Лекция 6. Упругие волны

2.6. Мощность в цепи переменного тока. Действующие (эффективные) значения силы тока и напряжения

2.6.1. Участок с резистором

$$P(t) = U_0 \cdot I_0 \cdot \cos^2(\Omega t)$$

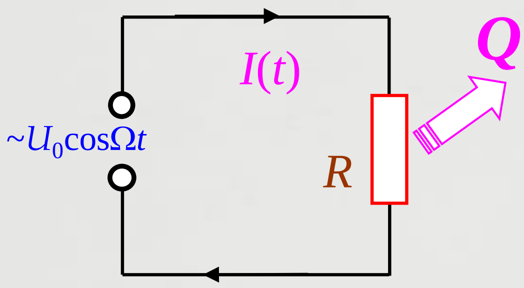


Рис. Участок с резистором

$$P(t) = \frac{1}{2} U_0 \cdot I_0 \cdot [1 + \cos(2\Omega t)]$$

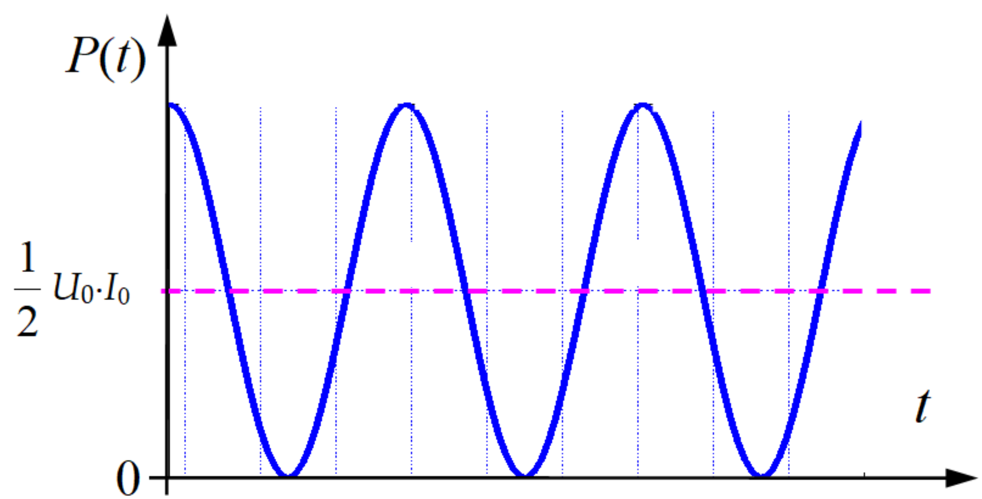


Рис. Мгновенная мощность на резисторе

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} U_0 I_0$$ **или** $$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R$$

$$\langle P \rangle = U_\partial \cdot I_\partial$$

$$\langle P \rangle = I_\partial^2 \cdot R \quad \Rightarrow$$

$$I_\partial = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

$$U_\partial = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

НО !

Рис. Пилообразное напряжение.

$$I_\partial^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)dt \qquad U_\partial^2 = \frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)dt$$

$$I_\partial = \frac{I_0}{\sqrt{3}}$$

(Задача 6.2)

2.7. Общий случай. Участок с элементами *R, L, C*

$$P(t) = U_0\cos(\Omega t)\cdot I_0\cos(\Omega t - \psi) \quad\Rightarrow\quad P(t) = \frac{1}{2}U_0\cdot I_0\cdot[\cos\psi + \cos(2\Omega t - \psi)]$$

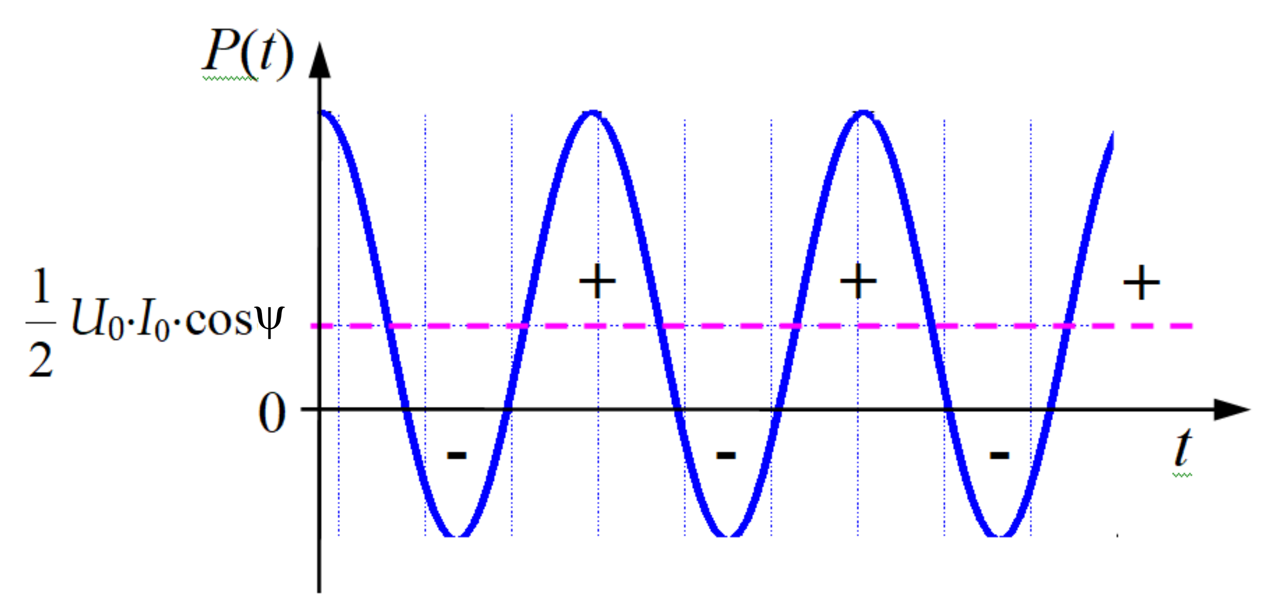


Рис. Мгновенная мощность на участке «цепи *RLC*»

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}U_0\cdot I_0\cdot\cos\psi$$

$$\langle P\rangle = I_д\cdot U_д\cdot\cos\psi$$

♣ ***Замечания***

$\cos\psi$ – «***коэффициент мощности***»

1) $\psi = \pm\frac{\pi}{2},\ \langle P\rangle = 0$

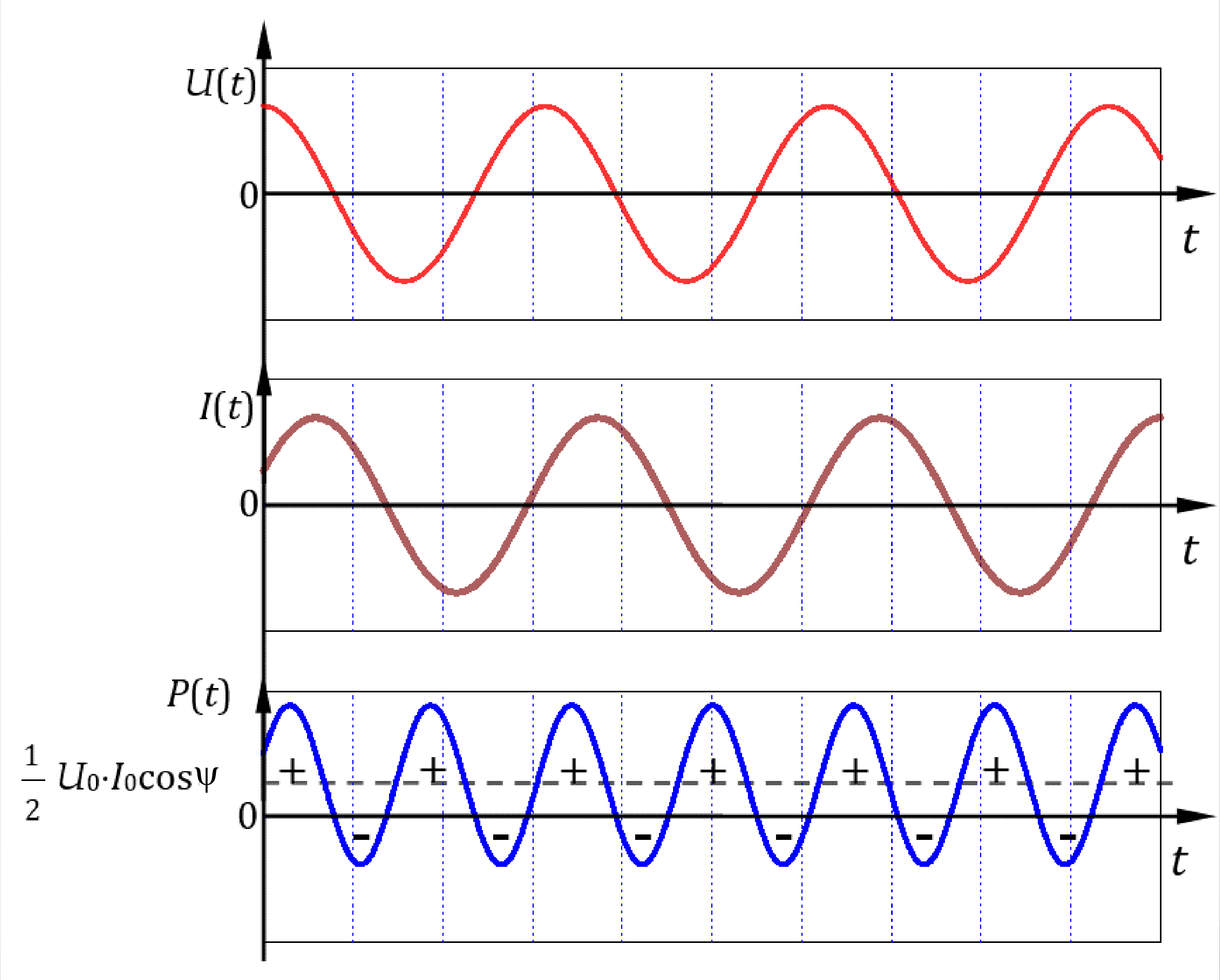
2) $\psi \neq \pm\frac{\pi}{2},\ \langle P\rangle = I_д\cdot U_д\cdot\cos\psi$

(***Опр.***) ***Активное сопротивление***:

$$\langle P\rangle = I_д^2\cdot R_a \quad\Rightarrow\quad R_a = \frac{\langle P\rangle}{I_д^2}$$

$(R_a = Z\cdot\cos\psi)$

$$P(t) = \frac{1}{2} U_0 \cdot I_0 \cdot [\cos\psi + \cos(2\Omega t - \psi)]$$



§ 3. Резонансные явления в цепях переменного тока

3.1. Последовательный “*RLC* “- контур

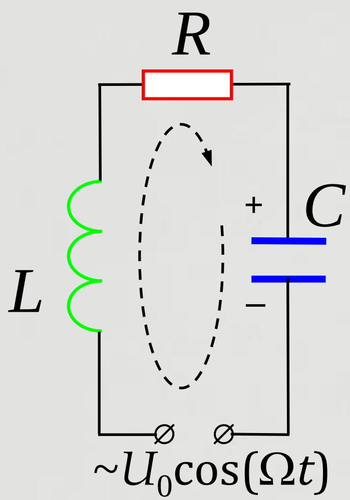
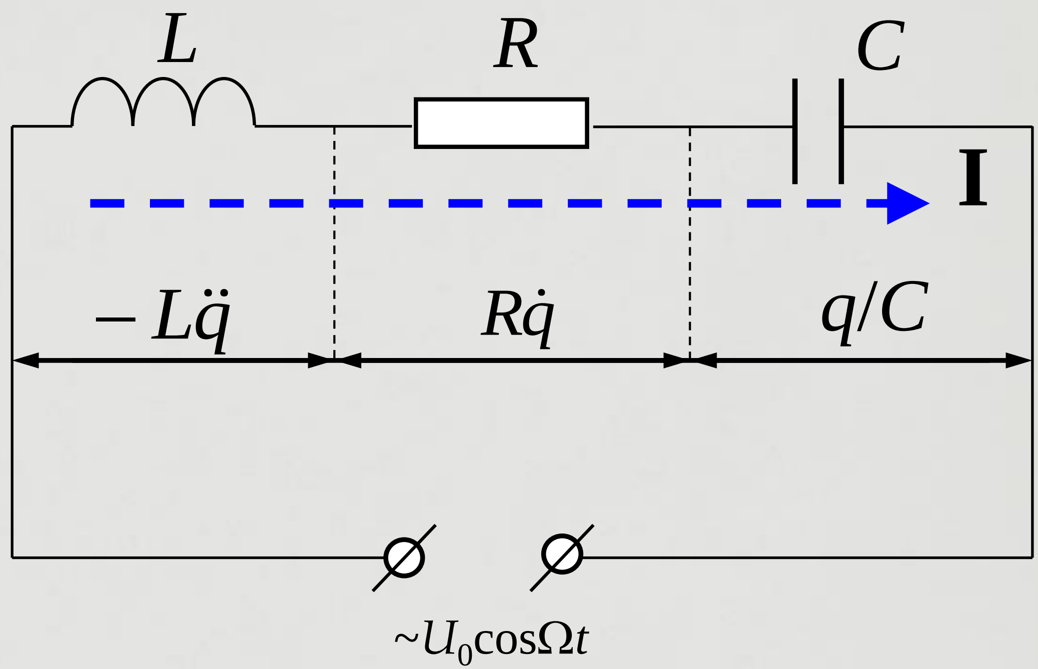


Рис. Контур “*RLC*” с генератором ЭДС



$$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=u_0\cdot\cos\Omega t$$

… и дальше “§ 1” … *… вместо этого …*

$q(t) = \ldots$; $I(t) = dq/dt = \dot{q}$ …

Векторная диаграмма

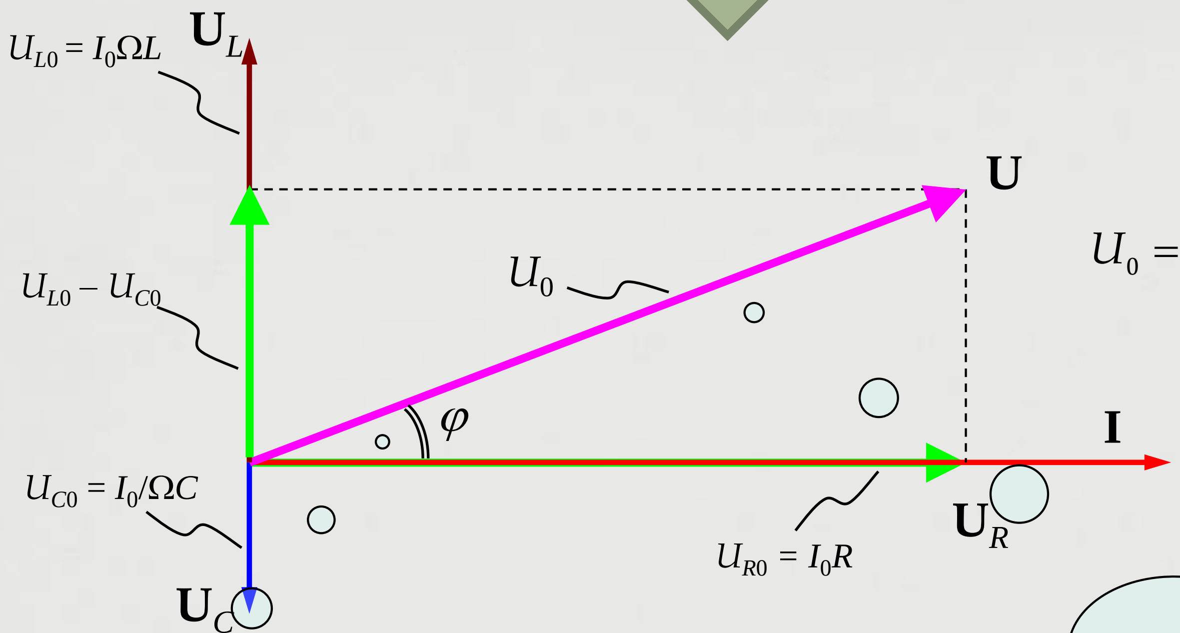


Рис. Векторная диаграмма “*RLC*-контура”

$$U_0 = I_0\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\Omega L - 1/\Omega C}{R}$$

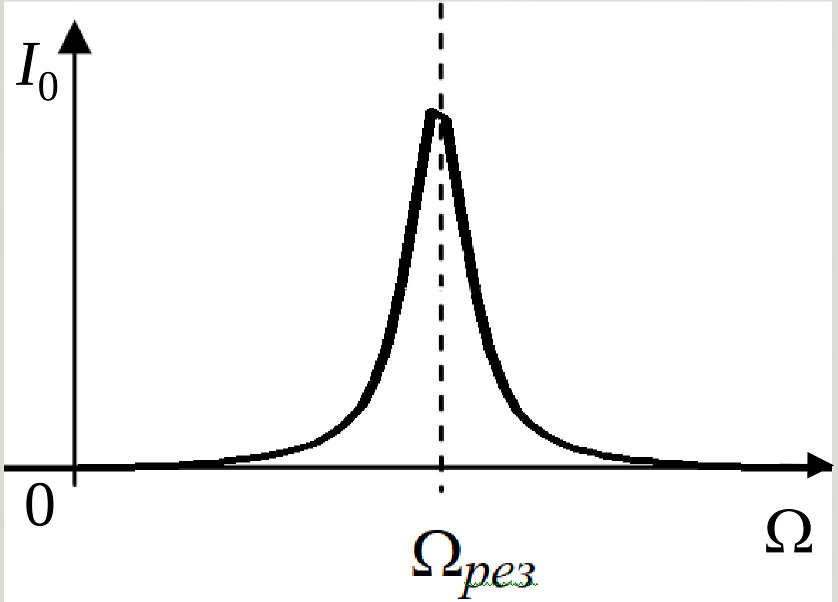
$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$$

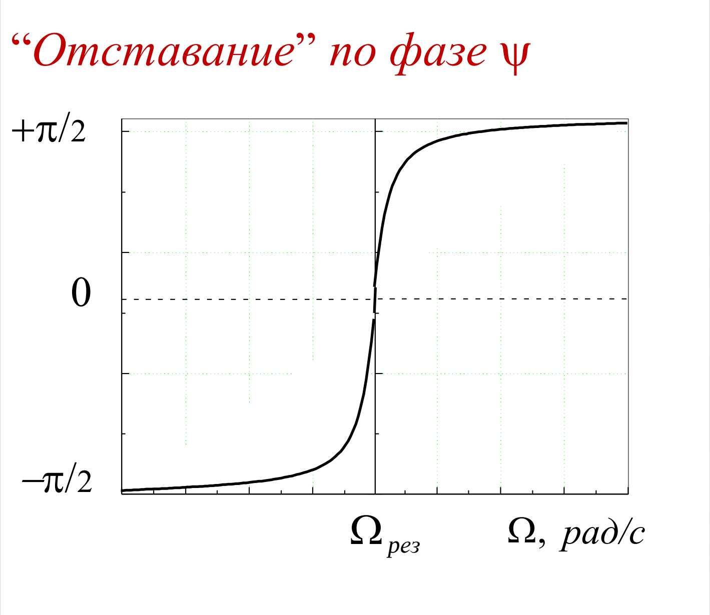
♣ ***Замечания***

1) Частный случай !

2) “Резонанс напряжений” ??

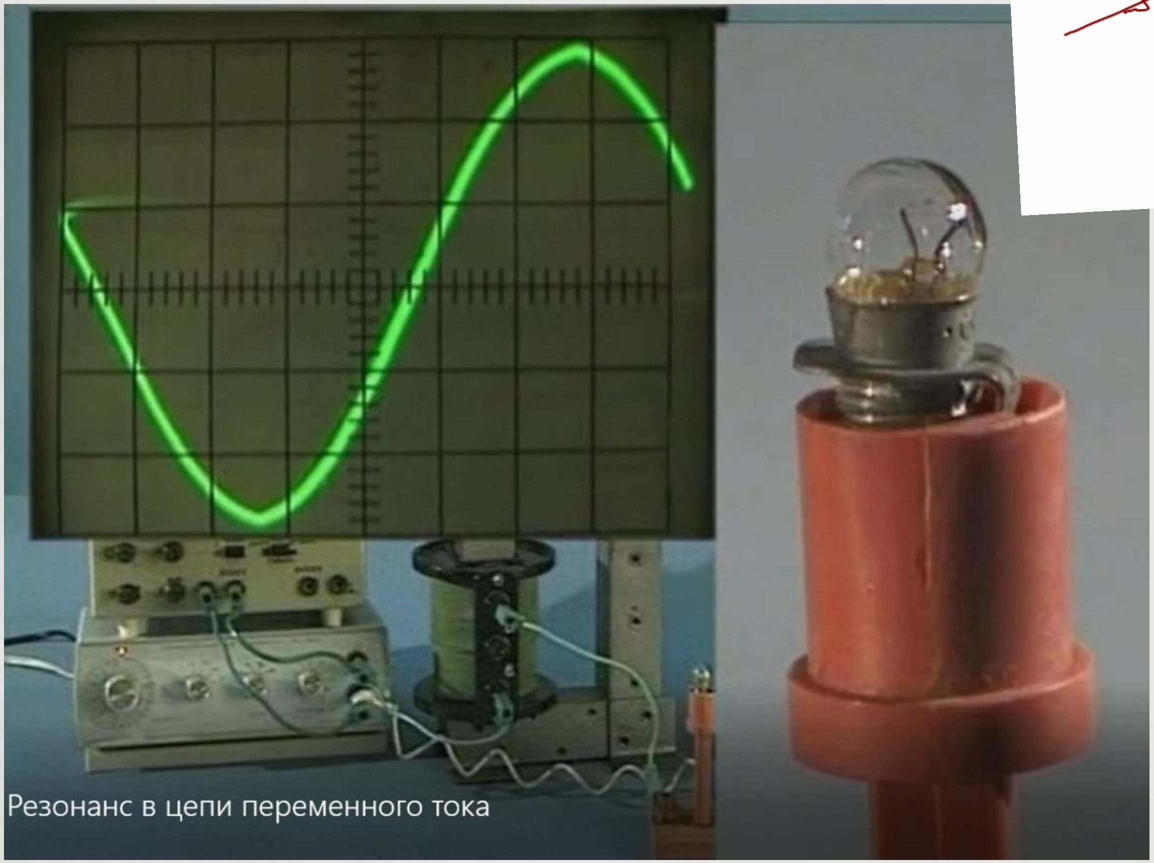
Амплитудно-частотная и фазо-частотная зависимости при резонансе в последовательном контуре

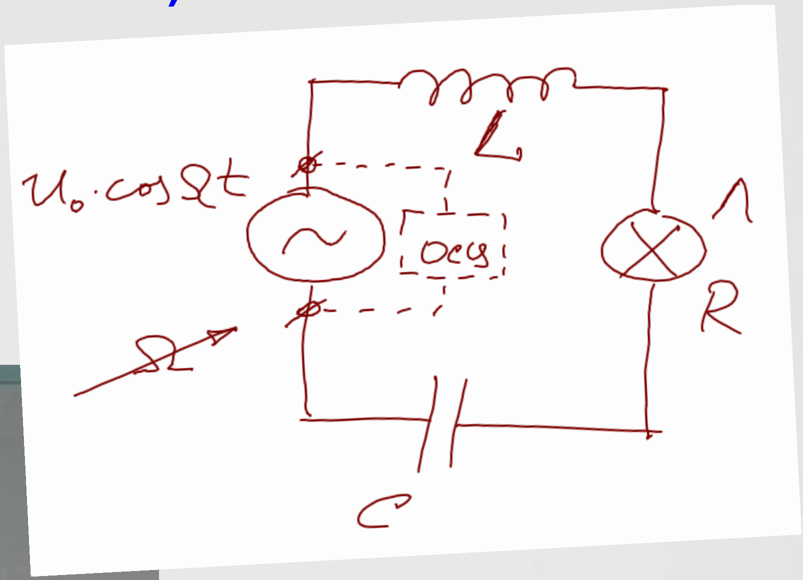




3.2. Понятие о резонансе в параллельном контуре

Демонстрация резонанса в последовательном контуре
(“*резонанс напряжений*”)





3.2. Понятие о резонансе в параллельном контуре

(«баланс токов»)

3.2.1. Идеализация

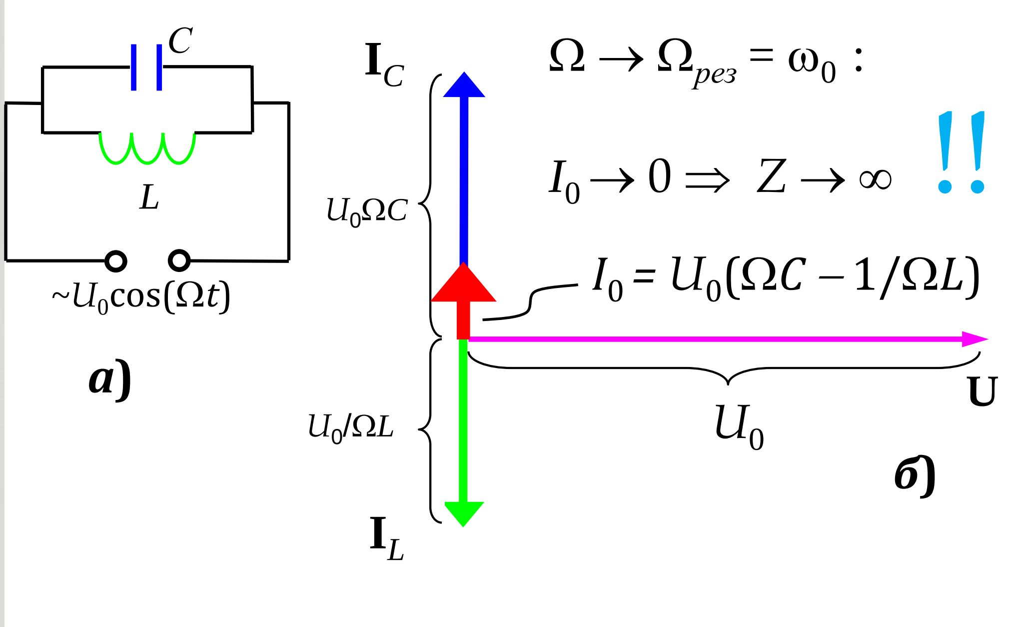
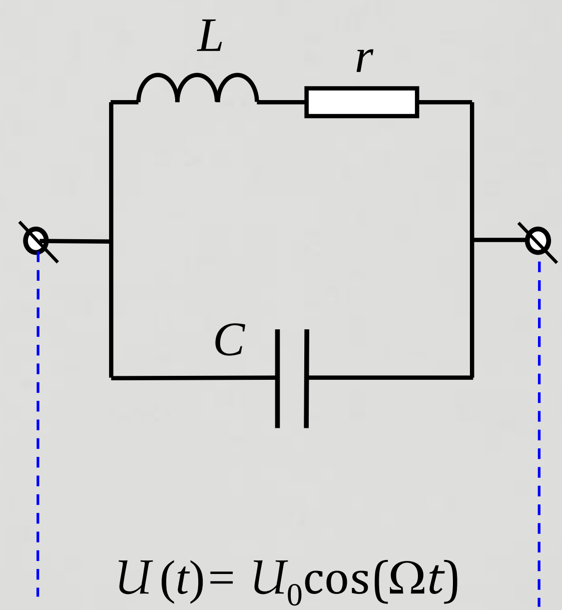


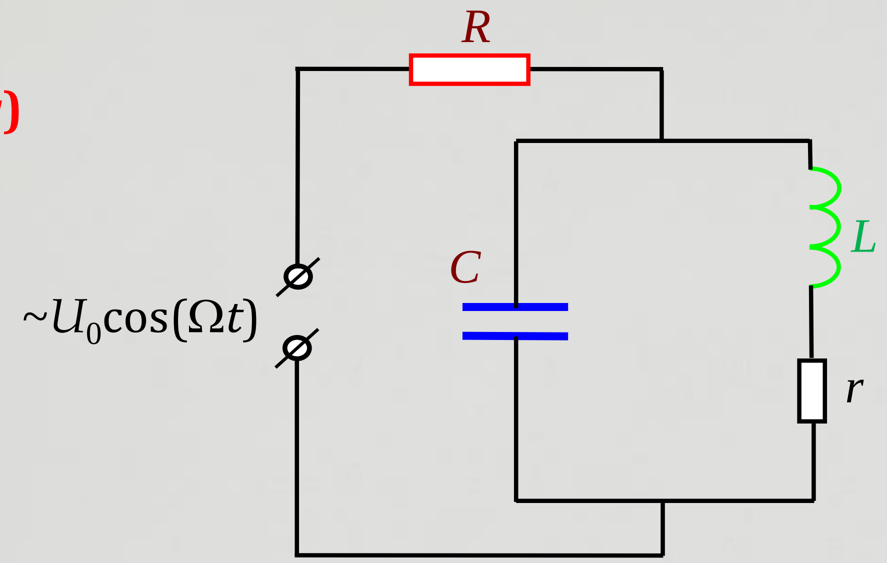
Рис. Параллельный контур: схема (*а*) и векторная диаграмма (*б*)

3.2.2. Реальность



3.2.2. Реальность

а)

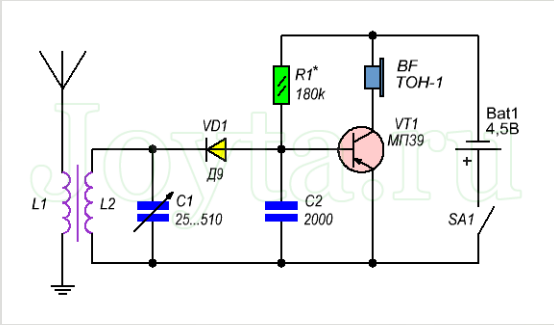


$$\Omega \to \Omega_{рез} \approx \omega_0 :$$

$$I_0 \to 0 \Rightarrow Z \to \infty$$ **!!**

♣ *Замечания*

1) Селекторы теле-радиоприёмников → Селективность **~ *Q***



б)

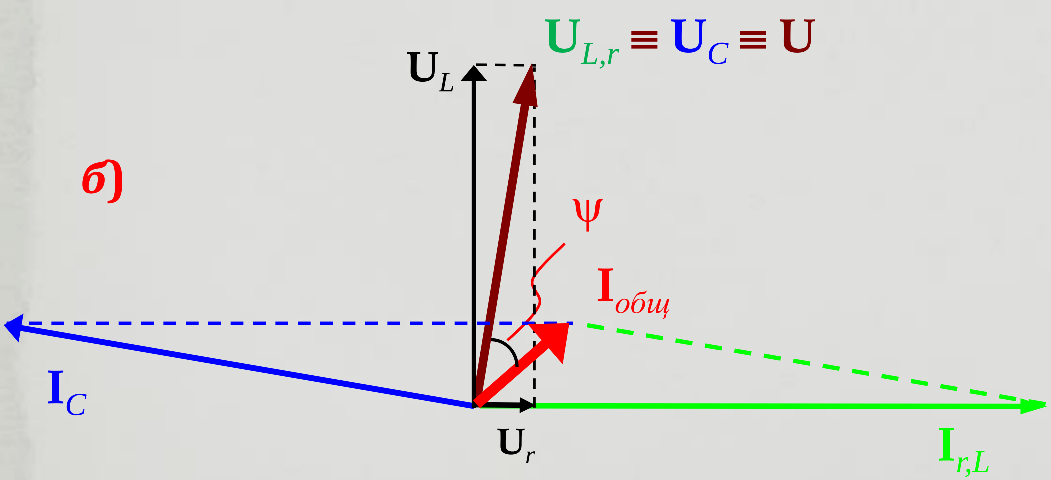
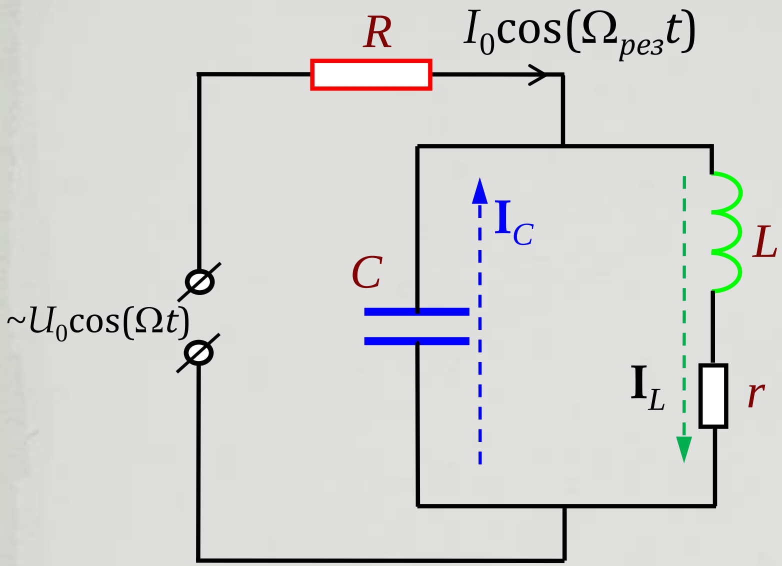


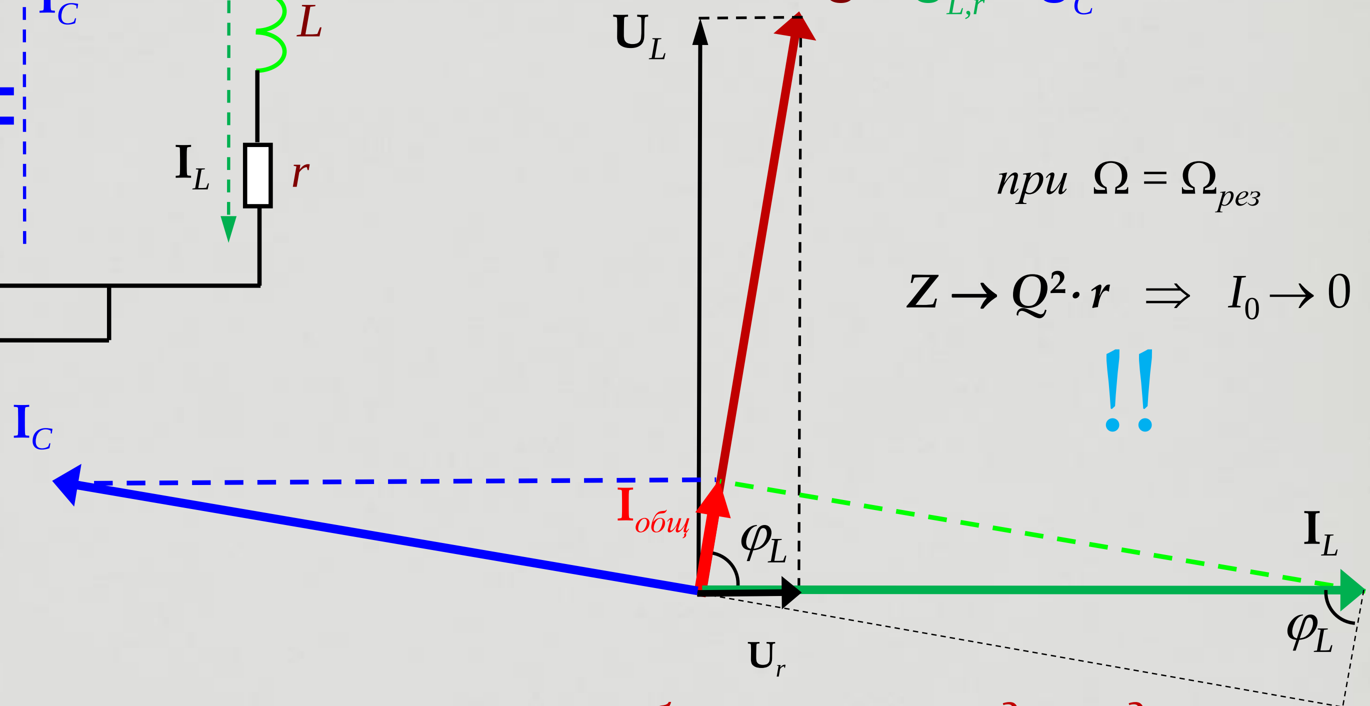
Рис. 3.5. Схема и векторная диаграмма для реального параллельного контура.

2) *И ещё:* резонансные фильтры,
резонансные усилители,
индукционные печи, …,
Резонансный трансформатор «Тесла»

*** *Векторная диаграмма при резонансе в параллельном контуре – «балансе токов»*



$$I_0 = I_{L0}/Q = I_{C0}/Q \quad !!$$



при $\Omega = \Omega_{рез}$

$$Z \to Q^2 \cdot r \;\Rightarrow\; I_0 \to 0$$

!!

«Реактивные составляющие» сил токов балансируют друг друга:

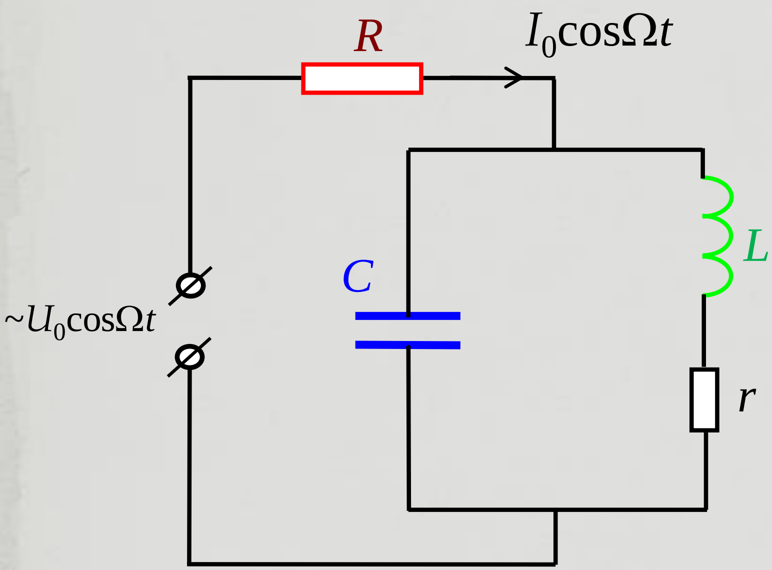
$$I_{C0} = I_{L0}\cdot\sin\varphi_L \;\Rightarrow\; \Omega_{рез} \approx \omega_0 \,^{*)}$$

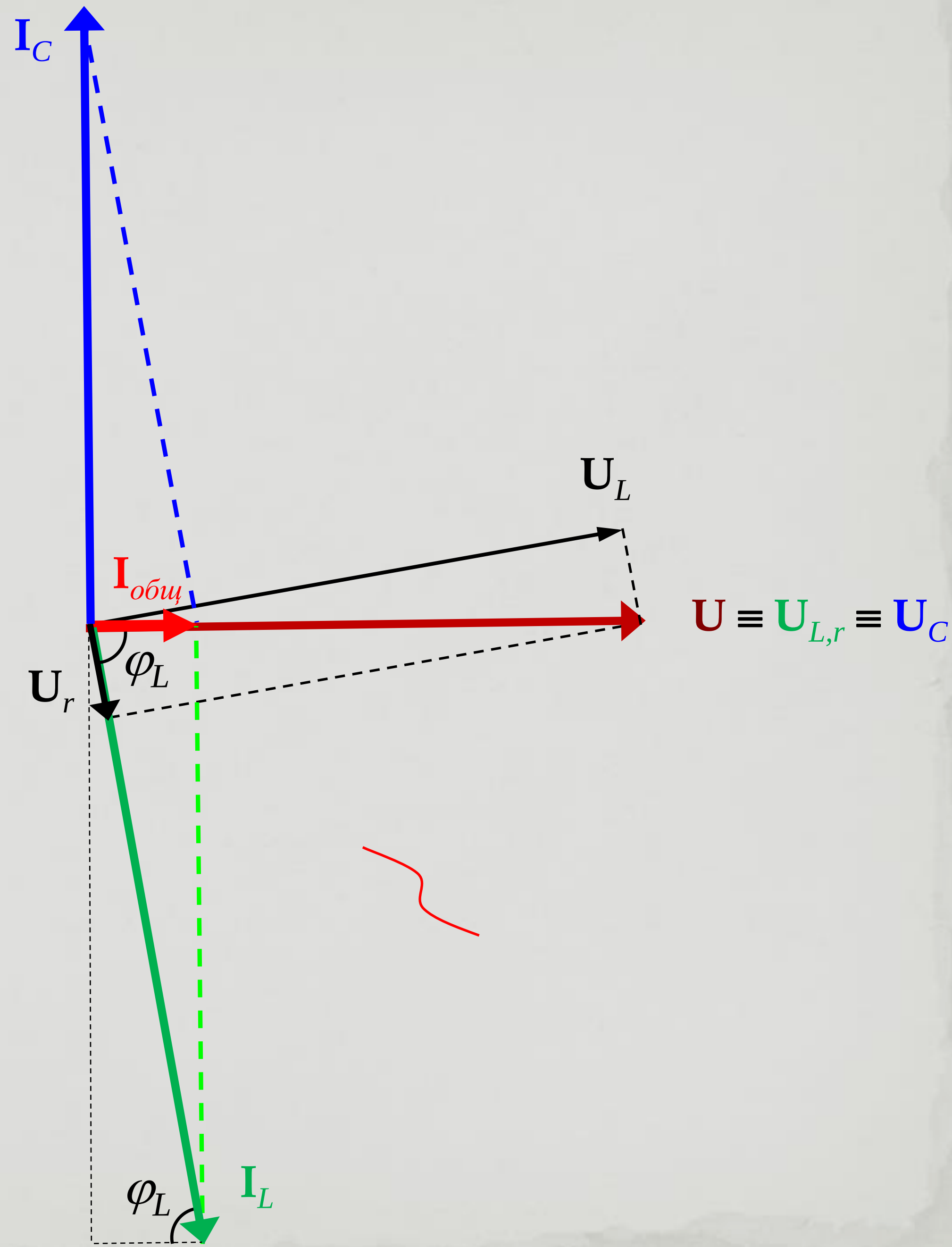
$$\left\{ tg\varphi_L = \frac{\Omega L}{r} \;\Rightarrow\; \sin\varphi_L = \frac{\Omega L}{\sqrt{r^2 + (\Omega L)^2}} \right\}$$

*) Более точно: $\underbrace{\dfrac{U_0}{1/\Omega C}}_{I_{C0}} = \underbrace{\dfrac{U_0}{\sqrt{r^2+(\Omega L)^2}}}_{I_{L0}} \cdot \underbrace{\dfrac{\Omega L}{\sqrt{r^2+(\Omega L)^2}}}_{\sin\varphi_L} \;\Rightarrow\; \Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2}$

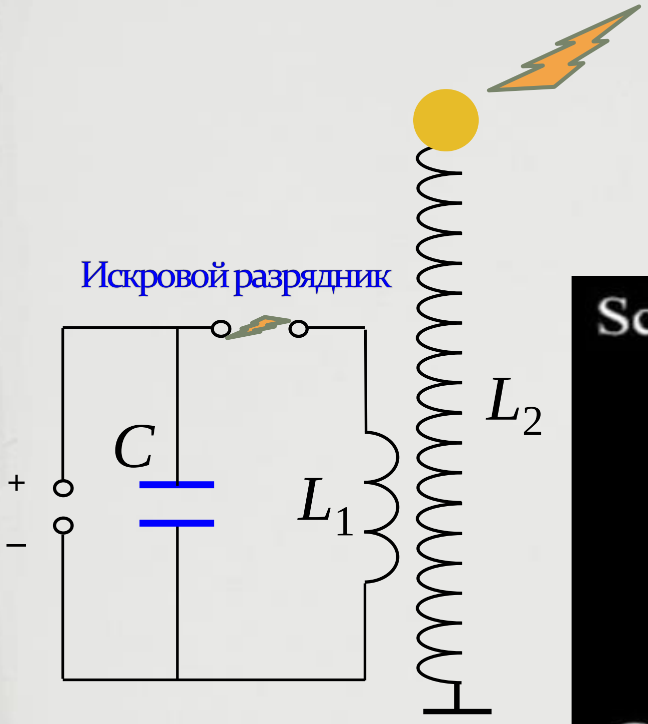
*** *резонанс в параллельном контуре*

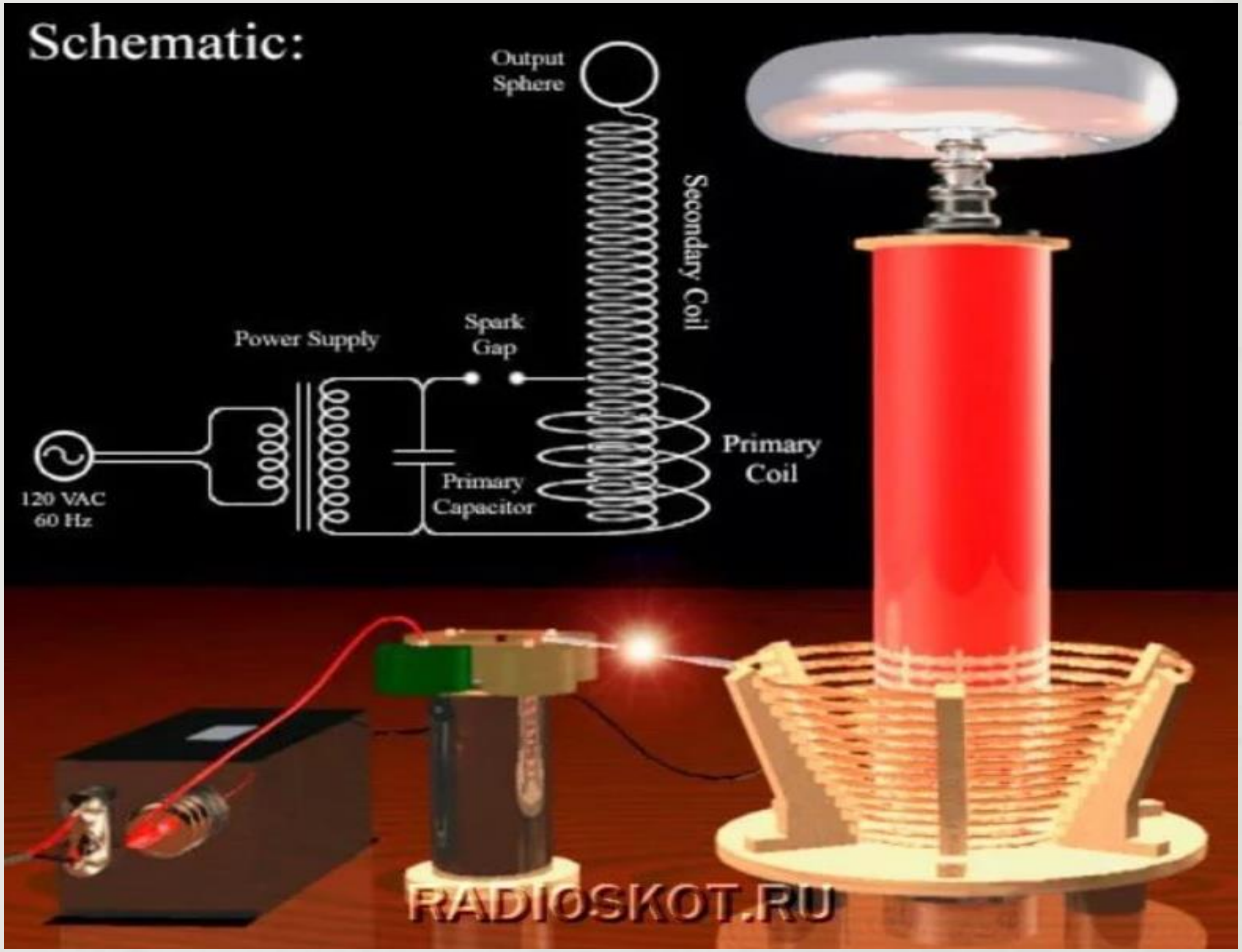
– другой вариант процедуры *построения векторной диаграммы*





Ещё про резонанс: резонансный трансформатор Тесла





Глава III. Волны

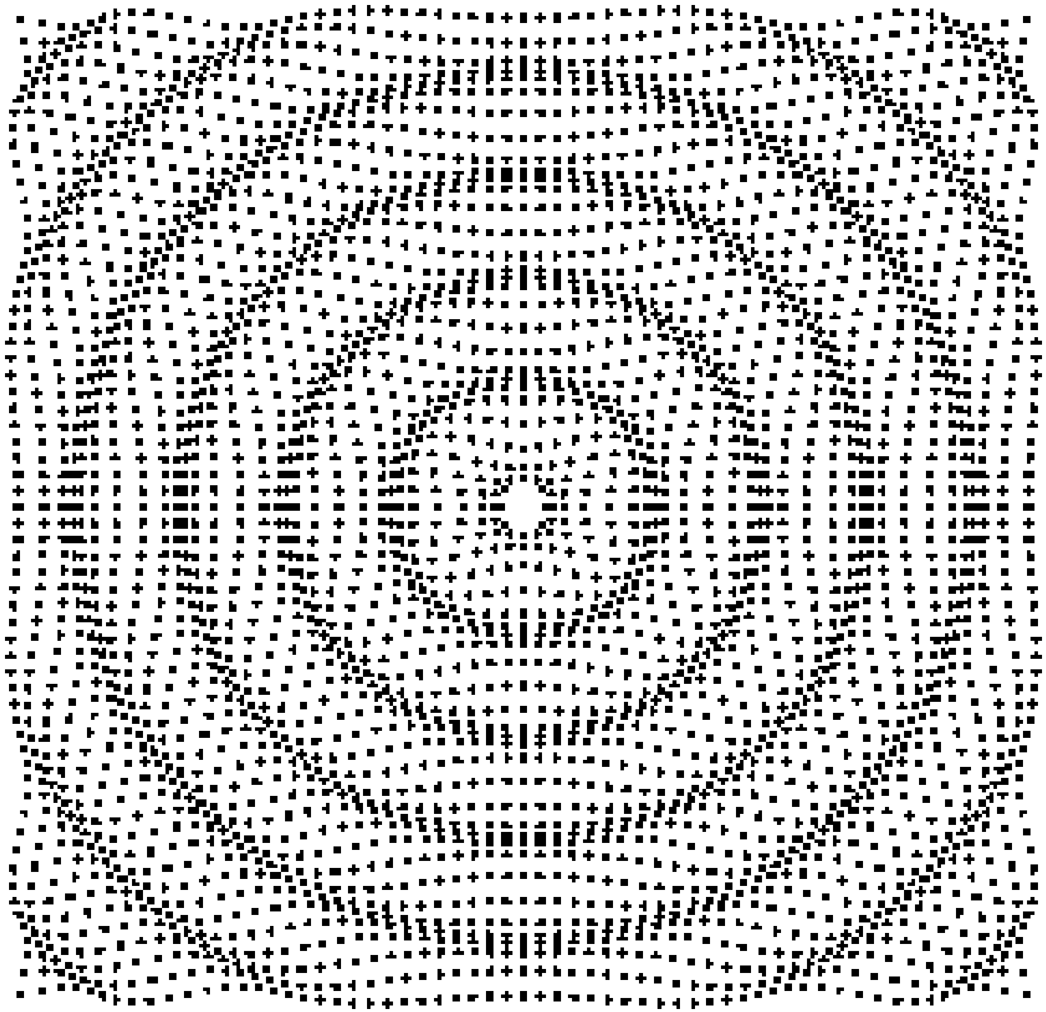
"Путешественнику на корабле кажется, что океан состоит из волн, а не из воды"

А. Эддингтон, 1929

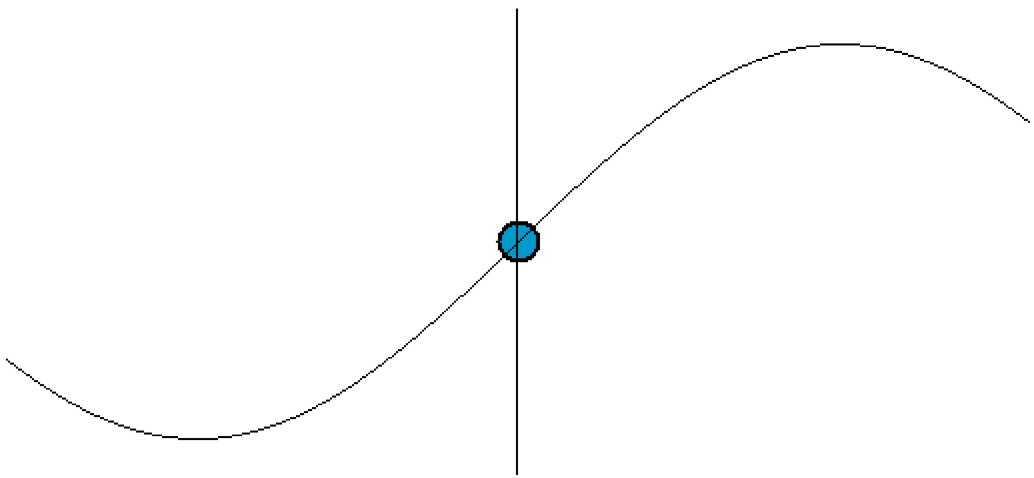
- (**Опр.**) ***Волна – процесс распространения колебаний в пространстве***

… ?

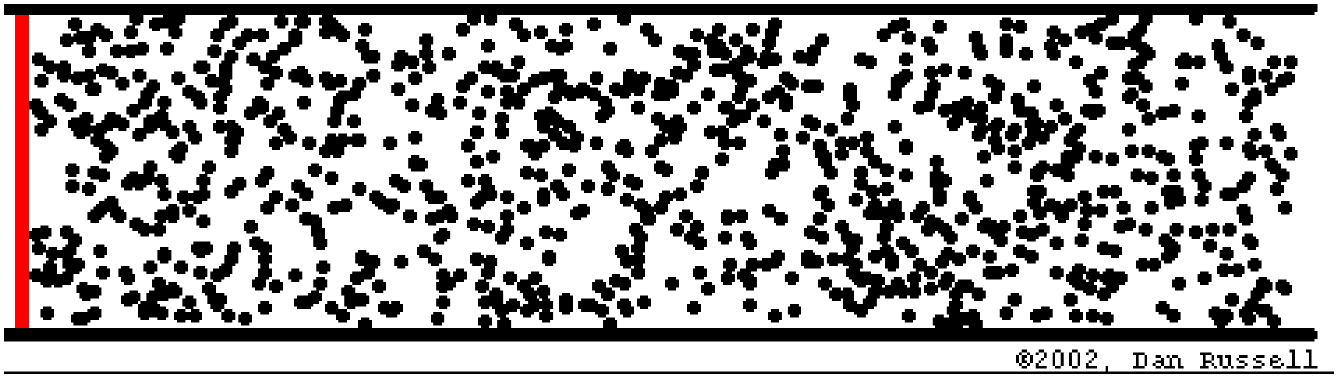
Волны



Волны



Волны

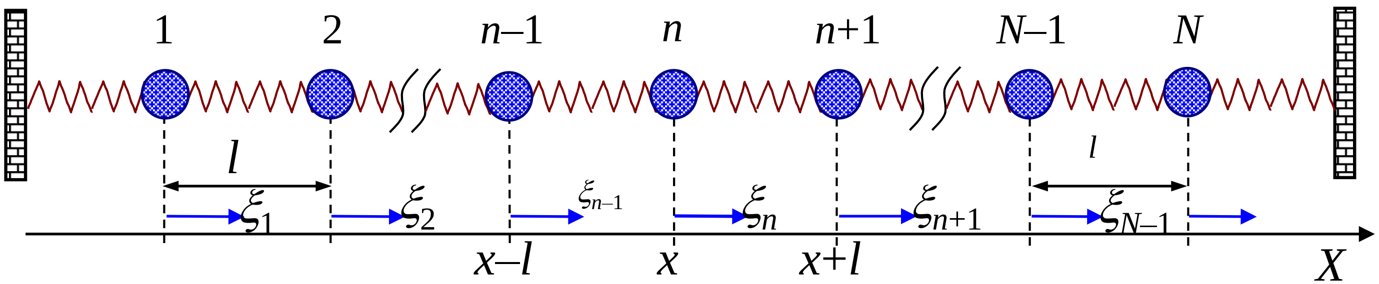



Волны


Волны
DotaJ.ru

§ 1. *Упругие волны*

1.1. Дифференциальное волновое уравнение



Модель:

1) система состоит из длинной цепочки большого количества одинаковых связанных атомов массы *m* *(“химическая аналогия”)*;

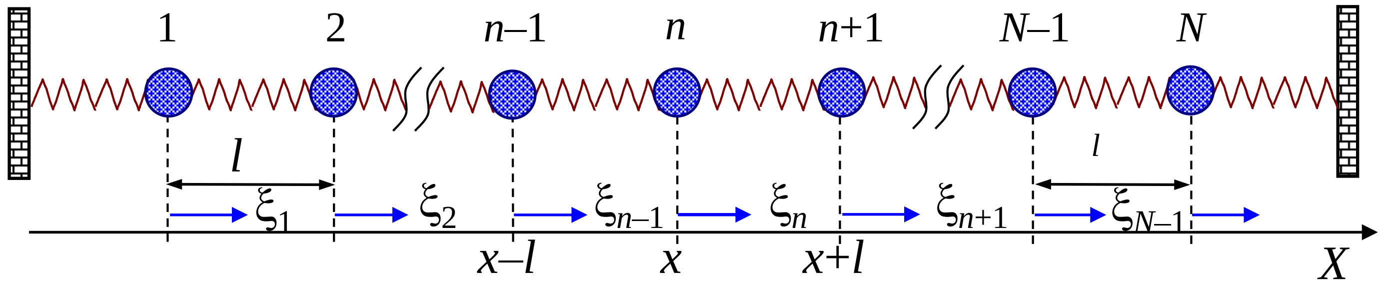
2) система консервативна;

3) амплитуды колебаний малы, силы квазиупруги и моделируются пружинами жёсткости κ *)*;

4) расстояние l между соседними осцилляторами очень мало;

5) соседние шарики-атомы движутся почти одинаково (исключаем из рассмотрения наиболее высокочастотные моды колебаний).

К выводу дифференциального волнового уравнения



$$m\ddot{\xi}_n = -\kappa(\xi_n - \xi_{n-1}) + \kappa(\xi_{n+1} - \xi_n)$$

$\boldsymbol{l \to 0}$**:** $$\xi_n \to \xi(x,t)$$

$$\xi_{n+1} = \xi(x+l,t) \approx \xi(x,t) + \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot l + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\cdot\frac{l^2}{2}$$

$$\xi_{n-1} = \xi(x-l,t) \approx \xi(x,t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot l + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\cdot\frac{l^2}{2}$$

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \kappa l^2 \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

Обозначим

$$\frac{\kappa l^2}{m} = \upsilon^2$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

Это одномерное
“Классическое дифференциальное волновое уравнение”

“Трёхмерный” случай

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \cdot \Delta\xi$$

$$\left(\text{"}\textit{оператор Лапласа}\text{"}: \quad \Delta\xi = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)$$

Волны

♣ *Замечания*

(*Опр.*)

1) ***Волна называется продольной (поперечной), если колебания происходят вдоль (перпендикулярно) направления распространения возмущений***

*2) **Для поперечной вместо*** $\upsilon^2 = \dfrac{\kappa l^2}{m}$ **:** $\kappa \rightarrow \dfrac{T}{l}$ $\upsilon^2 = \dfrac{Tl}{m}$

1.2. Уравнение волны

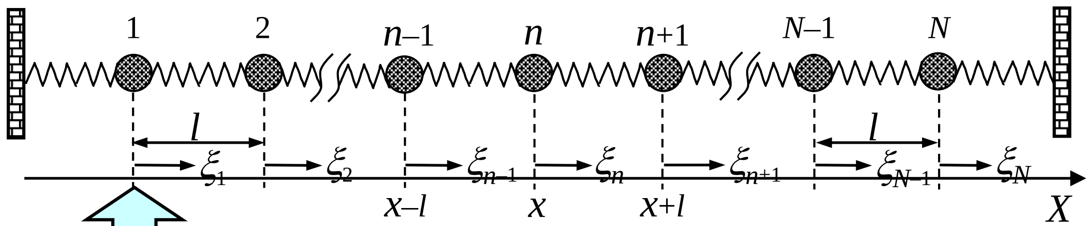
➨ (*Опр.*) ***Уравнением упругой волны называется соотношение, описывающее зависимость смещения колеблющихся частиц*** $\xi(x,t)$ ***от координат и времени в явной форме*:**

$$\xi = \xi(x,t) \quad \textit{или} \quad \xi = \xi(x,y,z,t)$$

Уравнение волны – функция, являющаяся решением ***волнового уравнения***

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Уравнение волны (2)



$$\xi(0,t) = A\cos\omega t$$

запаздывание на $\tau = x/\upsilon$

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos[\omega(t-\tau)]; \qquad \xi(x,t) = A\cdot\cos[\omega t - \omega\cdot x/\upsilon];$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T};$$

"Длина волны": $\lambda = \upsilon\cdot T$

$$\frac{\omega\cdot x}{\upsilon} = \frac{2\pi\cdot x}{T\cdot\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x$$

"Волновое число": $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - kx);$$

или $\xi(x,t) = A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t - \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$

(**Опр.**) ***Уравнением гармонической бегущей волны называется функция координат и времени вида:***

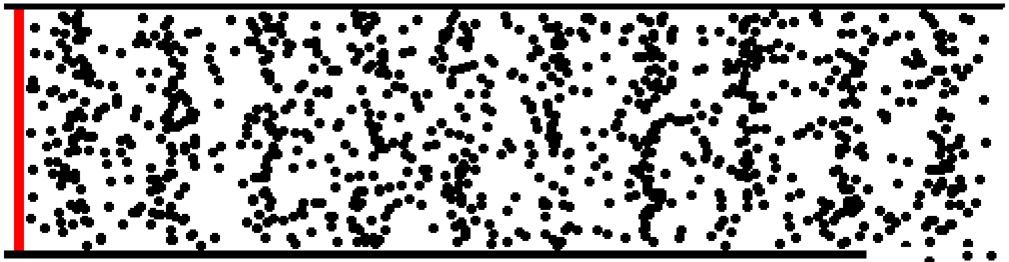
$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$$

♣ ***Замечания***

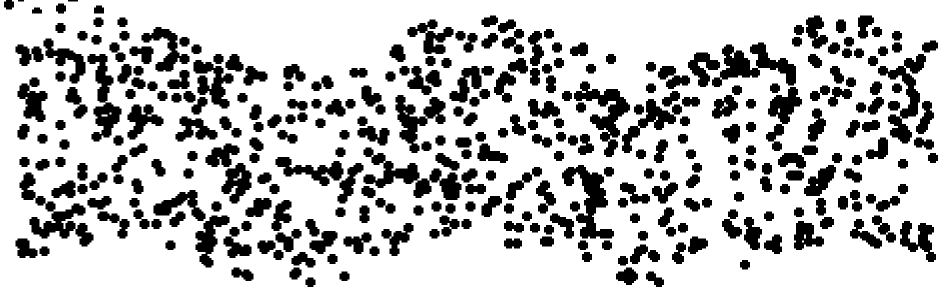
1) **Только ли “cos”** ?? ***… любая f***$(t - x/\upsilon)$;

2) гармоническая; “бегущая” (“+”); “плоская” (?); в среде без поглощения.

Продольные волны



Поперечные волны



(**Опр.**) ***Волновой поверхностью* называют такую поверхность, колебания во всех точках которой, происходят в одной и той же фазе**

Волновая поверхность, служащая «передней» границей «возмущённой» области пространства, называется волновым фронтом

(**Опр.**) ***Длиной волны (λ) называется расстояние, на которое фронт волны (или любая волновая поверхность) смещается за один период колебаний***

♣ Замечания

… 2) Эта волна …

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - kx)$$

а. гармоническая;

б. “бегущая” («+»);

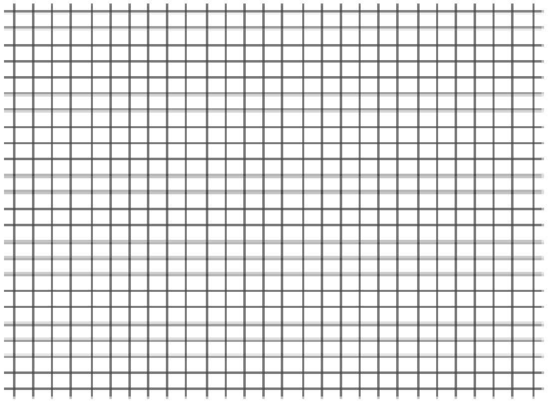
в. в среде без поглощения;

г. “плоская”.

… ?

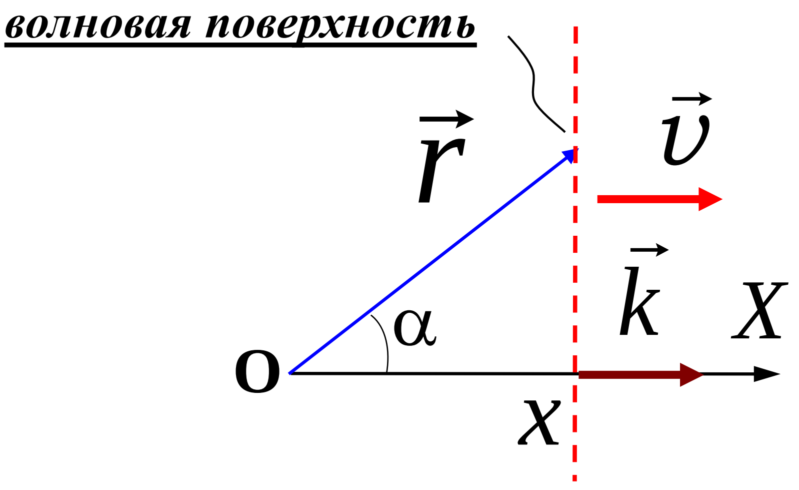
♣ … ***"плоская"*** **… ?**

Если фронт волны и волновые поверхности – плоскости, то волну называют ***плоской***



$$x << D \quad (D - \text{размер источника})$$

Плоская волна



$$kx = k \cdot r \cdot \cos\alpha = \vec{k} \cdot \vec{r}$$

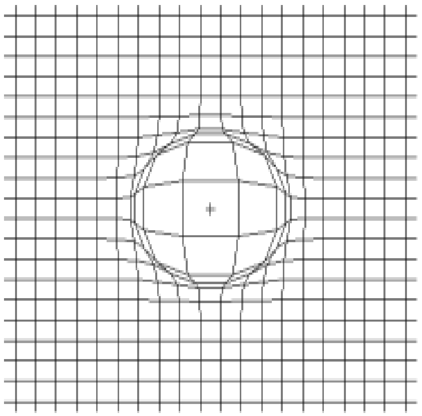
$$\xi(\vec{r},t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Сферическая волна

Если волновые поверхности имеют сферическую форму, волну называют сферической

$$D << x, r$$

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r} \cdot \cos(\omega t - kr)$$



♣ *Замечания*

1) **нет поглощения средой, но энергия “разбегается”;**
2) **А если есть?**

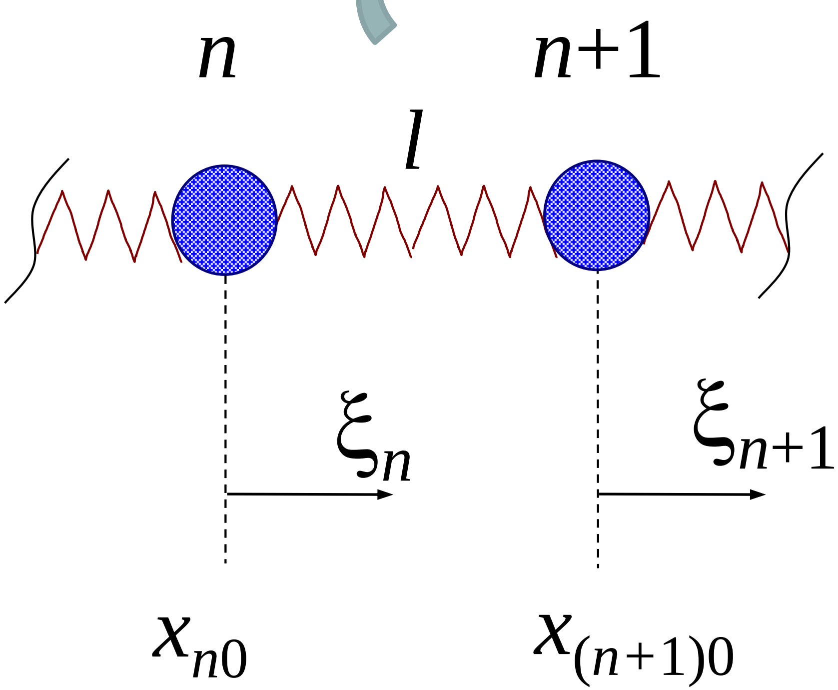
а. Плоская волна: $A(x) = A_0 \cdot e^{-\eta x}$

б.Сферическая волна: $A(r) = \frac{A_0}{r} \cdot e^{-\eta r}$

1.4. Энергия упругой волны

$$W_n = \frac{\kappa \cdot (\textit{деформация})^2}{2}$$

$$\textit{деформация:}\quad \xi(x+l,t) - \xi(x,t) \approx \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot l$$



$$W_n = \frac{\kappa}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} l\right)^2 = \frac{\kappa l^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2;$$

$$\upsilon^2 = \frac{\kappa l^2}{m}; \qquad \upsilon - \textit{фазовая скорость волны!!}$$

$$W_n = \frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2;$$

Энергия упругой волны (2)

$$W_к = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2;\ W_к = \frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2;\ W = W_п + W_к;$$

$$W = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\frac{dW}{dV} = w \quad (плотность\ энергии)$$

$$w = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right]$$

Энергия упругой волны (3)

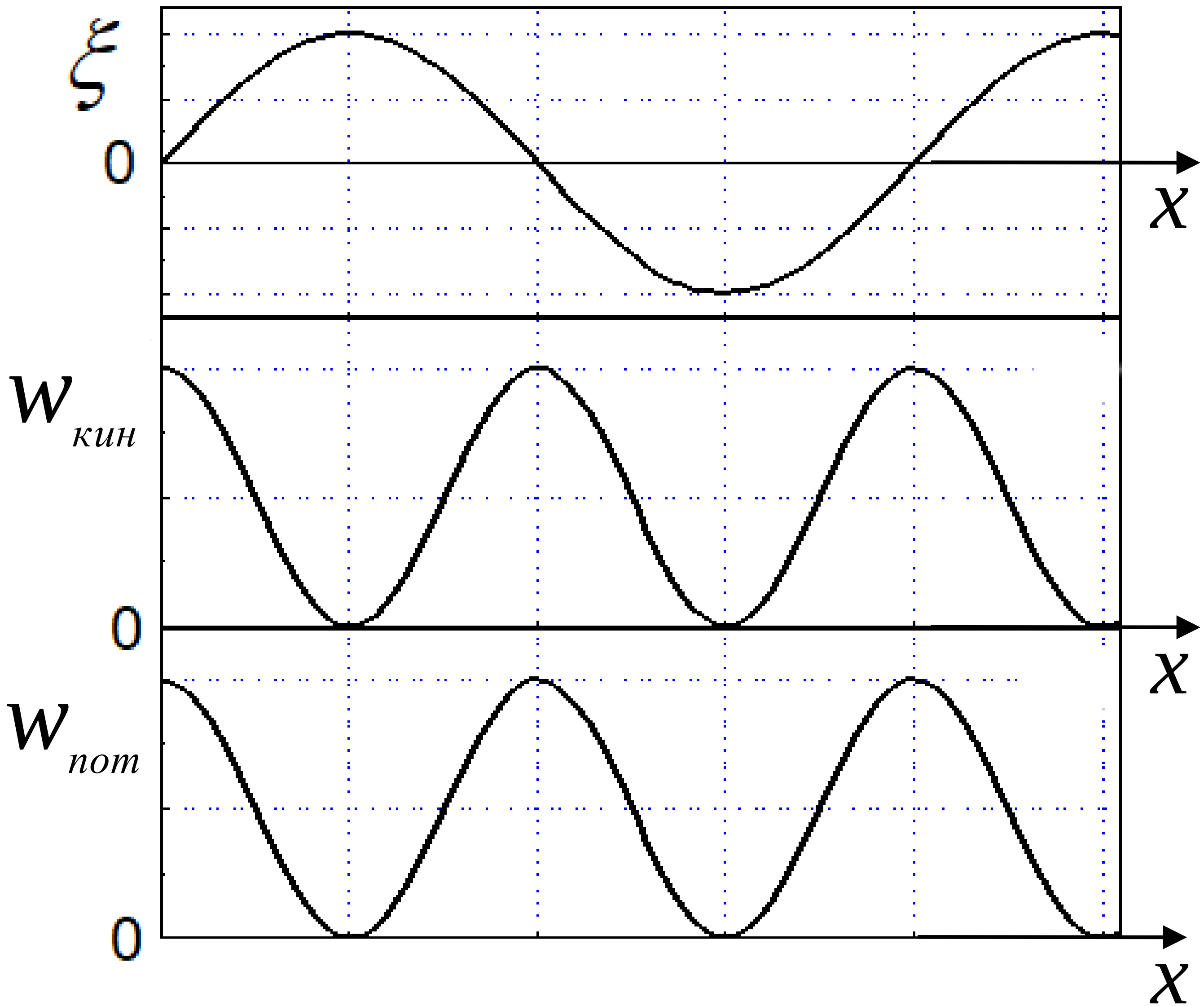
$$w_{кин} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{\rho}{2}A^2\omega^2\cdot\sin^2(\omega t - kx)$$

$$w_{пот} = \frac{\rho\upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 = \frac{\rho\upsilon^2}{2}A^2k^2\cdot\sin^2(\omega t - kx)$$

$(с\ учётом\ \upsilon = \omega/k)$ $\quad w_{пот} = \dfrac{\rho}{2}A^2\omega^2\cdot\sin^2(\omega t - kx)$

$w = w_{кин} + w_{пот}\,;$ $\qquad w = \rho A^2\omega^2\cdot\sin^2(\omega t - kx)$

$t = t_0$ – “*мгновенная фотография*”



Характеристики переноса энергии упругой волны

$$w = w(x,t) \qquad S(t) = w(t)\cdot\upsilon$$

***“Плотность потока энергии”* – энергия, переносимая волной в единицу времени через «единичную площадку», перпендикулярную направлению распространения волны**

***“Интенсивностью волны”* называется среднее по времени значение плотности потока её энергии**

$$\langle w\rangle_t = \langle \rho A^2\omega^2\cdot\sin^2(\omega t - kx)\rangle_t = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

$$I = \langle S\rangle_t = \langle w\rangle_t\cdot\upsilon = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\upsilon$$

Энергия упругой волны (5)

Вектор Умова: $\vec{S} = w(t) \cdot \vec{\upsilon}$

«векторная интенсивность»:

$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \langle w \rangle \cdot \vec{\upsilon} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cdot \vec{\upsilon}$$

Поток энергии:

$$\Phi = \int\limits_{\Sigma} \left\langle \vec{S} \right\rangle \cdot d\vec{s} = \int\limits_{\Sigma} \langle S_n \rangle ds$$

скалярное произведение

Доска 1

$$U_0 = I_0 \cdot \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)}};$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2};$$

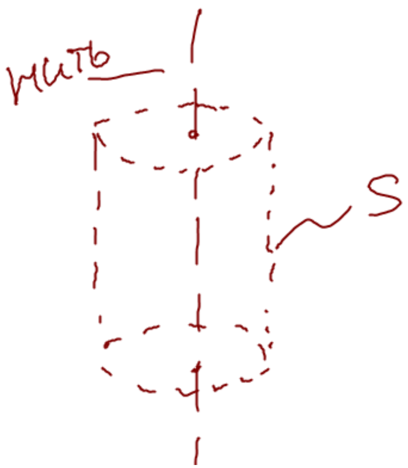
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R};$$

Доска 2

$$\frac{W}{S} \sim \frac{1}{r^2} \qquad S \sim r^2 \quad (4\pi r^2)$$

$$W \sim A^2$$

$$A_{сф}(r) \sim \frac{1}{r};$$



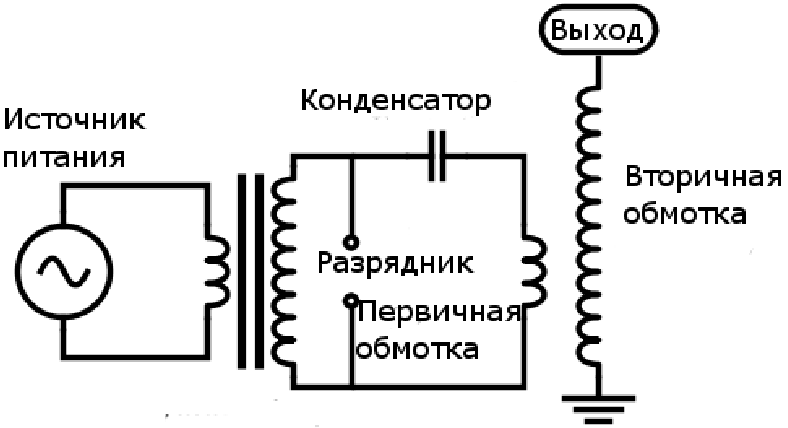
$$A_{ц}(r) \sim$$

коэф. поглощ.

$$A_0 \cdot e^{-\gamma x}$$

$$A_0 \cdot e^{-\gamma \cdot r}$$

Резонансный трансформатор Тесла



Лаборатория Никола Тесла, Колорадо Спрингс, 1899 г.