Задачи к экзамену по квантовой механике

1. Вычислить оператор $\left(i\dfrac{\partial}{\partial r}\right)^{+}$, где r - радиальная координата сферической системы координат.
2. Показать, что когерентное состояние $\Psi(x)=C\exp\left(\dfrac{ip_0x}{\hbar}-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$, где p_0, a, C - вещественные постоянные, минимизирует соотношение неопределенностей Гейзенберга.
3. Найти с.ф. операторов $\hat{f}_{+}=\dfrac{d}{dx}+x$ и $\hat{f}_{-}=\dfrac{d}{dx}-x$.
4. Рассчитать коммутаторы $\left[x\ ,L_z\right]$, $\left[p_x\ ,L_z\right]$.
5. Найти связь между средними значениями координаты и импульса двух частиц, волновые функции которых Ψ_1 и Ψ_2 связаны соотношением: $\Psi_2(x)=\Psi_1(x)\exp\left(\dfrac{ip_0x}{\hbar}\right), p_0=const.$
6. Система описывается волновой функцией
$$\Psi(\varphi)=C(2i+\sin 2\varphi),$$
где φ – угол поворота вокруг оси z. Найти распределение вероятностей проекции момента импульса на ось z.
7. Состояние частицы массой M задается волновой функцией
$$\Psi(\mathbf{r},t)=C\exp\left(i\frac{\mathbf{pr}-Et}{\hbar}\right),$$
где $\mathbf{p}$ – импульс частицы, $E={p^2}/{2M}$ - энергия частицы, C - нормировочная константа. Найти плотность потока вероятности этой частицы.
8. Найти вероятность отражения частицы от потенциального барьера типа «ступенька».
9. Записать гамильтониан атома гелия.
10. В момент времени $t = 0$ волновая функция частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками ($0 < x < a$) имела вид $C\sin\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi x}{a}\right)$. Найти волновую функцию этой частицы для $t>0$.
11. Волновая функция частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками ($0 < x < a$) имеет вид $C\sin\left(\dfrac{2\pi x}{a}\right)\cos\left(\dfrac{\pi x}{a}\right)$.

    Найти распределение вероятностей энергии частицы.

12. Найти волновые функции и уровни энергии частицы в сферически симметричной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, если ее момент импульса равен нулю.
13. Найти дисперсию импульса гармонического осциллятора в первом возбужденном состоянии.
14. Волновая функция ротатора в сферических координатах имеет вид

$$\psi = C\left(3\sin\theta\sin\varphi + 2i\right).$$

Найти распределение вероятностей момента импульса ротатора.

15. Найти $\langle\cos\theta\rangle$ и $\langle\cos^2\theta\rangle$ в s-состоянии пространственного ротатора.
16. Найти среднее расстояние электрона до ядра в основном состоянии атома водорода.
17. Найти среднюю потенциальную энергию электрона в основном состоянии атома водорода.
18. Рассматривая ядро атома урана как потенциальную яму шириной 10^{-12} см, оценить частоту столкновений α-частицы с ее стенками с помощью соотношения неопределенностей Гейзенберга.
19. Частица со спином ½ находится в состоянии с определенным значением проекции спина на ось *z*, равным +1/2. Определить вероятности возможных значений проекции спина на ось z', если угол между осями z и z' равен θ. Найти дисперсию этой проекции.
20. Найти расщепление первого возбужденного уровня энергии плоского гармонического осциллятора с массой M и частотой ω под действием возмущения $\hat{V} = \alpha xy$ ((x, y) — плоскость колебаний).
21. Определить вероятность перехода заряженной частицы, находившейся в потенциальной яме ($U = 0$ при $0 < x < a$) с бесконечно высокими стенками в основном состоянии, в первое возбужденное состояние под действием слабого переменного электрического поля $E(t) = E_0\exp(-|t|/\tau)$, $E_0, \tau = const$.