Погрешности эксперимента

I. Виды погрешностей

Никакие измерения не могут быть абсолютно точными. Измеряя какую-либо величину, мы всегда получаем результат с некоторой погрешностью (ошибкой). Другими словами, измеренное значение величины всегда отличается от истинного ее значения. **Задачей экспериментатора является не только нахождение самой величины, но и оценка допущенной при измерении погрешности**. В зависимости от свойств и причин возникновения различают **систематические**, **случайные** погрешности и **промахи**.

1. Промахи обусловлены главным образом недостаточным вниманием экспериментатора или неисправностями средств измерения. Результаты таких измерений отбрасываются.

2. Систематические погрешности вызываются факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. Они **соответствуют отклонению измеренного значения от истинного всегда в одну сторону** – либо в большую, либо в меньшую.

Систематические погрешности могут быть обусловлены, во-первых, неисправностью или неправильной работе на используемых приборах (например, неправильной установкой "нуля"). Во-вторых, их причиной может быть несовершенство используемой методики измерения или неучет постоянных факторов, влияющих на исследуемое явление. Например, можно получать завышенные значения температуры плавления кристалла, если проводить измерения при повышенном внешнем давлении.

Помимо погрешностей, возникающих в процессе измерений, систематическими являются погрешности, связанные с применением приближенных ("упрощенных") формул, и ошибки, обусловленные отличием реального объекта от принятой модели. Так, например, при определении плотности может возникнуть большая систематическая ошибка, если исследуемый образец не является однородным и содержит внутри пустоты.

После выявления причин систематическую погрешность можно устранить, вводя соответствующую поправку. Обнаружить же систематическую погрешность и установить ее причину бывает не всегда просто, и экспериментатору часто приходится проводить дополнительные исследования. **Предполагается, что в задачах физического практикума систематические погрешности сведены к минимуму при постановке задачи, и ими можно пренебречь**.

3. Случайными называются погрешности, которые при многократных измерениях в одинаковых условиях изменяются непредсказуемым образом.

Случайные погрешности обусловлены множеством неконтролируемых причин, действие которых неодинаково в каждом опыте. В результате этого при измерении одной и той же величины несколько раз подряд в одинаковых условиях получается целый ряд значений этой величины, **отличающихся от истинного значения случайным образом**.

Природа случайных погрешностей может быть различной: флуктуации нулевого положения указателя измерительного прибора; несовершенство органов чувств экспериментатора (например, невозможность включить секундомер точно в нужный момент); случайные неконтролируемые изменения внешних воздействий - температуры, влажности, давления; наводки в электрической цепи и т.д., которые практически невозможно учесть.

Случайные погрешности всегда присутствуют в эксперименте.

Далее будем обсуждать только случайные погрешности

Приводимые ниже «рецепты» **расчетов случайных ошибок** базируются на математическом аппарате теории вероятностей. Следует отдавать себе отчет, что **в условиях практикума при небольшом (n = 3÷10) числе измерений** эти расчеты **всегда носят оценочный характер.**

II. Доверительный интервал.

Задача обработки результатов измерений заключается в том, чтобы определить границы интервала, в котором заключено истинное значение измеряемой величины **– доверительный интервал**. Принята следующая форма записи результата измерений какой-либо величины:

$$\xi = (\langle \xi \rangle \pm \Delta\xi) \ \boldsymbol{ед.\ измерения}, \tag{1}$$

где $\langle\xi\rangle$ – наиболее вероятное значение измеряемой величины ξ, $\Delta\xi$ – определяемая тем или иным способом ***погрешность эксперимента***.

1. Оценка погрешностей прямых измерений

Пусть некоторая величина x измеряется n раз в одинаковых условиях. Измерения дали набор n результатов: $x_1, x_2, ..., x_n$.

За наиболее вероятное значение величины x принимают среднее арифметическое значение результатов измерений

$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ . \tag{2}$$

Частным отклонением (абсолютной погрешностью i-го измерения) называется величина

$$\Delta x_i = x_i - \langle x \rangle . \tag{3}$$

Абсолютная погрешность – величина размерная.

Оценка ***погрешности измерений*** проводится так:

$$\Delta x^{изм} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\Delta x_i| . \tag{4}$$

Относительной погрешностью называется величина

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \ . \tag{5}$$

Относительная погрешность ε_x – величина безразмерная.

Приборная погрешность.

Приборная погрешность является ***паспортной характеристикой прибора (см. приложение)***.

При однократном прямом измерении границы доверительного интервала указываются, исходя лишь из величины приборной погрешности

$$x = (\langle x \rangle \pm \Delta x^{пр}) \ ед.изм. \tag{6}$$

При многократных прямых измерениях необходимо учесть как погрешность измерений, так и приборную погрешность. Такая погрешность называется погрешностью эксперимента.

Для оценки погрешности эксперимента будем использовать упрощённое равенство:

$$\Delta x = \Delta x^{изм} + \Delta x^{пр} . \tag{7}$$

2. Оценка погрешности при косвенных измерениях

Часто величина, интересующая экспериментатора, не может быть измерена непосредственно, а получается путем вычислений, с использованием нескольких непосредственно измеряемых величин. Такие измерения называются косвенными.

Пусть интересующая нас величина ξ вычисляется по некоторой расчётной формуле, требующей знания ряда непосредственно измеряемых величин *x, y, z, ...*:

$$\xi = f(x, y, z, ...).$$

Пусть прямые измерения величин *x, y, z,...* привели к результатам

$$x = (\langle x\rangle \pm \Delta x)\,\text{ед. изм.}$$

$$y = (\langle y\rangle \pm \Delta y)\,\text{ед. изм.}$$

$$\ldots$$

Как определить погрешность косвенно измеряемой величины ξ? Учтём, что чаще всего погрешности непосредственных измерений значительно меньше измеряемых величин, составляя несколько процентов и менее от них. Т.е. $\Delta x \ll |x|$, $\Delta y \ll |y|$, $\Delta z \ll |z|$ ... Тогда формально можно погрешность считать малым приращением измеряемой величины, заменить символы: $\Delta x \approx dx$, $\Delta y \approx dy$, $\Delta z \approx dz$, ... $\Delta\xi \approx d\xi$ – и для нахождения величины $\Delta\xi$ использовать математический аппарат дифференциального исчисления:

$$\Delta\xi = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z\right| + \ldots \tag{8}$$

Здесь $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, ... – частные производные, по соответствующим величинам. Слагаемое $\Delta\xi_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x$ соответствует погрешности, вносимой в полную погрешность $\Delta\xi$ неточностью измерения только величины *x*. Аналогичный смысл имеют все остальные слагаемые.

Если в расчётную формулу входят, наряду с измеренными величинами, ещё и табличные данные, то будем считать, что их всегда можно задать с любой наперёд заданной точностью, и они не вносят дополнительного вклада при вычислении погрешности величины ξ.

Важные замечания

1. И при сложении, и при вычитании измеренных величин абсолютные погрешности складываются (см. табл. 1 приложения). При вычитании двух величин относительная погрешность содержит в знаменателе разность двух величин. Если эти величины близки, то относительная погрешность разности может значительно превышать относительную погрешность каждой величины в отдельности. Во избежание потери точности следует избегать таких измерений и вычислений, когда приходится вычитать близкие по значению величины.

2. Во всех случаях, когда расчетная формула имеет вид

$$\xi = x^{\alpha}\cdot y^{\beta}\cdot z^{\gamma}\cdot\ldots,$$

где α, β, γ – показатели степени, проще и полезнее сначала вычислить не абсолютную, а относительную погрешность величины ξ:

$$\varepsilon_{\xi} = \alpha\cdot\left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \beta\cdot\left|\frac{\Delta y}{y}\right| + \chi\cdot\left|\frac{\Delta y}{y}\right| + \ldots = \alpha\cdot\varepsilon_x + \beta\cdot\varepsilon_y + \gamma\cdot\varepsilon_z + \ldots \tag{9}$$

Абсолютная погрешность вычисляется затем простым домножением на значение косвенно измеренной величины $\langle\xi\rangle$:

$$\Delta\xi = \varepsilon_{\xi} \cdot \langle\xi\rangle. \tag{10}$$

Если в формулы для расчёта погрешностей косвенных измерений (8) или (9) подставлены **погрешности измерений** для величин $x, y, z, \ldots$, то получим погрешность измерений для величины ξ. Если же подставить в них **погрешности приборов** $\Delta x^{пр}$, $\Delta y^{пр}$, $\Delta z^{пр}$, ... , использованных при измерениях $x, y, z, \ldots$, то получим так называемую ***погрешность метода***.

III. Окончательная запись результата

Оценка полной ***погрешности эксперимента*** как при прямых, так и при косвенных измерениях равна:

$$\Delta\xi = \Delta\xi^{изм} + \Delta\xi^{мет}. \tag{11}$$

Роль погрешности метода при прямых измерениях играет $\Delta\xi^{пр}$.

Замечание.

Если одно из слагаемых (11) значительно больше другого, то оно и будет определяющим в оценке общей погрешности. Если при большом количестве измерений погрешность метода много больше погрешности измерений, желательно заменить используемые приборы на более точные или скорректировать методику эксперимента. Если же погрешность метода много меньше погрешности измерений, можно увеличить число измерений для повышения точности эксперимента. Таким образом, всегда целесообразно оценивать погрешность метода перед проведением измерений.

Напомним вид окончательной записи результата с учётом рассчитанной погрешности эксперимента:

$$\boldsymbol{\xi = (\langle\xi\rangle \pm \Delta\xi)\ \textit{ед. изм.}} \tag{1}$$

При численной записи окончательного результата условимся придерживаться следующих правил.

1. При округлении погрешности $\Delta\xi$ оставляют только ***одну*** «значащую» цифру[*)].

2. Результат $\langle\xi\rangle$ измерений округляется ***до того разряда, в котором содержится погрешность***.

Замечание

При записи погрешности «значащими» будем <u>условно</u> называть все цифры кроме «0». В промежуточных расчётах следует использовать на одну значащую цифру больше (“с запасом”).

Пример

Пусть при измерениях величины ξ получен результат:

$$\langle\xi\rangle = \mathbf{341{,}862452}\ \textit{м/с};$$

и оценка погрешности проведённых измерений:

$$\Delta\xi = \mathbf{14{,}2465}\ \textit{м/с}.$$

Окончательная запись результата должна иметь вид:

$$\xi = \mathbf{(340 \pm 20)}\ \textit{м/с}.^{*)}$$

Допустимо, в данном случае, вынести за скобки порядок величин:

[*)] Это округление следует проводить всегда **в большую сторону**. Косвенно, таким образом, учитывается небольшая статистика проведённых измерений в условиях физического практикума.

[*)] Нетрудно догадаться, что речь идёт об измерениях скорости звука в воздухе.

$$\xi = (3{,}4 \pm 0{,}2)\cdot 10^2\ м/с.$$

А вот в случаях, когда полученные результаты измерений имеют вид:

$$\textbf{а)}\ \langle\xi\rangle = \mathbf{299836241}\ \boldsymbol{м/с}, \qquad \Delta\xi = \mathbf{26465}\ \boldsymbol{м/с}.$$

$$\textbf{б)}\ \langle\xi\rangle = \mathbf{0{,}00000062452}\ \boldsymbol{м}, \qquad \Delta\xi = \mathbf{0{,}0000000004465}\ \boldsymbol{м}$$

вынести за скобки порядок величин <u>необходимо обязательно</u>:

$$\textbf{а)}\ c = (\mathbf{2{,}998 \pm 0{,}003})\cdot \mathbf{10^8}\ \boldsymbol{м/с}.\ \text{(скорость света)}$$

$$\textbf{б)}\ \lambda = (\mathbf{6{,}24 \pm 0{,}05})\cdot \mathbf{10^{-7}}\ \boldsymbol{м}. \quad \text{(длина волны света)}$$

В последнем случае ещё лучше использовать соответствующие «дольные» единицы измерения:

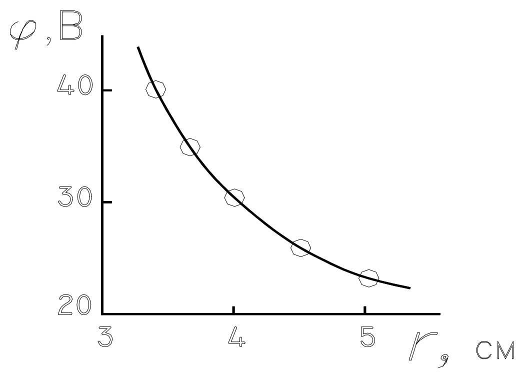
$$\langle\xi\rangle = (\mathbf{624 \pm 5})\ \boldsymbol{нм}.\ \textit{(нанометры)}$$

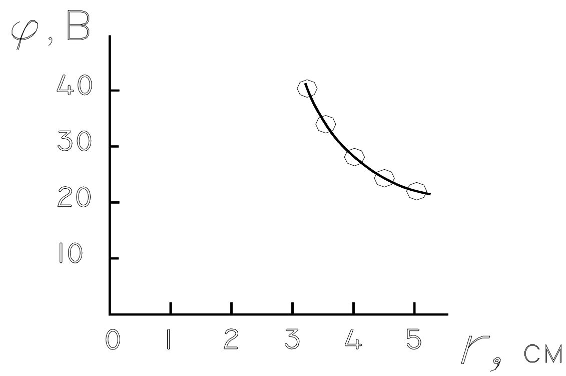
IV. Графическое представление результатов измерений

При оформлении графиков необходимо выполнять следующие правила.

1. Масштабы и начала отсчёта по координатным осям выбираются так, чтобы график занимал большую часть поля чертежа. При этом на пересечении осей не обязательно должны находиться нулевые значения величин.

Правильно **Неправильно**

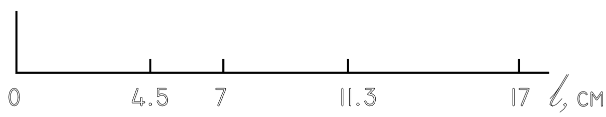




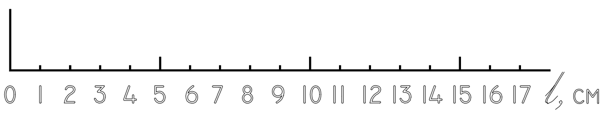
2. В конце координатных осей обязательно указываются обозначения откладываемых величин и, через запятую, их единицы измерения*).

3. На осях координат откладываются равноотстоящие друг от друга деления масштаба так, чтобы было удобно работать с графиком. Конкретные значения, полученные в эксперименте, не указываются.

Неправильно:



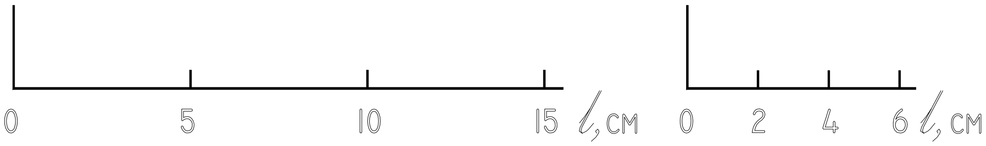
Неудачно:



Правильно:

*) Если отложена безразмерная величина, это также указывают как «отн. ед.» или «a.u.».

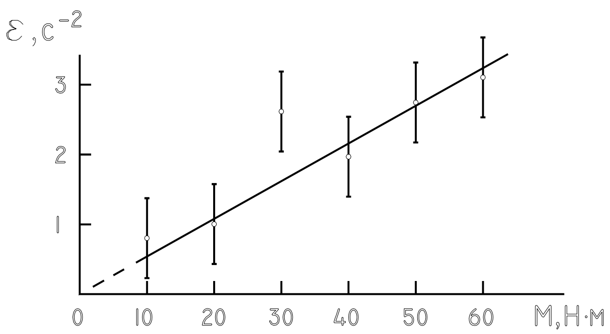
или

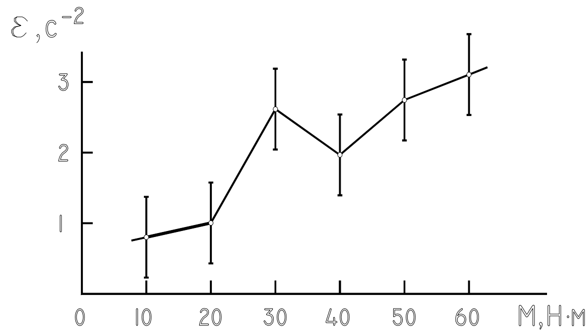


5. Экспериментальные точки наносятся на графике отчетливо, используя одну из форм обозначения: □ ○ △ ● ⊗

6. Экспериментальная кривая проводится плавно, чтобы экспериментальные точки по возможности близко и равномерно располагались с разных сторон кривой.

Правильно:





Неправильно

7. При изображении нескольких кривых на одном поле графика каждая из них нумеруется или выделяется каким-то другим способом. В свободной части поля даются соответствующие пояснения.

8. График должен содержать надпись, из которой было бы ясно физическое содержание представленной закономерности.

Приложение

1. Погрешности некоторых приборов, используемых в лабораториях физического практикума:

1. Штангенциркули (с числом делений нониуса – 10) ……………………….... 0,1 *мм*
2. Микрометры . . . . ………..………………………………..... 0,01 *мм*
3. Технические весы с нагрузкой до 5 *кг* . . . … . . . . . …. ….. . . . ……………….. . 0,1 *г*
4. Секундомеры механические с ценой деления 0,2 и 0,1 с . . ………………. . . . 0,1 *с*
5. Лабораторные ртутные термометры . . . . …. . . . . ……………….… . . . 1°*С*
6. Стрелочные электроизмерительные приборы делятся на **классы точности**, которые обозначаются на шкалах приборов цифрами 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0.

Класс точности равен отношению максимально возможной абсолютной погрешности прибора к величине верхнего предела измерений, выраженной в процентах. Например, у вольтметра класса точности 0,2, предназначенного для измерения напряжения до V_{max} = 300 В, максимальная относительная приборная погрешность у верхнего предела измерений равна 0,2%. А при измерении напряжения V = 50 В относительная погрешность возрастает до величины 1,2%. Следовательно, при измерении вблизи нуля (в первой половине шкалы) значительно уменьшается точность измерения. Измерения в начальной части шкалы нежелательны.

Класс точности определяется для всей совокупности приборов данного вида путем сравнения показаний приборов исследуемой партии с показаниями эталонного прибора (путем градуировки).

Цифровые приборы имеют, как правило, приборную погрешность, составляющую 1-2 единицы последнего индицируемого разряда.

Если сведений о приборной погрешности нет, то считается, что шкала прибора согласована с его классом точности – погрешность отсчёта по этой шкале равна половине её цены деления.

2. Таблица для оценки погрешностей некоторых часто встречающихся при вычислениях комбинаций двух измеряемых величин.

Таблица 1.

	Величина $\xi = f(x,y)$	Абсолютная погрешность $\Delta\xi = \Delta\xi_x + \Delta\xi_y$	Относительная погрешность $\varepsilon_\xi = \frac{\Delta\xi}{\xi}$
1	$x+y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{\left\|\langle x\rangle + \langle y\rangle\right\|}$
2	$x-y$	$\Delta x + \Delta y$	$\frac{\Delta x + \Delta y}{\left\|\langle x\rangle - \langle y\rangle\right\|}$
3	$x \cdot y$	$\left\|\langle x\rangle \cdot \Delta y\right\| + \left\|\langle y\rangle \cdot \Delta x\right\|$	$\left\|\frac{\Delta x}{\langle x\rangle}\right\| + \left\|\frac{\Delta y}{\langle y\rangle}\right\| = \varepsilon_x + \varepsilon_y$
4	$\frac{x}{y}$	$\frac{\left\|\langle x\rangle \cdot \Delta y\right\| + \left\|\langle y\rangle \cdot \Delta x\right\|}{\langle y\rangle^2}$	$\left\|\frac{\Delta x}{\langle x\rangle}\right\| + \left\|\frac{\Delta y}{\langle y\rangle}\right\| = \varepsilon_x + \varepsilon_y$
5	x^n	$\left\|n \cdot \langle x\rangle^{n-1} \Delta x\right\|$	$n \cdot \left\|\frac{\Delta x}{\langle x\rangle}\right\| = n \cdot \varepsilon_x$
6	$\sqrt[n]{x}$	$\left\|\frac{1}{n} \cdot \langle x\rangle^{\frac{1}{n}-1} \Delta x\right\|$	$\frac{1}{n} \cdot \left\|\frac{\Delta x}{\langle x\rangle}\right\| = \frac{1}{n} \cdot \varepsilon_x$

3. Пример. Рассмотрим в качестве примера действия при определении погрешности в том случае, когда в расчётную формулу помимо произведений входит также и сумма различных величин:

$$s = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Обозначим $s_1 = \upsilon_0 t$ и $s_2 = \frac{at^2}{2}$,

где s_1, s_2, υ_0, t, a – средние значения измеренных величин.

Тогда

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta s_1}{s_1} = \frac{\Delta\upsilon_0}{\upsilon_0} + \frac{\Delta t}{t}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{\Delta s_2}{s_2} = \frac{\Delta a}{a} + 2\frac{\Delta t}{t};$$

Затем можно определить абсолютные погрешности составляющих $\Delta s_1 = \varepsilon_1 s_1$ и $\Delta s_2 = \varepsilon_2 s_2$. Сложив их получить окончательно искомую погрешность величины s: $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2$.