Лекция 7. Резонанс.
Упругие волны

3.2. Понятие о резонансе в параллельном контуре
(«баланс токов»)

3.2.1. Идеализация

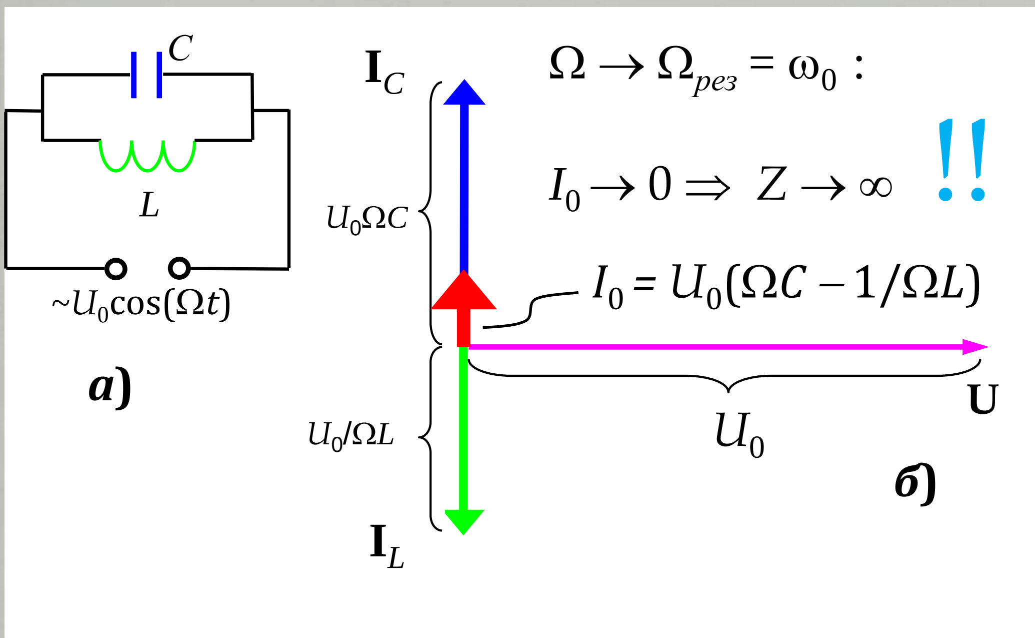
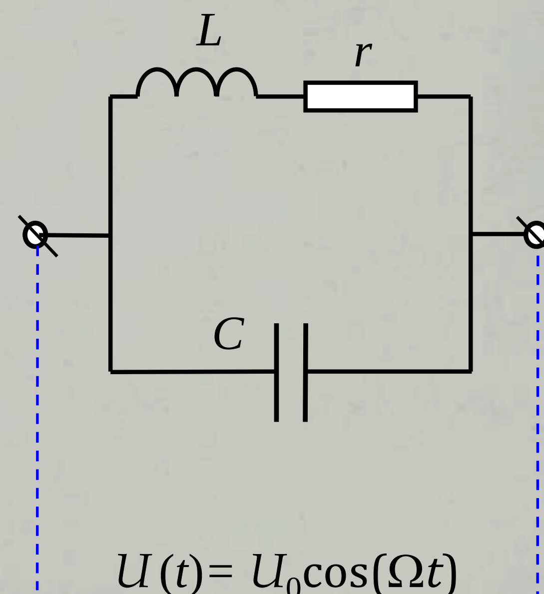


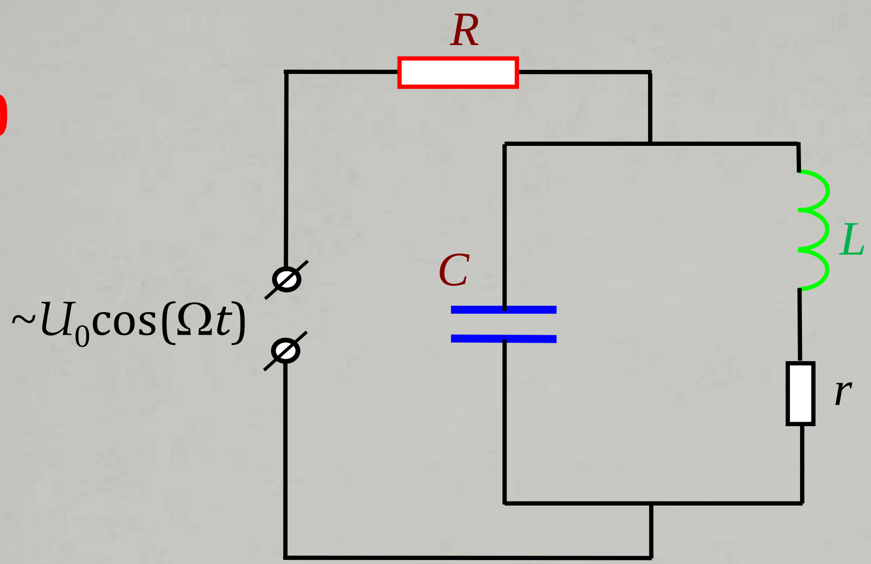
Рис. Параллельный контур: схема (*а*) и векторная диаграмма (*б*)

3.2.2. Реальность



3.2.2. Реальность

а)

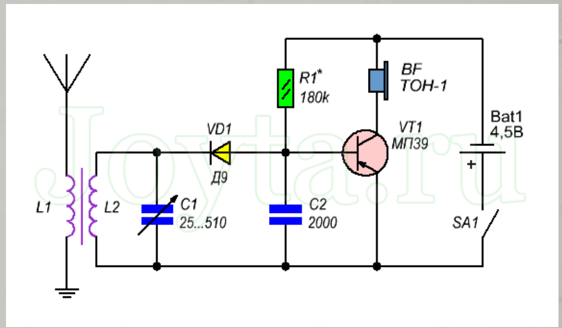


$$\Omega \to \Omega_{рез} \approx \omega_0 :$$

$$I_0 \to 0 \Rightarrow Z \to \infty$$ **!!**

♣ *Замечания*

1) Селекторы теле-радиоприёмников → Селективность **~ *Q***



б)

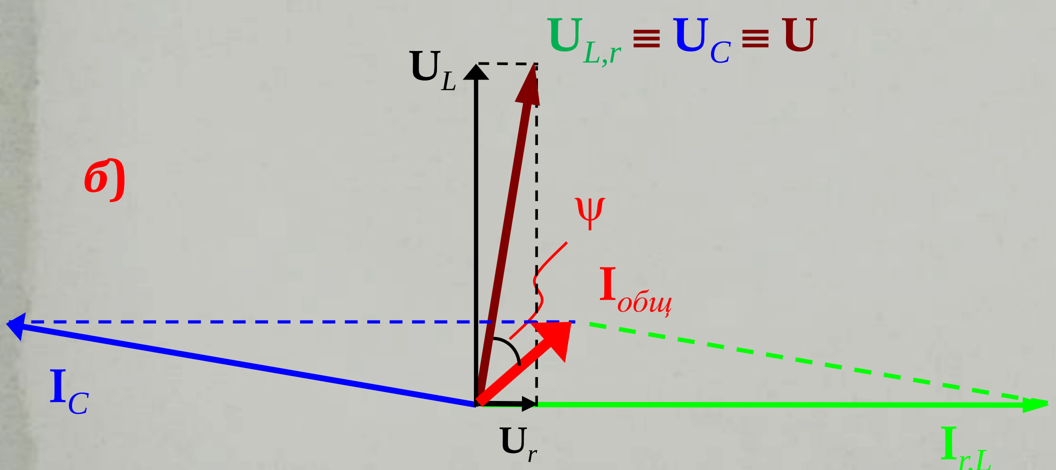
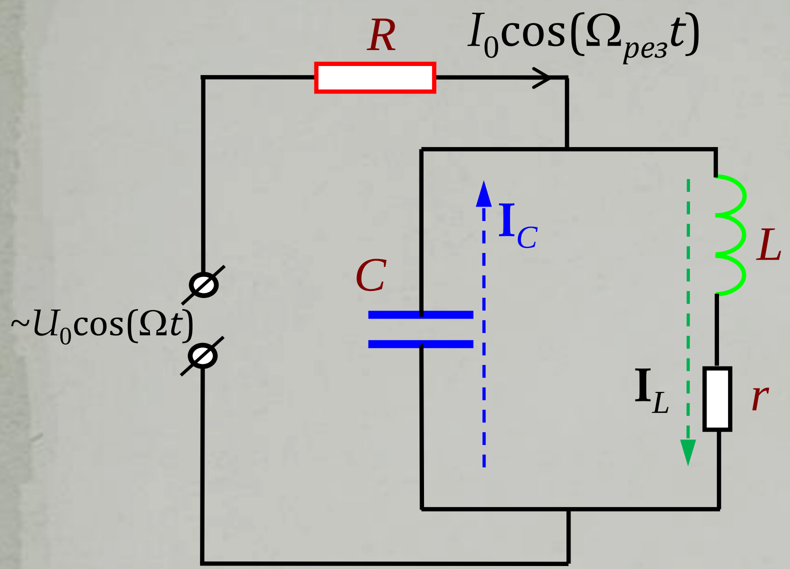


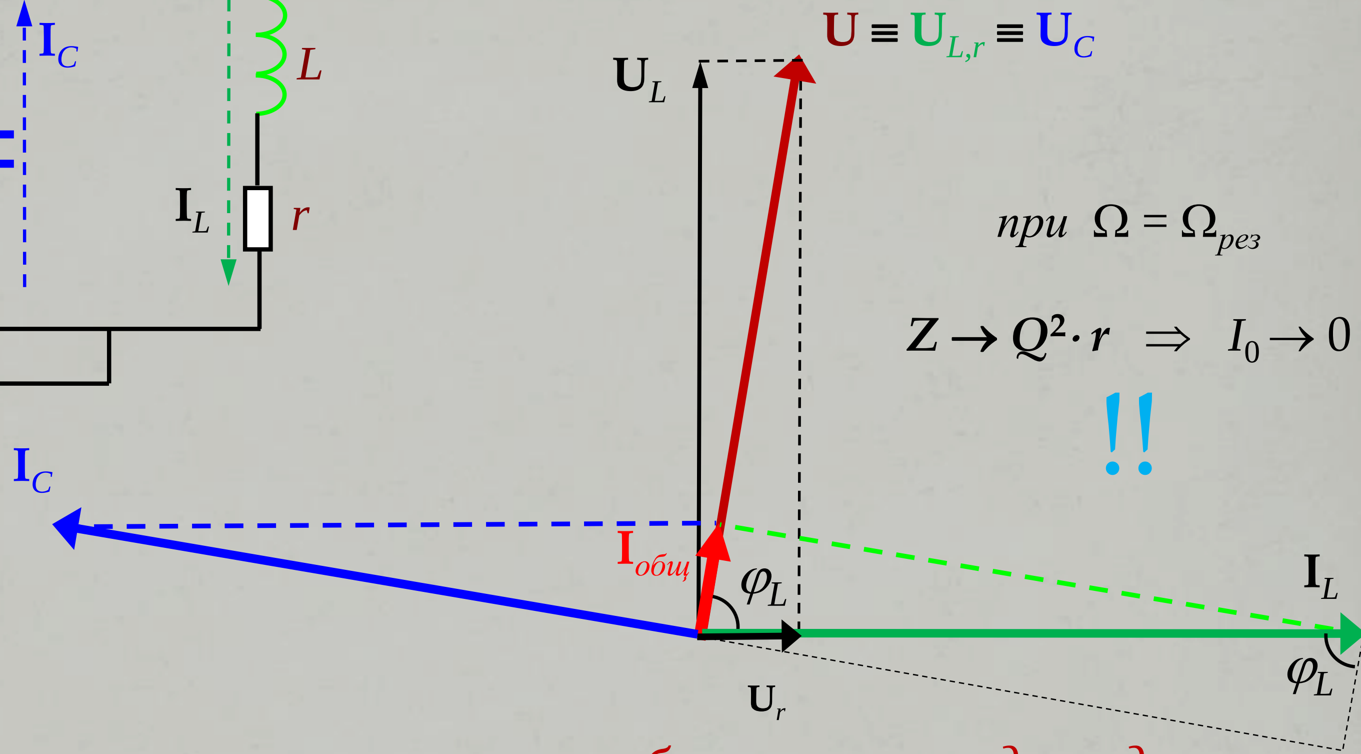
Рис. 3.5. Схема и векторная диаграмма для реального параллельного контура.

2) *И ещё:* резонансные фильтры,
резонансные усилители,
индукционные печи, …,
Резонансный трансформатор «Тесла»

*** Векторная диаграмма при резонансе в параллельном контуре – «балансе токов»



$$I_0 = I_{L0}/Q = I_{C0}/Q \quad !!$$



при $\Omega = \Omega_{рез}$

$$\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}^2 \cdot \mathbf{r} \;\Rightarrow\; I_0 \to 0$$

!!

«Реактивные составляющие» сил токов балансируют друг друга:

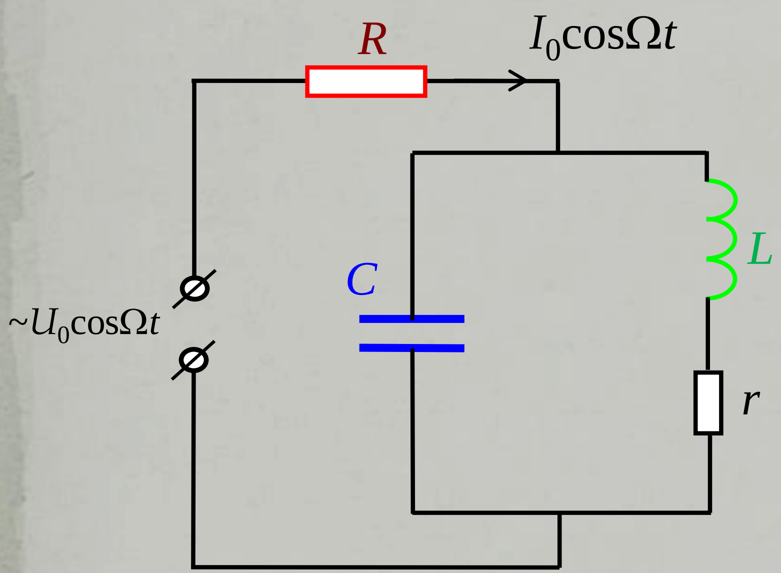
$$I_{C0} = I_{L0} \cdot \sin\varphi_L \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\Omega_{рез} \approx \omega_0}\ ^{*)}$$

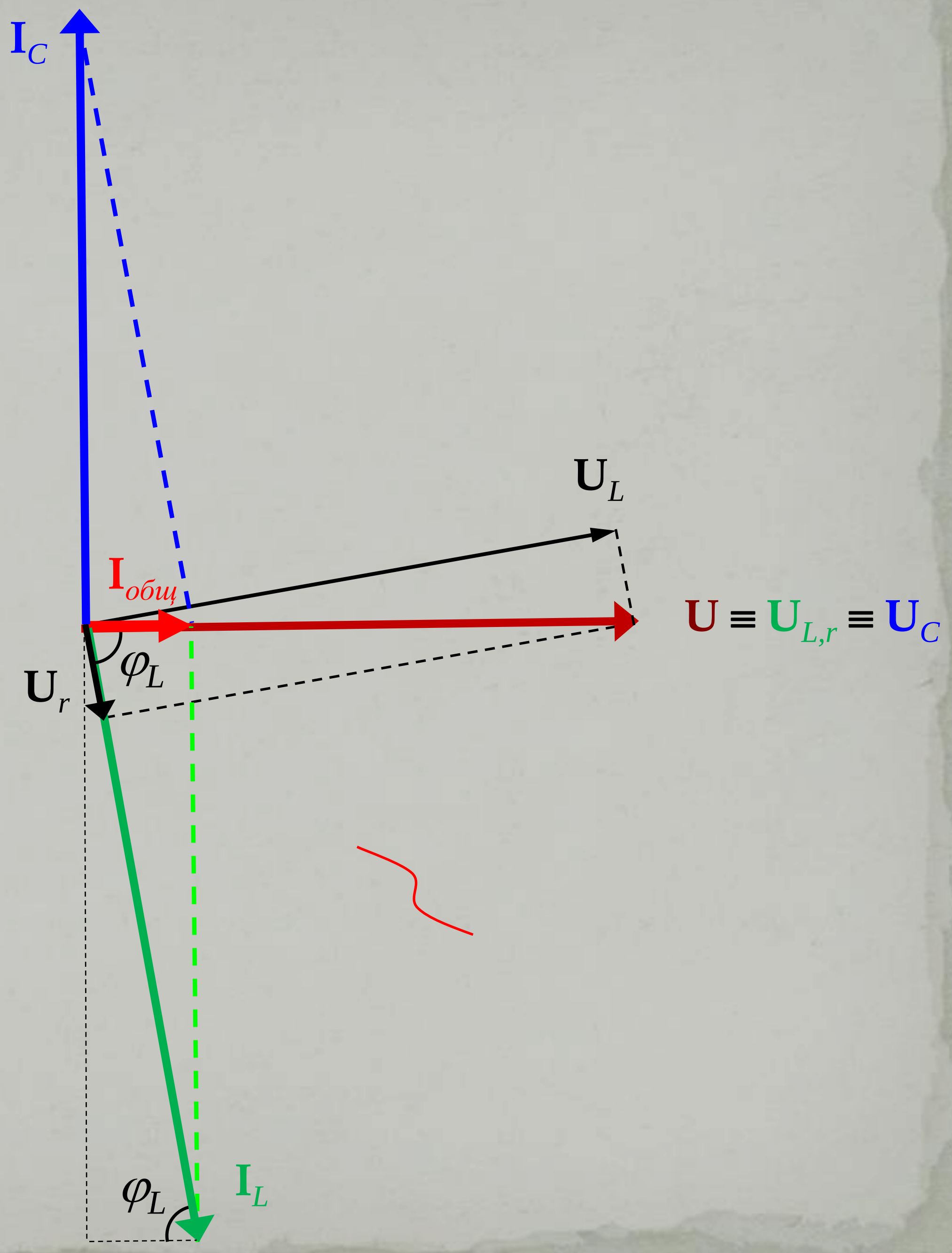
$$\left\{ tg\varphi_L = \frac{\Omega L}{r} \;\Rightarrow\; \sin\varphi_L = \frac{\Omega L}{\sqrt{r^2 + (\Omega L)^2}} \right\}$$

*) Более точно: $\underbrace{\dfrac{U_0}{1/\Omega C}}_{I_{C0}} = \underbrace{\dfrac{U_0}{\sqrt{r^2+(\Omega L)^2}}}_{I_{L0}} \cdot \underbrace{\dfrac{\Omega L}{\sqrt{r^2+(\Omega L)^2}}}_{\sin\varphi_L} \;\Rightarrow\; \Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\beta^2}$

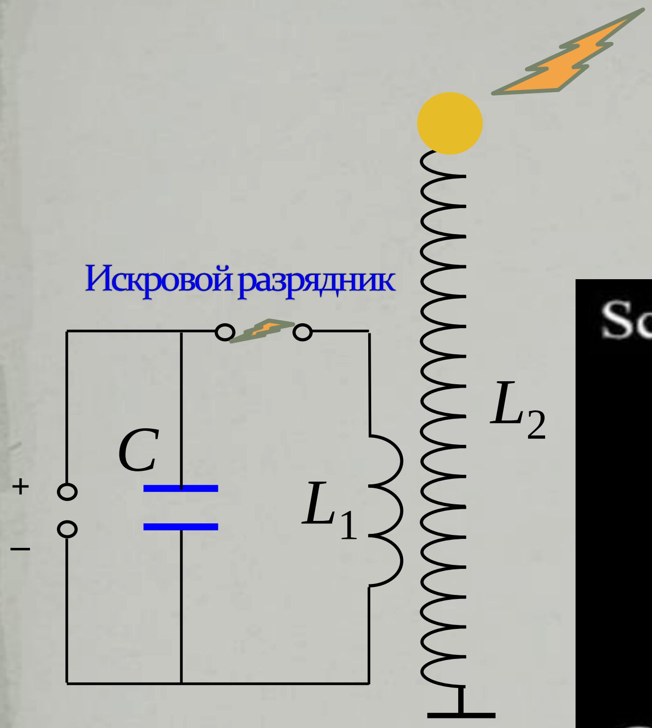
*** *резонанс в параллельном контуре*

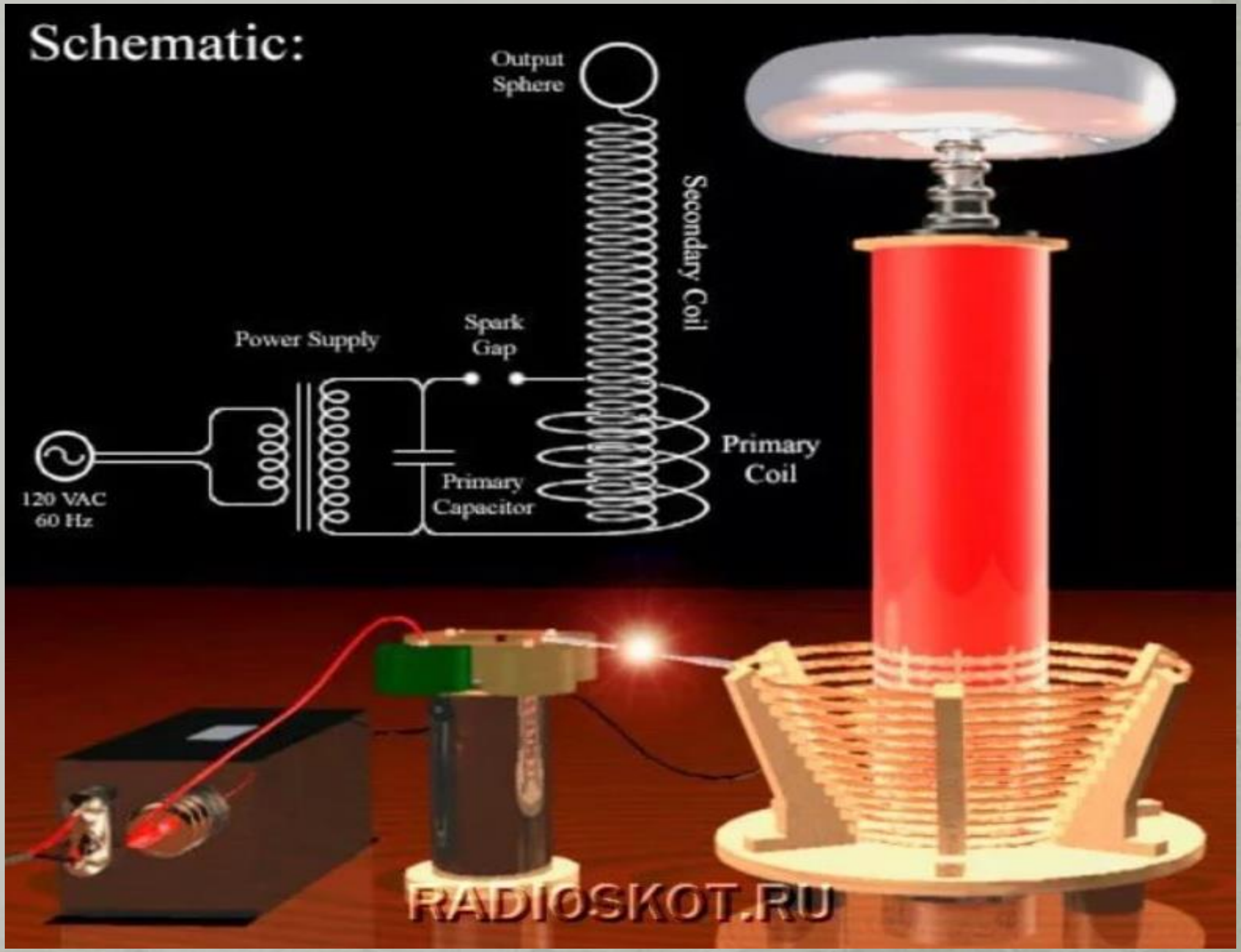
– другой вариант процедуры *построения векторной диаграммы*





Ещё про резонанс: резонансный трансформатор Тесла





Глава III. Волны

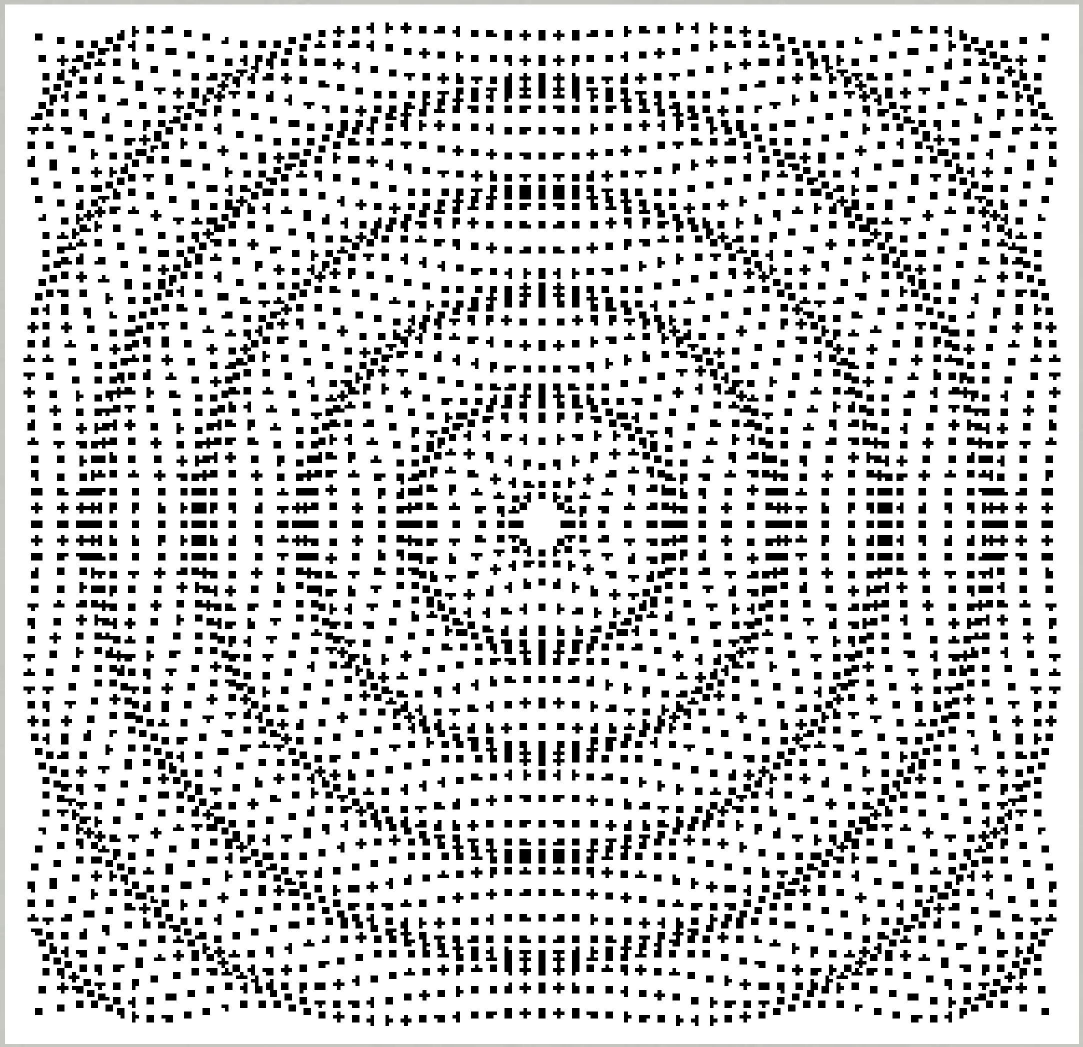
“Путешественнику на корабле кажется, что океан состоит из волн, а не из воды”

А. Эддингтон, 1929

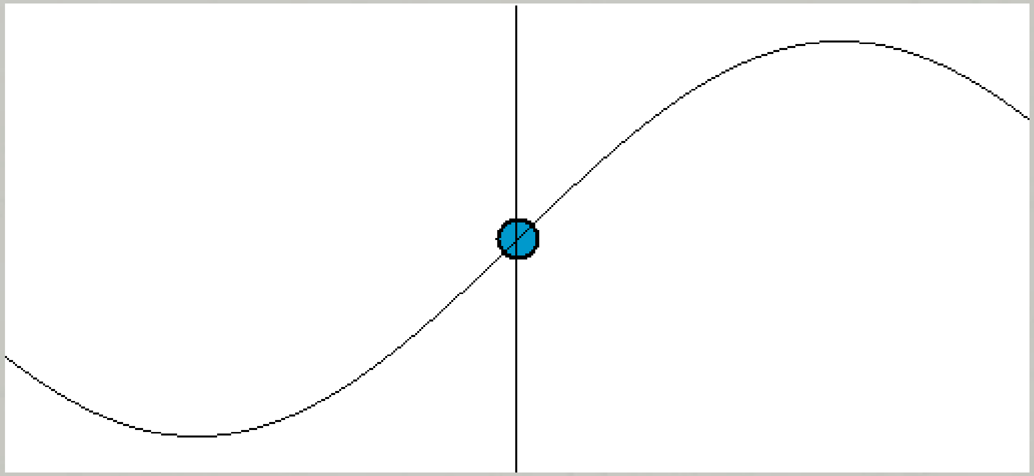
- (**Опр.**) ***Волна – процесс распространения колебаний в пространстве***

… ?

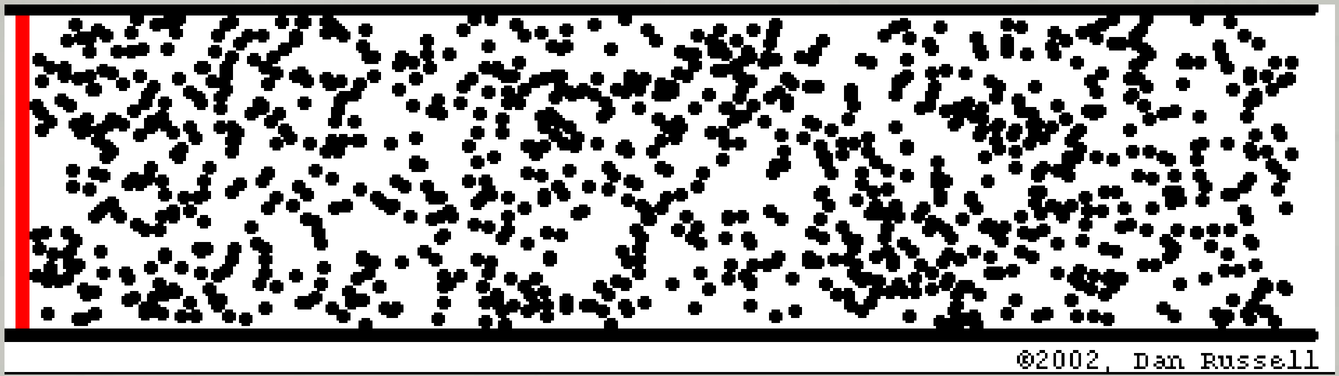
Волны



Волны



Волны

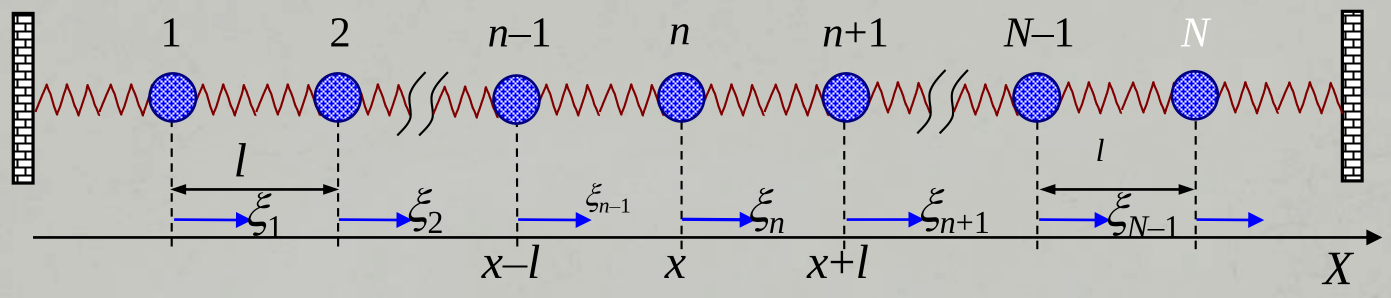


Волны

Волны

§ 1. Упругие волны

1.1. Дифференциальное волновое уравнение



Модель:

1) система состоит из длинной цепочки большого количества одинаковых связанных атомов массы *m* (*“химическая аналогия”*);

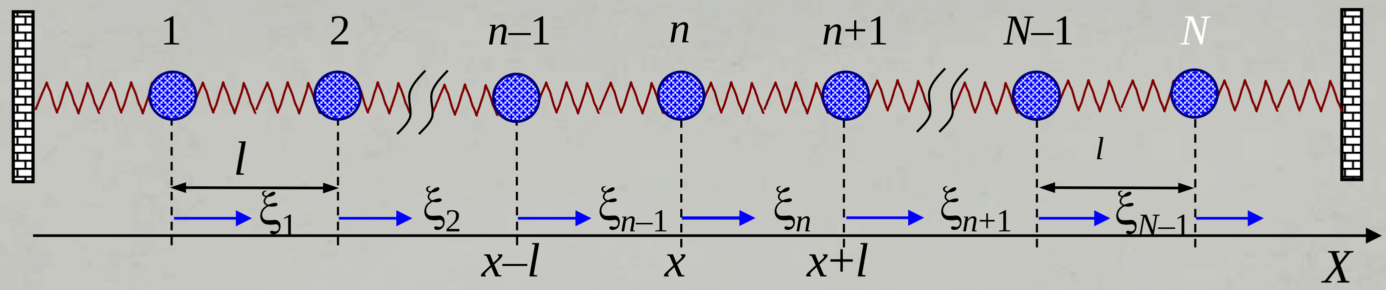
2) система консервативна;

3) амплитуды колебаний малы, силы квазиупруги и моделируются пружинами жёсткости *к* *);

4) расстояние *l* между соседними осцилляторами очень мало;

5) соседние шарики-атомы движутся почти одинаково (исключаем из рассмотрения наиболее высокочастотные моды колебаний).

К выводу дифференциального волнового уравнения



$$m\ddot{\xi}_n = -\kappa(\xi_n - \xi_{n-1}) + \kappa(\xi_{n+1} - \xi_n)$$

$l \to 0$: $\quad \xi_n \to \xi(x,t)$

$$\xi_{n+1} = \xi(x+l,t) \approx \xi(x,t) + \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot l + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\cdot\frac{l^2}{2}$$

$$\xi_{n-1} = \xi(x-l,t) \approx \xi(x,t) - \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot l + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\cdot\frac{l^2}{2}$$

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\kappa l^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

Обозначим

$$\frac{\kappa l^2}{m}=\upsilon^2$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\upsilon^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$$

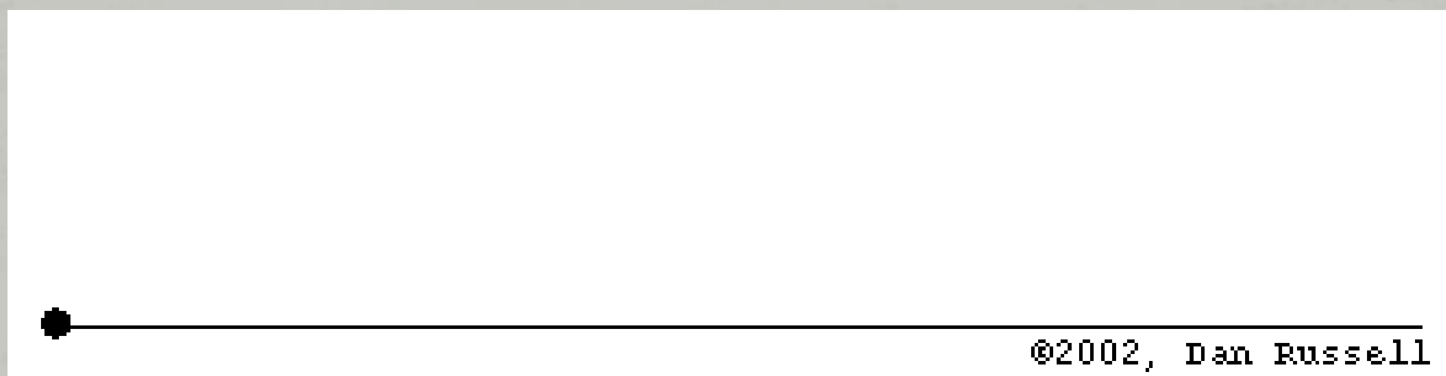
Это одномерное “Классическое дифференциальное волновое уравнение”

“Трёхмерный” случай

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\upsilon^2\cdot\Delta\xi$$

$$\left(\text{"}\textit{оператор Лапласа}\text{"}:\quad \Delta\xi=\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right)$$

Волны



♣ *Замечания*

(*Опр.*)

1) ***Волна называется продольной (поперечной), если колебания происходят вдоль (перпендикулярно) направления распространения возмущений***

2) *Для поперечной вместо* $\upsilon^2 = \dfrac{\kappa l^2}{m}$: $\kappa \rightarrow \dfrac{T}{l}$ $\upsilon^2 = \dfrac{Tl}{m}$

1.2. Уравнение волны

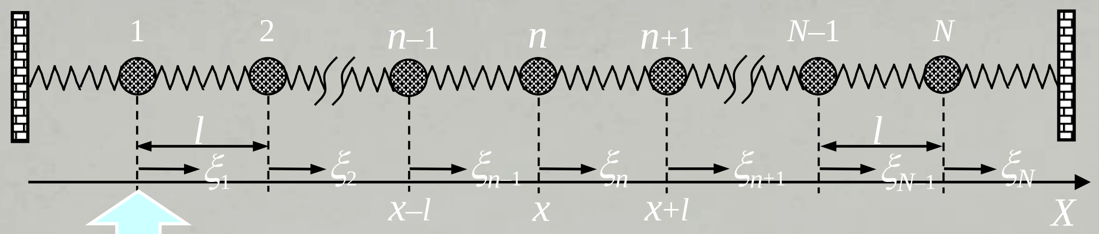
(*Опр.*) ***Уравнением упругой волны называется соотношение, описывающее зависимость смещения колеблющихся частиц*** $\xi(x,t)$ ***от координат и времени в явной форме:***

$$\xi = \xi(x,t) \quad \textit{или} \quad \xi = \xi(x,y,z,t)$$

Уравнение волны – функция, являющаяся решением ***волнового уравнения***

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Уравнение волны (2)



$$\xi(0,t) = A\cos\omega t$$

запаздывание на $\tau = x/\upsilon$

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos[\omega(t-\tau)]; \qquad \xi(x,t) = A\cdot\cos[\omega t - \omega\cdot x/\upsilon];$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T};$$

"Длина волны": $\lambda = \upsilon\cdot T$

$$\frac{\omega\cdot x}{\upsilon} = \frac{2\pi\cdot x}{T\cdot\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x$$

"Волновое число": $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos(\omega t - kx);$$

или $\xi(x,t) = A\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\cdot t - \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot x\right)$

(***Опр.***) ***Уравнением гармонической бегущей волны называется функция координат и времени вида:***

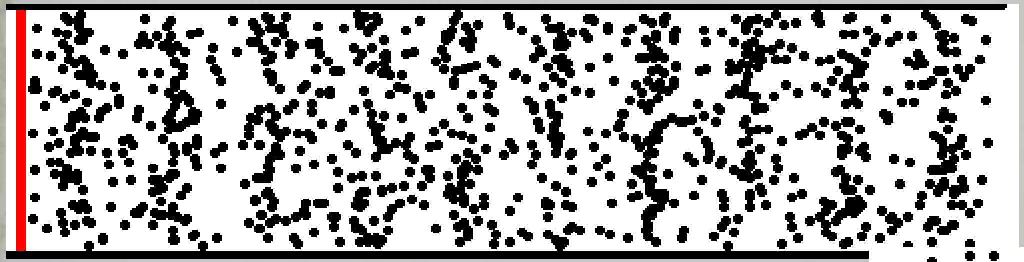
$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$$

Замечания

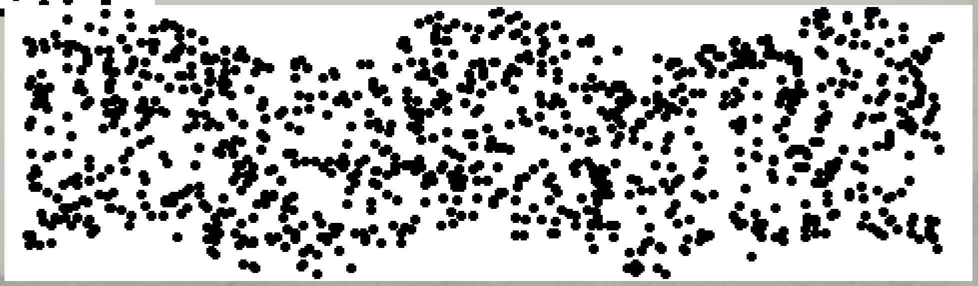
1) Только ли “cos” ?? … ***любая f***$(t - x/\upsilon)$;

2) гармоническая; “бегущая” (“+”); “плоская” (?); в среде без поглощения.

Продольные волны



Поперечные волны



(**Опр.**) **Волновой поверхностью** *называют такую поверхность, колебания во всех точках которой, происходят в одной и той же фазе*

Волновая поверхность, служащая «передней» границей «возмущённой» области пространства, называется ***волновым фронтом***

(**Опр.**) *Длиной волны (λ) называется расстояние, на которое фронт волны (или любая волновая поверхность) смещается за один период колебаний*

♣ *Замечания*

… 2) Эта волна …

- **а.** *гармоническая;*
- **б.** *"бегущая" («+»);*
- **в.** *в среде без поглощения;*
- **г.** *"плоская".*

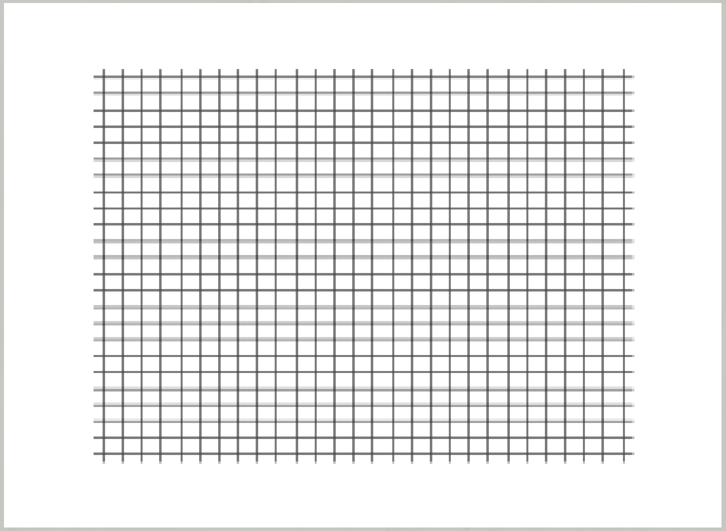
$$\xi(x,t) = A \cdot \cos(\omega t - kx)$$

… ?

Уравнение волны (5)

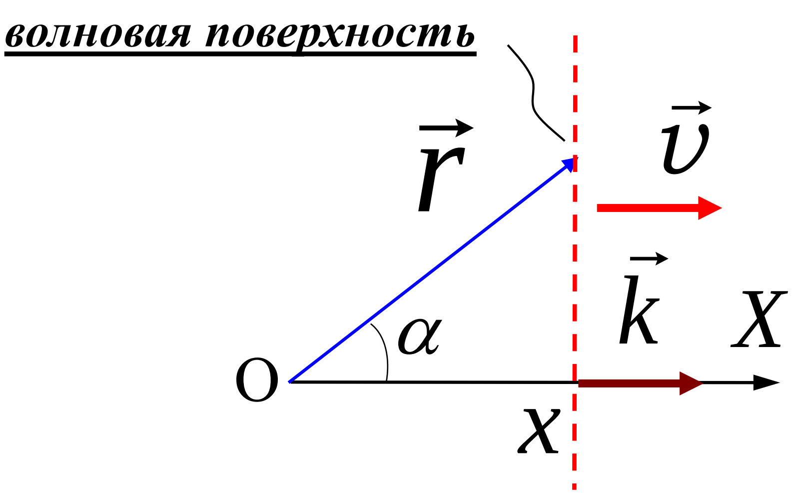
♣ … “*плоская*” … ?

Если фронт волны и волновые поверхности – плоскости, то волну называют ***плоской***



$$x << D \qquad (D - \textit{размер источника})$$

Плоская волна



$$\vec{k} = k\vec{\upsilon}$$

Волновая вектор

$$kx = k \cdot r \cdot \cos\alpha = \vec{k} \cdot \vec{r}$$

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

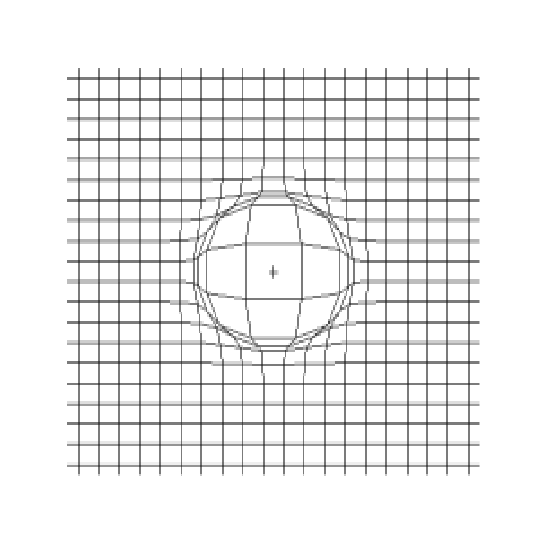
1.3. “Другие” волны

Сферическая волна

Если волновые поверхности имеют сферическую форму, волну называют сферической

$$D << x, r$$

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r} \cdot \cos(\omega t - kr)$$



♣ *Замечания*

1)нет поглощения средой, но энергия “разбегается”;

2)А если есть?

а. Плоская волна: $A(x) = A_0 \cdot e^{-\eta x}$

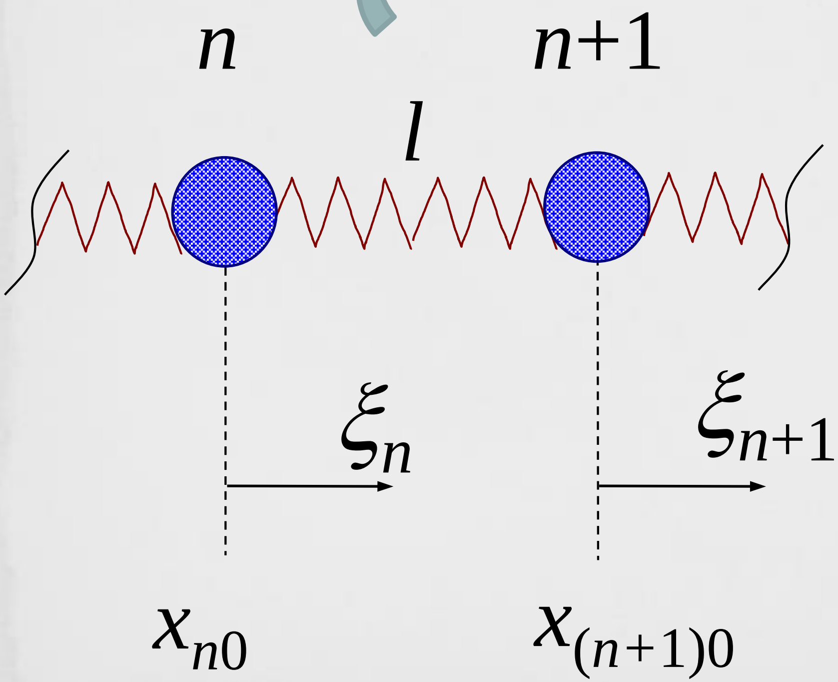
б.Сферическая волна: $A(r) = \frac{A_0}{r} \cdot e^{-\eta r}$

1.4. Энергия упругой волны

$$U = \frac{\kappa \cdot (\textit{деформация})^2}{2}$$

$$\textit{деформация:} \quad \xi(x+l,t) - \xi(x,t) \approx \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot l$$

(дифференциал)



$$U = \frac{\kappa}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} l\right)^2 = \frac{\kappa l^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2;$$

$$\upsilon^2 = \frac{\kappa l^2}{m}; \qquad \upsilon - \textit{фазовая скорость волны!!}$$

$$U = \frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2;$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2; \qquad U = \frac{m\upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2; \qquad W = T + U;$$

$$W = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\frac{dW}{dV} = w \quad (\textit{плотность энергии})$$

$$w = \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \upsilon^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right]$$

Энергия упругой волны (3)

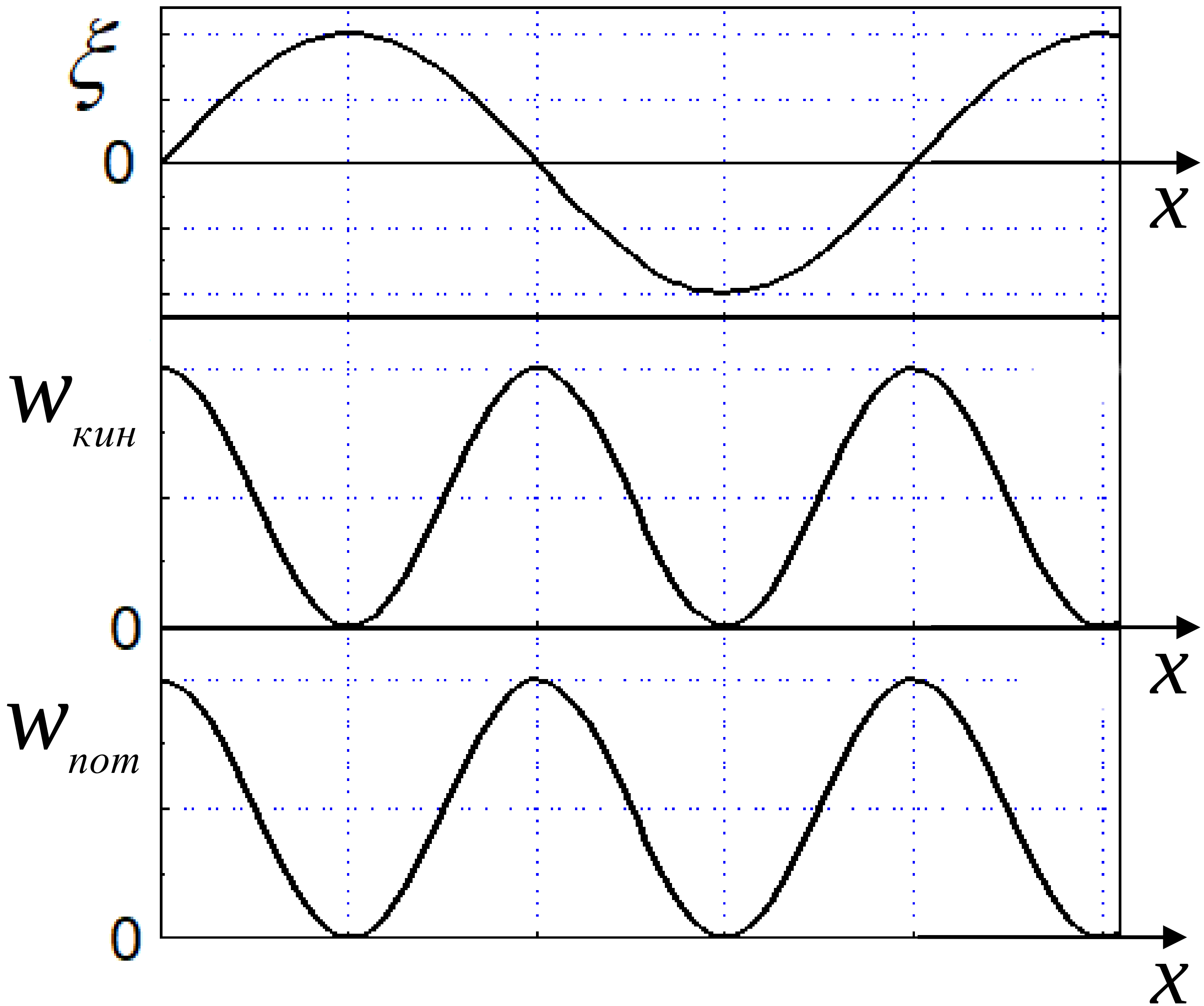
$$w_{кин} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \frac{\rho}{2} A^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

$$w_{пот} = \frac{\rho \upsilon^2}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \frac{\rho \upsilon^2}{2} A^2 k^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

(*с учётом* $\upsilon = \omega / k$) $\quad w_{пот} = \frac{\rho}{2} A^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$

$$w = w_{кин} + w_{пот}\,; \qquad w = \rho A^2 \omega^2 \cdot \sin^2(\omega t - kx)$$

$t = t_0$ – “*мгновенная фотография*”



Характеристики переноса энергии упругой волны

$$w = w(x,t)$$

$$S(t) = w(t)\cdot\upsilon$$

“Плотность потока энергии” – энергия, переносимая волной в единицу времени через «единичную площадку», перпендикулярную направлению распространения волны

“Интенсивностью волны” называется среднее по времени значение плотности потока её энергии

$$\langle w\rangle_t = \langle \rho A^2\omega^2\cdot\sin^2(\omega t - kx)\rangle_t = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

$$I = \langle S\rangle_t = \langle w\rangle_t\cdot\upsilon = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\upsilon$$

Вектор Умова:

$$\vec{S} = w(t) \cdot \vec{\upsilon}$$

«векторная интенсивность»:

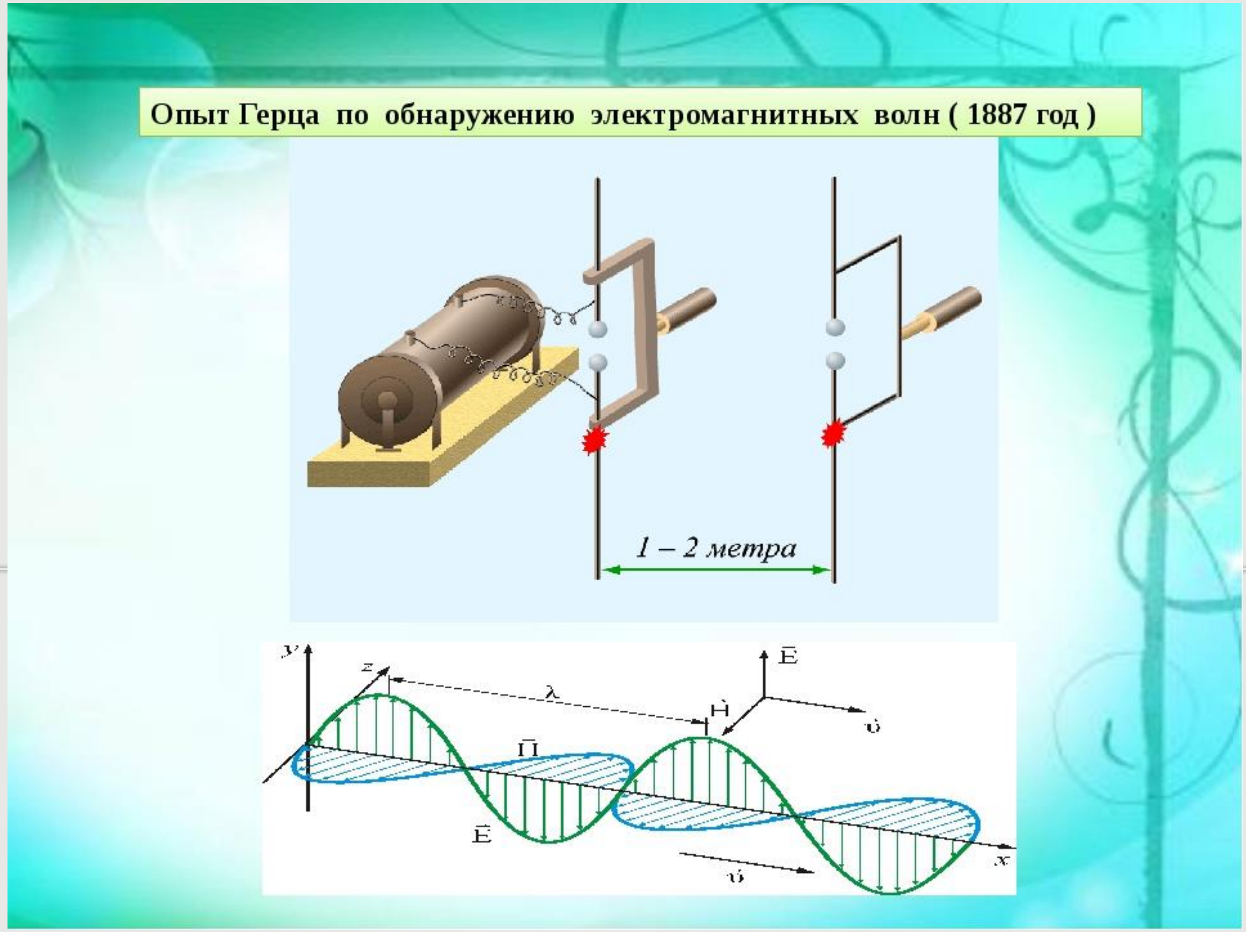
$$\left\langle \vec{S} \right\rangle = \langle w \rangle \cdot \vec{\upsilon} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cdot \vec{\upsilon}$$

Поток энергии:

$$\Phi = \int_{\Sigma} \underbrace{\left\langle \vec{S} \right\rangle \cdot d\vec{s}}_{} = \int_{\Sigma} \langle S_n \rangle ds$$

скалярное произведение

§ 2. Электромагнитные волны



Г. Герц о своём открытии электромагнитных волн :

"Это абсолютно бесполезно. Это только эксперимент, который доказывает, что маэстро Максвелл был прав" – (1888 г.) ☺

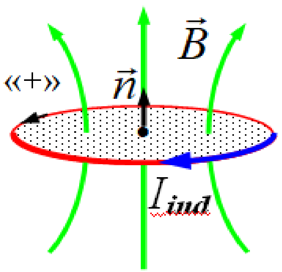
2.1. Два уравнения Максвелла (две гипотезы)

2.1.1. *Первая гипотеза Максвелла: “Вихревое электрическое поле”*

ЭМИ Rem:

Что «толкает электроны» **?**

$$\mathcal{E}_{ind} = \oint\limits_{"C"} \vec{E}^* \cdot d\vec{l}$$



ЭМИ “по Максвеллу” :

$$\oint\limits_{C} \vec{E}^* \cdot d\vec{l} = -\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \qquad \textbf{(I)}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{E}$$

2.1.2. *Вторая гипотеза Максвелла: “Ток смещения”*

$$I_{см} = \varepsilon\varepsilon_0 \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Теорема о циркуляции “по Максвеллу” :

$$\oint\limits_{C} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu\mu_0 \cdot \left(\int\limits_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon\varepsilon_0 \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right) \qquad \textbf{(II)}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B}$$

Модель:

1) Среда однородная и непроводящая. Следовательно, в ней не может быть токов проводимости;

$$\Rightarrow \quad \left(\int_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 \right)$$

2) $\vec{E}$ и $\vec{B}$ зависят только от одной пространственной координаты, например, x – т.е.

$$\Rightarrow \quad \vec{E} = \vec{E}(x,t) \quad \text{и} \quad \vec{B} = \vec{B}(x,t) \quad ;$$

($\Rightarrow$ волна плоская)

2.2. Вывод волнового уравнения

Скалярное произведение

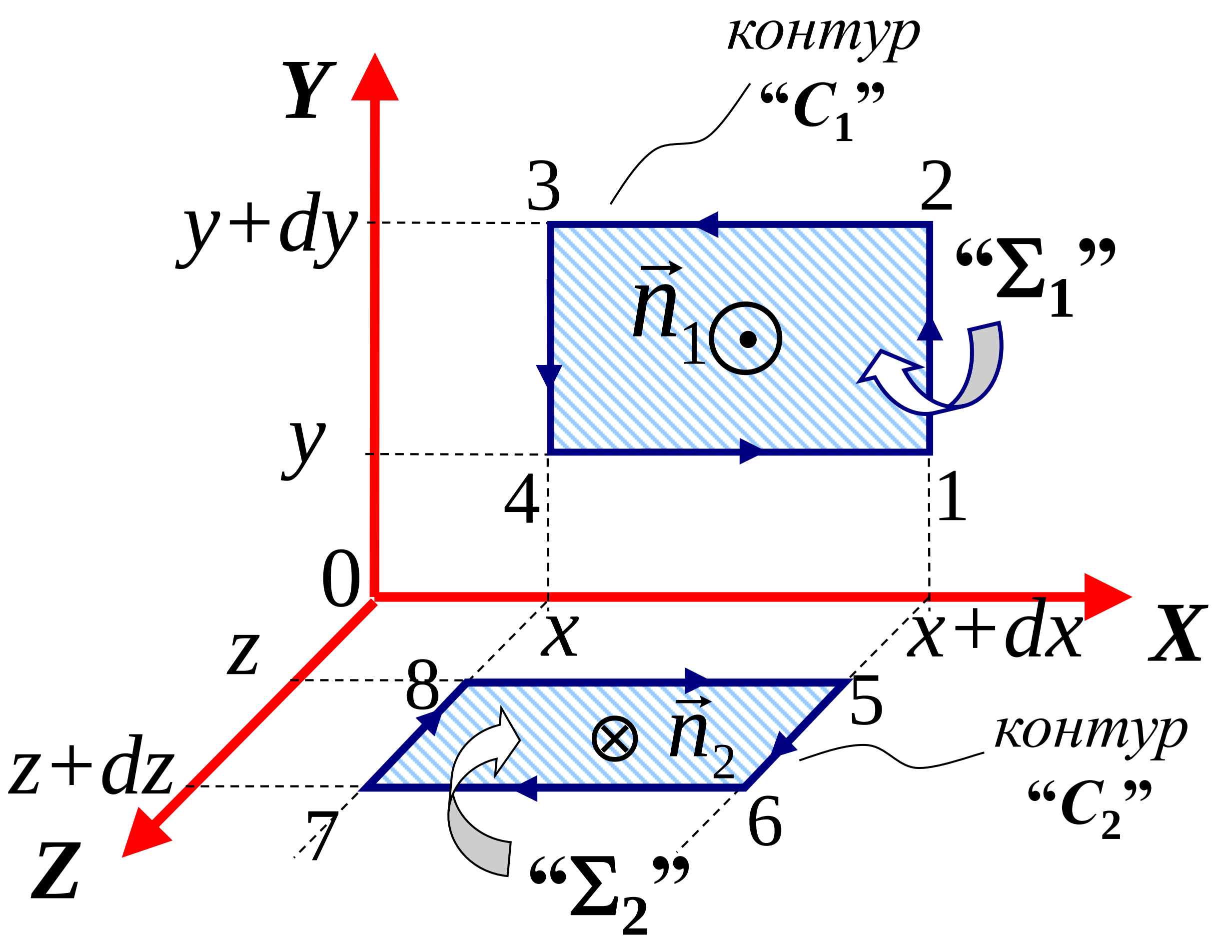
$$\begin{cases} \oint\limits_{"C_1"} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\dfrac{\partial}{\partial t} \int\limits_{"\Sigma_1"} \vec{B} \cdot d\vec{s}\ ; & \text{(I)} \\ \oint\limits_{"C_2"} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \int\limits_{"\Sigma_2"} \vec{E} \cdot d\vec{s} & \text{(II)} \end{cases}$$

ЭМИ "по Максвеллу"

Теорема о циркуляции "по Максвеллу":

$$\left.\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(x,t) \\ \vec{B} &= \vec{B}(x,t) \end{aligned}\right] \overset{?}{\Leftrightarrow} \text{"плоская волна"}$$

К выводу уравнения электромагнитной волны



dx и dy – бесконечно малые **!!**