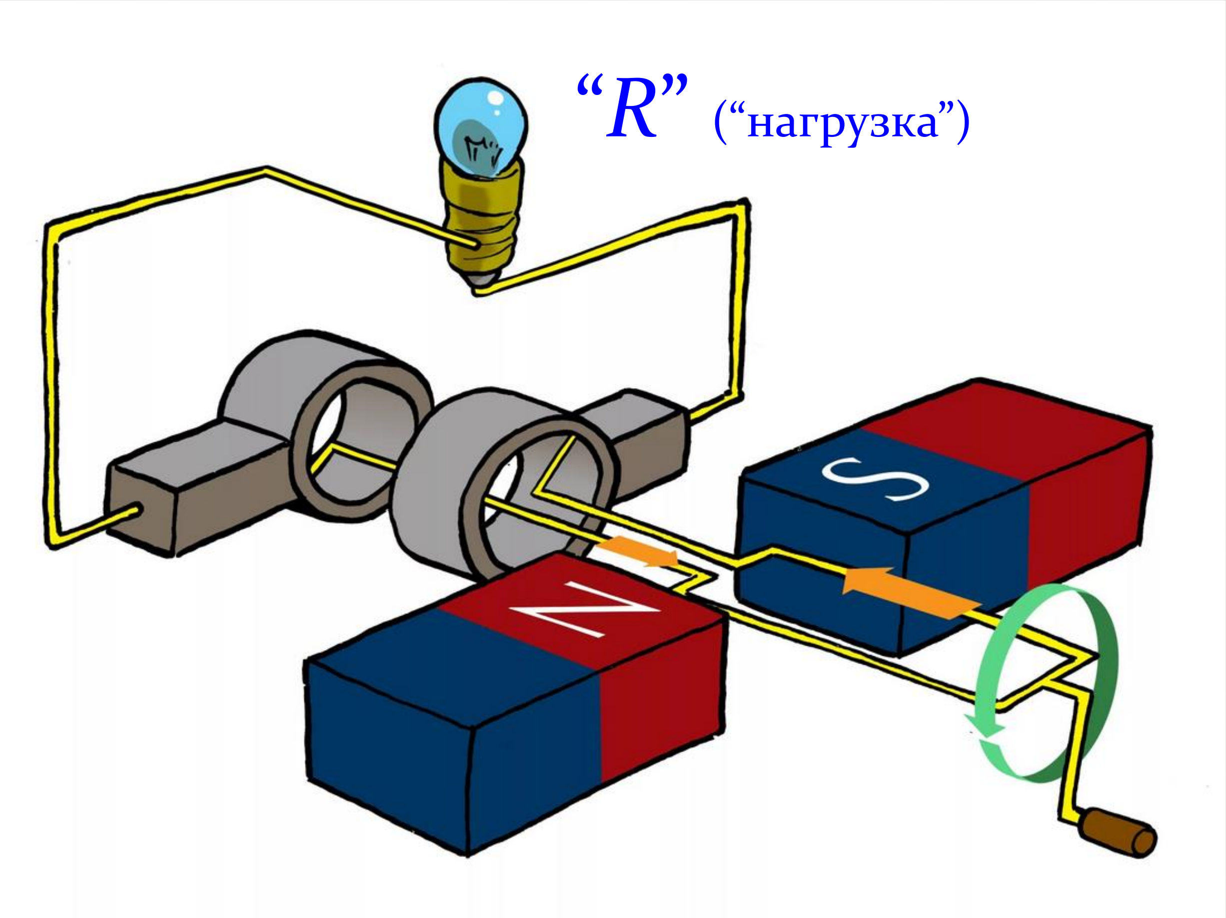
(переход линий в полосы, перекрытие, усложнение спектров …)

§ 2. Вынужденные колебания в электрических цепях. Переменный ток

2.1. Генератор переменного тока



Генератор переменного тока



$$\Phi(t) = BS \cdot \cos\alpha(t) = BS \cdot \cos(\Omega t)$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \Omega \cdot BS \cdot \sin(\Omega t)$$

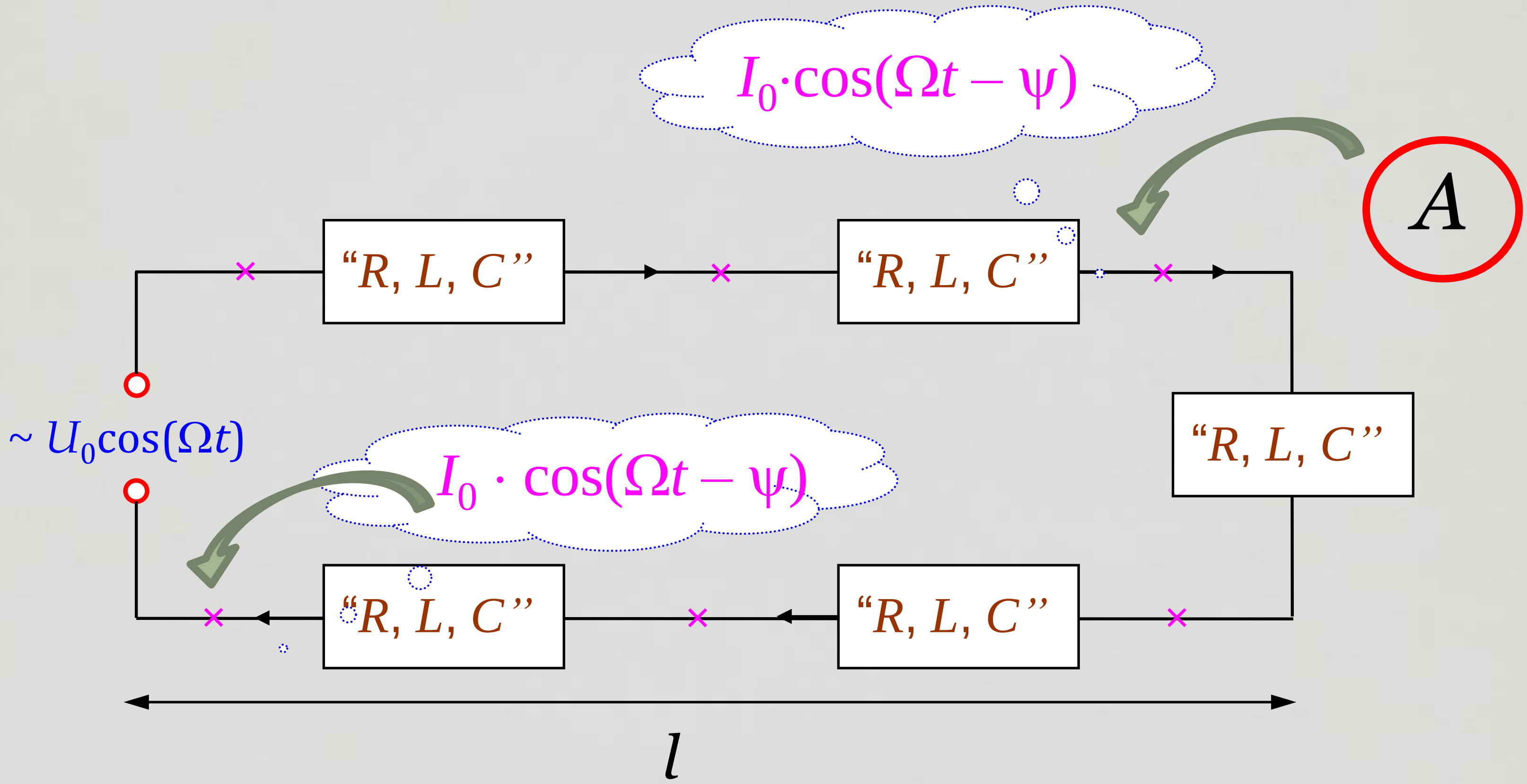
$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{\Omega BS}{R} \cdot \sin(\Omega t)$$

Далее будем писать: $\mathcal{E}(t) \equiv U(t)$

2.2. Условие квазистационарности

(«мягкое» ограничение)

“Длинная” цепь переменного тока



$$\tau = \frac{l}{c} << T \quad \Rightarrow \quad l << cT$$

Бытовая сеть переменного тока

(посмотрим, что у нас в розетке?)

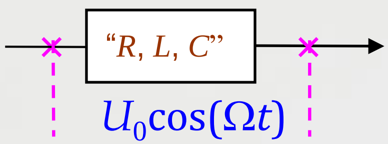
ν = 50 *Гц*

T = 20 *мс*

U = 220 *В* ??

2.3. Закон Ома для участка цепи переменного тока

$$I(t) = I_0\cos(\Omega t - \psi)$$



$$\boxed{Z = \frac{U_0}{I_0}}$$

(**Опр.**) *Отношение* ***амплитуды*** *напряжения к* ***амплитуде*** *силы тока называется полным сопротивлением участка цепи переменного тока*

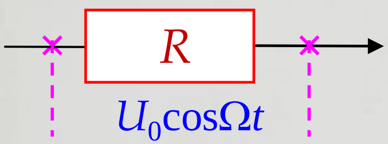
- **Закон Ома для участка цепи переменного тока** *состоит в том, что* ***амплитудное значение*** *силы переменного тока* ***прямо пропорционально амплитудному значению*** *приложенного к участку цепи напряжения:*

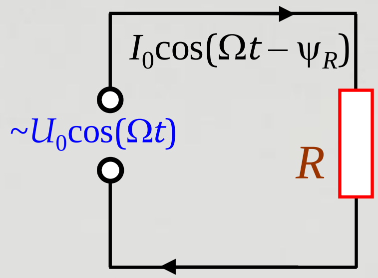
$$I_0 = \frac{U_0}{Z}$$

2.4. Простые примеры

2.4.1. “*R*”

$I(t) = I_0\cos(\Omega t - \psi_R)$





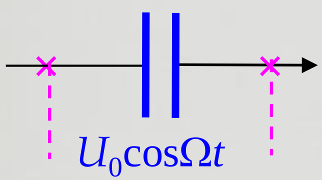
$$U_0\cdot\cos(\Omega t) = R\cdot I_0\cdot\cos(\Omega t - \psi_R)$$

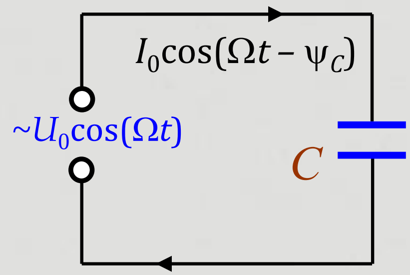
$$\psi_R = 0 \qquad I_R(t) = \frac{U_0}{R}\cdot\cos(\Omega t)$$

Совпадает ! (фаза)

2.4.2. “*C*”

$I(t) = I_0\cos(\Omega t - \psi_C)$





$$I(t) = \Omega C U_0\cdot\cos(\Omega t + \pi/2)$$

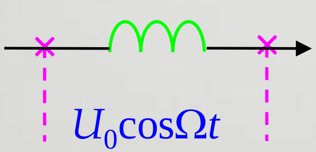
$$\psi_C = -\frac{\pi}{2}$$

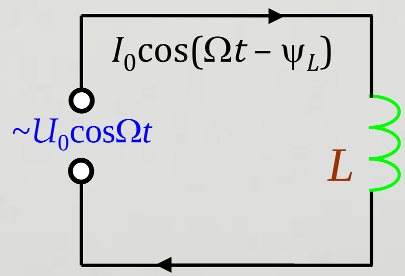
$$X_C = \frac{1}{\Omega C}$$

Опережает !

2.4.3. “*L*”

$I(t) = I_0\cos(\Omega t - \psi_L)$





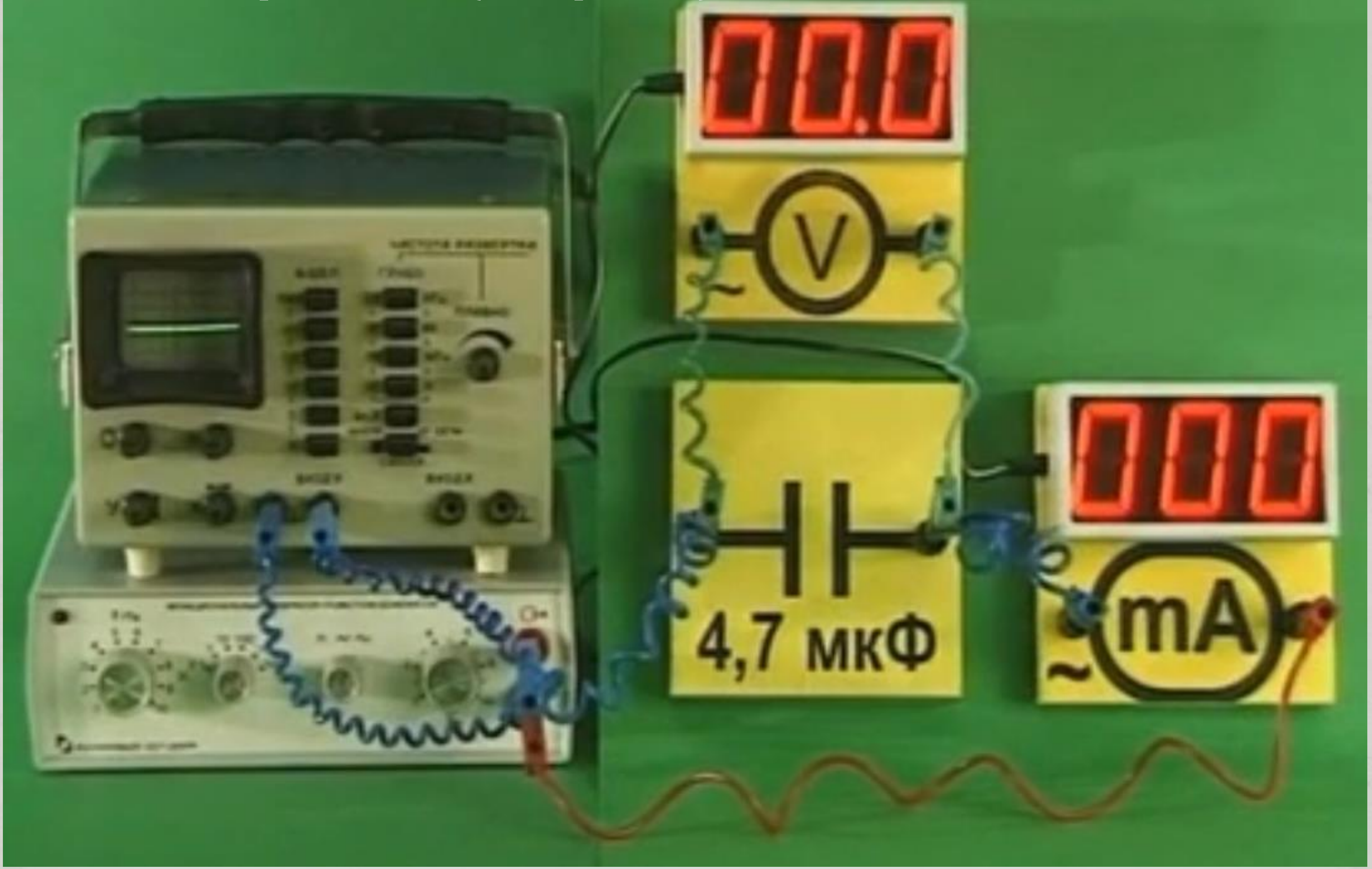
$$I(t) = \frac{U_0}{\Omega L}\cdot\sin(\Omega t - \pi/2)$$

$$\psi_L = +\frac{\pi}{2}$$

$$X_L = \Omega L$$

Отстаём !

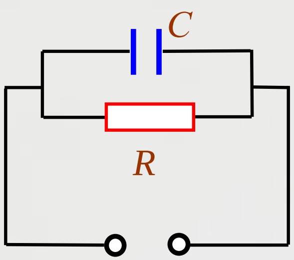
Ёмкостное сопротивление (эксперимент)



2.5. Более сложные цепи

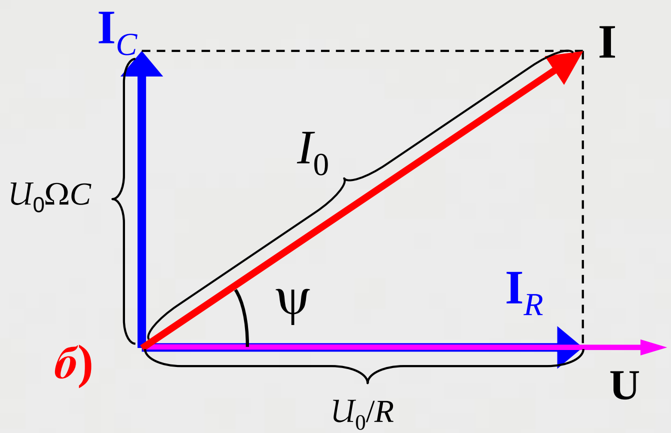
2.5.1. “*RC*”

Строим “векторы-колебания” **!**



~$U_0\cos(\Omega t)$

а)



б)

$$I_0^2 = \left(\frac{U_0}{R}\right)^2 + (U_0 \cdot \Omega C)^2$$

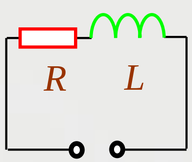
$$I_0 = \frac{U_0}{R} \cdot \sqrt{1 + (R\Omega C)^2}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\Omega C}{1/R} = R\Omega C$$

$I_R(t) = \ldots$; $I_C(t) = \ldots$; $I(t) = \ldots$

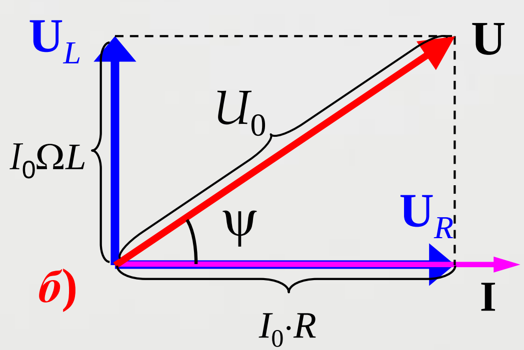
$Z = \ldots$

2.5.2. “*RL*”



~$U_0\cos(\Omega t)$

а)



б)

$$\begin{cases} U_R(t) = \ldots \\ U_L(t) = \ldots \\ I(t) = \ldots \\ Z = \ldots \end{cases}$$

?? *Д.З.*

2.6. Мощность в цепи переменного тока. Действующие (эффективные) значения силы тока и напряжения

2.6.1. Участок с резистором

$$P(t) = U_0 \cdot I_0 \cdot \cos^2(\Omega t)$$

$$P(t) = \frac{1}{2} U_0 \cdot I_0 \cdot [1 + \cos(2\Omega t)]$$

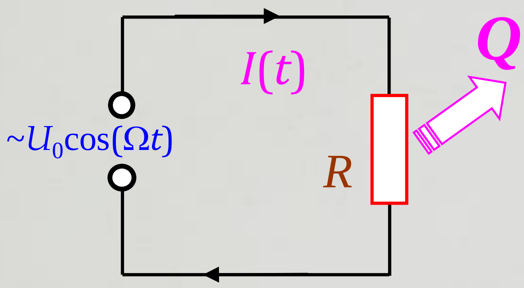


Рис. Участок с резистором

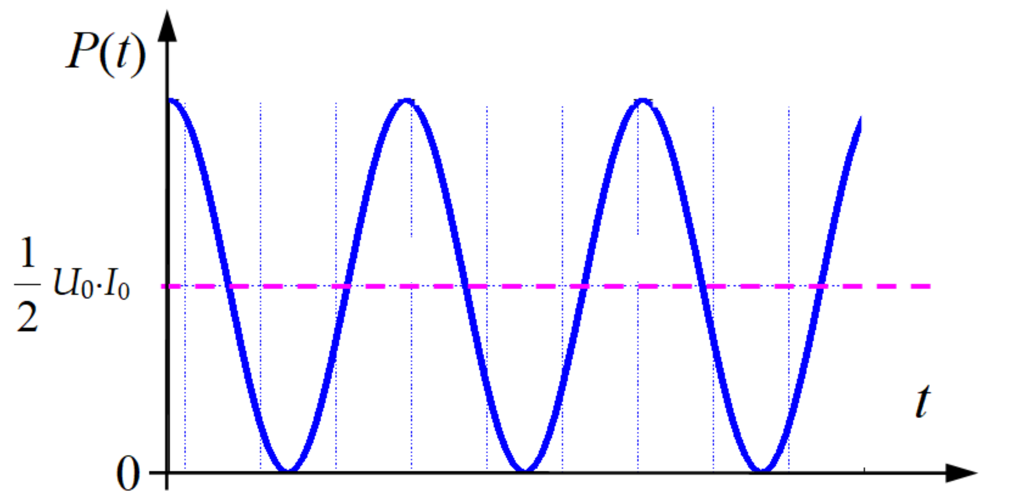


Рис. Мгновенная мощность на резисторе

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0 \quad \text{или} \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R$$

$$\langle P \rangle = U_\partial \cdot I_\partial$$

$$\langle P \rangle = I_\partial^2 \cdot R \quad \Rightarrow$$

$$I_\partial = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$U_\partial = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

НО !

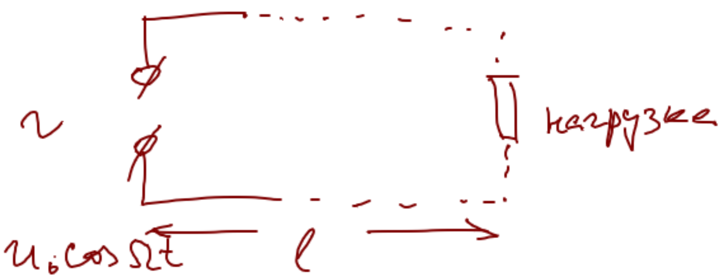
Рис. Пилообразное напряжение.

$$I_\partial^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)dt \qquad U_\partial^2 = \frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)dt$$

$$I_\partial = \frac{I_0}{\sqrt{3}}$$

(Задача 6.2)

Доска 1



$2\pi\nu = \Omega$

$\nu = 50$ Гц, $\to T = \frac{1}{\nu} = 20$ мс $= 2\cdot10^{-2}$ с

$c\cdot T = 3\cdot10^{8}$ м/с $\cdot\, 2\cdot10^{-2}$ с $= 6\cdot10^{6}$ м $= \underline{\underline{6000 \text{ км}}}$

ν … кГц, МГц, ГГц $\qquad l \ll$ …

ВЧ СВЧ

Доска 2

Rем:

$I \sim (\varphi_1 - \varphi_2)$

(Опр.) $R = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{I}$;

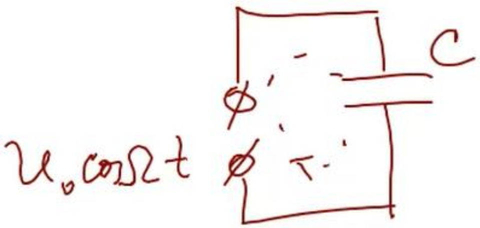
$I_0 \cos(\Omega t - \varphi)$

$$\frac{U_0 \cdot \cos \Omega t}{I_0 \cdot \cos(\Omega t - \varphi)} = f(t) \neq \text{const}$$

$$\frac{U_0}{I_0} = \text{const} \xRightarrow{\text{(Опр.)}} \boxed{Z = \frac{U_0}{I_0}}$$

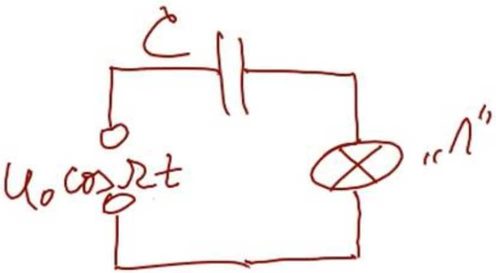
З-н Ома: $I_0 \sim U_0$, (Ω) $\boxed{I_0 = \dfrac{U_0}{Z}}$

Доска 3



$$U_0\cos\Omega t = \frac{q}{C};$$

$$q(t) = C\cdot U_0\cdot\cos\Omega t$$



$$I(t) = \frac{dq}{dt} = -\Omega C U_0 \sin\Omega t =$$

$\Omega\nearrow$ НЧ – не горит

→ $\Omega\uparrow$ ВЧ горит

$$= \underbrace{\Omega C U_0}_{I_0}\cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I(t) = I_0\cos(\Omega t - \varphi_c)$$

$$\varphi_c = -\frac{\pi}{2}$$

$$Z_c = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\Omega C}.$$

$I_c(t)$ Опережает $U_c(t)$

$$\boxed{X_c = \frac{1}{\Omega C}}$$

Доска 4

$u_0\cos\Omega t$

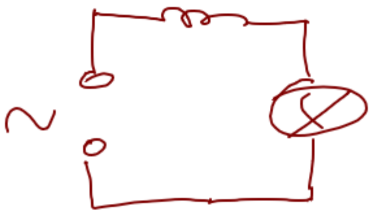
$I_0\cos(\Omega t-\varphi_L)$

$$u_0\cos\Omega t - \underbrace{L\cdot\frac{dI}{dt}}_{\varepsilon_{si}} = 0$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{u_0}{L}\cos\Omega t \quad \Big|\ \int$$

$$I(t) = \frac{u_0}{\Omega L}\sin\Omega t =$$

$$= \frac{u_0}{\Omega L}\cdot\cos\left(\Omega t-\frac{\pi}{2}\right)$$



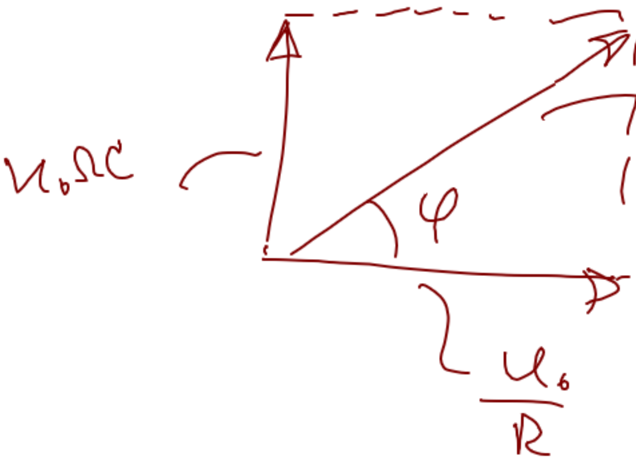
$\Omega\uparrow$ гаснет

$$Z_L = \frac{u_{0L}}{I_{0L}} = \Omega L$$

$$\boxed{X_L = \Omega L}$$

$\varphi_L = +\frac{\pi}{2}$ $I_L(t)$ отстаёт от $u_L(t)$!

Доска 5



$$U_0\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+(\Omega C)^2} = I_0$$

$$\boxed{I_0 = \frac{U_0}{R}\sqrt{1+R^2\Omega^2C^2}}$$

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1+R^2\Omega^2C^2}}$$

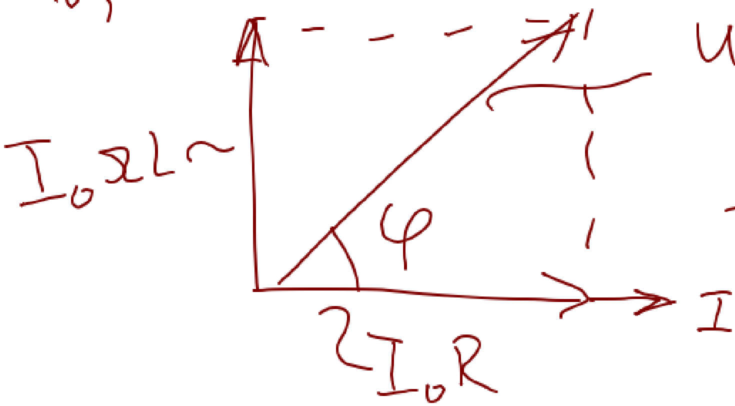
$$U(t) = U_0\cos\Omega t$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Omega C}{1/R} = R\Omega C$$

$$\boxed{I(t) = \frac{U_0}{R}\sqrt{1+\Omega^2R^2C^2}\cdot\cos\left(\Omega t + \operatorname{arctg} R\Omega C\right)}$$

Доска 6

Дано: U_0, R, L, Ω



$$U_0 = I_0 \cdot \sqrt{R^2 + \Omega^2 L^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Omega L}{R}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \Omega^2 L^2}}$$

$$U_R(t) = I_0 R \cdot \cos\left(\Omega t - \operatorname{arctg} \frac{\Omega L}{R}\right)$$

$$U_L = I_0 \cdot \Omega L \cdot \cos\left(\Omega t - \operatorname{arctg} \frac{\Omega L}{R} + \frac{\pi}{2}\right)$$

. . .

$Z =$