МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

А.С. Ильин, П.А. Форш

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Москва, 2023

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

А.С. Ильин, П.А. Форш

ЗАДАЧИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Допущено Федеральным учебно-методическим объединением в системе высшего образования по укрупненной группе специальностей и направлений подготовки 04.00.00 Химия в качестве учебного пособия для обучающихся по основным образовательным программам высшего образования уровня специалитета по специальности 04.05.01 Фундаментальная и прикладная химия

Москва, 2023

Рецензенты:
профессор, доктор физико-математических наук А.В. Борисов
профессор, доктор физико-математических наук И.Я. Полищук
профессор, доктор физико-математических наук Л.И. Трахтенберг

А.С. Ильин, П.А. Форш

Задачи по теоретической механике: Учебное пособие. М. Физический факультет МГУ, 2023. – 215 с.

В учебном пособии представлены задачи, которые в течение ряда лет предлагались на лекциях и семинарских занятиях по теоретической механике студентам химического факультета МГУ. В каждом параграфе приведены основные теоретические сведения, представлены подробные решения типичных задач по изучаемой теме и даны задачи для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено, прежде всего, для студентов химических факультетов университетов, а также будет полезно студентам естественно-научных специальностей, изучающим теоретическую механику.

Оглавление

Предисловие

Несмотря на то, что к настоящему моменту имеется большое количество прекрасных задачников по теоретической механике, использование их вызывает определенные трудности у студентов нефизических специальностей. Это связано с тем, что имеющиеся учебные пособия по теоретической механике, как правило, ориентированы на физиков и математиков, содержат большой объем материала и часто изобилуют сложным математическим аппаратом. В представленном задачнике совершена попытка закрыть этот пробел. В нем представлены задачи, которые в течение ряда лет предлагались на лекциях и семинарских занятиях по теоретической механике студентам химического факультета МГУ. Задачник охватывает следующие разделы теоретической механики: уравнения Лагранжа, задача двух тел, линейные колебания, динамика твердого тела, уравнения Гамильтона, канонические преобразования, уравнения Гамильтона-Якоби и адиабатические инварианты. В начале каждого параграфа приводятся основные теоретические сведения, необходимые для решения задач. Затем представлены подробные решения типичных задач по изучаемой теме и в заключение даны задачи для самостоятельного решения. Ко всем задачам для самостоятельного решения даны ответы, наиболее сложные задачи снабжены указаниями к решению. При подборе задач использовались различные источники, список которых содержится в разделе “Литература”. В приложениях более подробно, чем в основном тексте, рассмотрено представление об идеальных связях и приведены выражения для дифференциальных операций в ортогональных криволинейных системах координат.

Присутствуют приложения по идеальным связям и дифференциальным операторам. Приведены достаточно подробные математические выкладки, при этом мы старались не выходить за рамки стандартных курсов по математике, читаемых на естественных факультетах университетов.

Начало и конец решений задач отмечены знаками □ и ■, соответственно. Для обозначения векторов используются латинские буквы, выделенные жирным шрифтом. Формулы и задачи в пределах каждого параграфа имеют двойную нумерацию. Первое число указывает номер параграфа, второе – номер формулы или задачи. Такая же нумерация принята и для рисунков. Все формулы даны в системе единиц СГС.

Учебное пособие предназначено, прежде всего, для студентов химических факультетов университетов, а также будет полезно студентам естественно-научных специальностей, изучающим теоретическую механику.

Авторы считают приятным долгом поблагодарить профессоров А.В. Борисова, И.Я. Полищука и Л.И. Трахтенберга за ценные рекомендации и замечания, способствовавшие заметному улучшению данного пособия.

§ 1. Обобщенные координаты

Для однозначного определения положения материальной точки (частицы) в пространстве можно задать три декартовы координаты x, y, z. В случае описания механической системы*, состоящей из N свободных материальных точек, необходимо, очевидно, задать $3N$ декартовых координат. Однако использование именно декартовых координат не является обязательным. В зависимости от условий задачи может оказаться целесообразным выбрать какие-либо другие координаты. Любые s независимых величин, однозначно определяющих положение механической системы, называются ее *обобщенными координатами*. Обобщенные координаты будем обозначать буквами $q_1, q_2, \dots, q_s$.

В общем случае положение точки A в пространстве можно определить ее радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$, начало которого расположено в некоторой фиксированной точки O. Радиус-вектор в пространстве определяется тремя обобщенными координатами q_1, q_2, q_3.

Если зафиксировать одну из величин q_α $(\alpha = 1,2,3)$, например

$$q_1 = \text{const},$$

и изменять непрерывно две другие q_2 и q_3, то полученные точки будут принадлежать некоторому семейству поверхностей. Таким же образом уравнения $q_2 = \text{const}$ (q_1 и q_3 – переменные) и $q_3 = \text{const}$ (q_1 и q_2 – переменные) определяют, соответственно, еще два других семейства поверхностей. Если поверхности таковы, что через каждую точку A пространства проходит одна и только одна поверхность каждого семейства, то положение точки однозначно определяется пересечением этих трех поверхностей.

Пересечение двух координатных поверхностей дает линию. На этой линии значения двух координат постоянны, а третья меняется. Эти линии, соответствующие изменению одной из координат, называются *координатными линиями*.

* Под механической системой будем понимать любую совокупность материальных точек.

Условимся положительным направлением на координатной линии q_α называть направление, в котором перемещается точка при увеличении q_α. Направления координатных линий определяют при помощи трех единичных векторов (ортов) $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Эти векторы являются касательными к соответствующим координатным линиям и направлены в сторону возрастания соответствующих координат. Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ образуют *локальный (местный) базис* системы координат.

Системы координат, в которых векторы базиса в каждой точке пространства взаимно перпендикулярны, называются *ортогональными*. Ортогональные системы наиболее распространены в приложениях, хотя, конечно, условие ортогональности системы не обязательно для обобщенных координат (q_1, q_2, q_3).

Касательные к координатным линиям, на которых установлено положительное направление базисными векторами, называются *координатными осями* криволинейной системы координат.

В случае прямоугольной декартовой системы координат положение точки A определяется расстояниями $q_1 = x,\ q_2 = y,\ q_3 = z$, с соответствующими знаками, отсчитываемыми от трех взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих через точку O (начало координат). Координатные линии и локальный базис для прямоугольной декартовой системы координат представлены на рисунке 1.1 ($\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z -$ орты прямоугольной декартовой системы координат). Следует отметить, что в случае декартовой системы координат (прямоугольной и косоугольной), базисные векторы совпадают для всех точек пространства. Этим свойством обладает только декартова система координат. Для любой криволинейной системы координат базисные векторы различны для различных точек пространства.

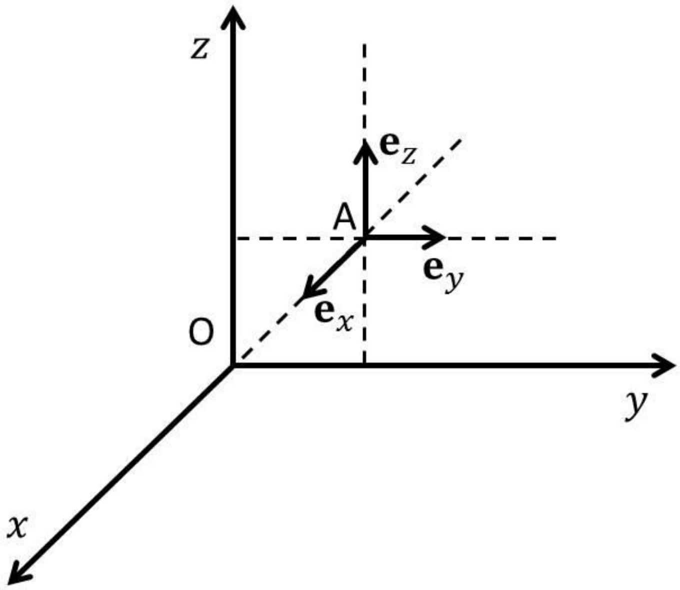


Рис. 1.1

В *цилиндрической системе* координат положение точки A задается ее аппликатой $z = AB$ и полярными координатами $\rho = OB$, $\varphi = \angle xOB$ (рис. 1.2). Координаты ρ, φ, z могут изменяться в пределах: $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Прямоугольные и цилиндрические координаты связаны соотношениями

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi; \\ y = \rho\sin\varphi; \\ z = z. \end{cases} \tag{1.1}$$

Координатными линиями цилиндрической системы являются: прямая ($\rho = \text{const}, \varphi = \text{const}$), прямая ($\varphi = \text{const}, z = \text{const}$) и окружность ($\rho = \text{const}$, $z = \text{const}$). Координатные линии и локальный базис для цилиндрической систем координат показаны на рисунке 1.2 ($\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z -$ орты цилиндрической системы координат).

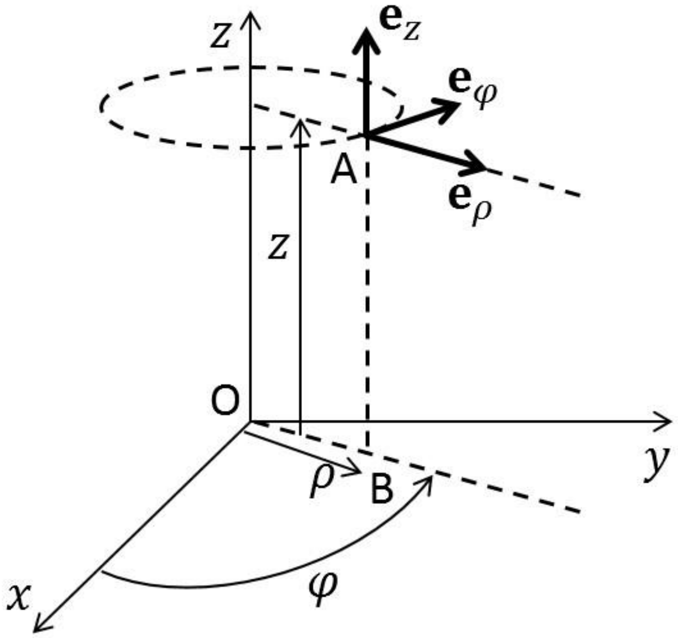


Рис. 1.2

В *сферической системе* координат положение точки A можно определить следующими тремя величинами (рис. 1.3): расстоянием $r = OA$, углом $\theta = \angle zOA$ между лучами Oz и OA, углом $\varphi = \angle xOB$ (B – проекция точки A на плоскость xy). При этом $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. Прямоугольные и сферические координаты связаны равенствами

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi; \\ y = r\sin\theta\sin\varphi; \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \quad (1.2)$$

В сферической системе координатные линии (рис. 1.3) – это окружность ($r = \text{const}, \varphi = \text{const}$), окружность ($r = \text{const}, \theta = \text{const}$) и прямая ($\varphi = \text{const}, \theta = \text{const}$). Координатные линии (обозначены пунктиром) и локальный базис для сферической системы координат приведены на рисунке 1.3 ($\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ – орты сферической системы координат). Ось z (от которой отсчитывается угол θ) часто называют *полярной осью* сферической системы координат.

Прямоугольная декартова, цилиндрическая и сферическая системы координат являются ортогональными.

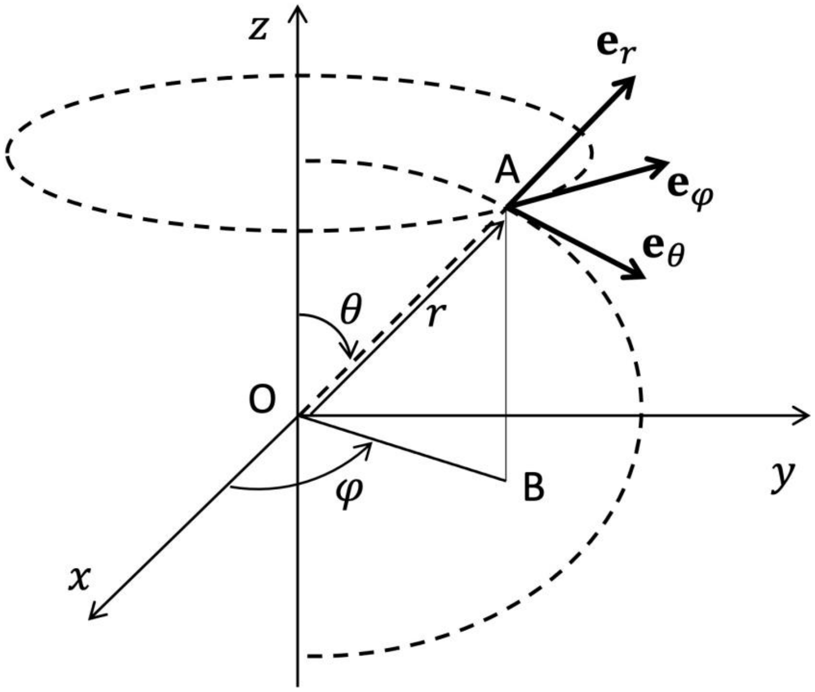


Рис. 1.3

Производные от обобщенных координат по времени $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ называются *обобщенными скоростями*. Здесь и далее производные по времени от какой-либо функции f будем обозначать $\dot{f}$, т.е.

$$\dot{f} = \frac{df}{dt}.$$

Производные второй степени по времени от f будем обозначать $\ddot{f}$.

Задача 1.1. Запишите вектор скорости частицы в цилиндрических координатах.

□ Радиус-вектор частицы в цилиндрической системе координат:

$$\boldsymbol{r} = \rho \boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z.$$

Скорость частицы по определению есть

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\boldsymbol{e}}_\rho + \dot{z}\boldsymbol{e}_z. \tag{1.3}$$

Здесь учтено, что при движении частицы направление орта $\boldsymbol{e}_\rho$ меняется, поэтому производная по времени от $\boldsymbol{e}_\rho$ не равна нулю, в отличие от производной от $\boldsymbol{e}_z$.

Для нахождения $\dot{\boldsymbol{e}}_\rho$ запишем связь между ортами цилиндрической системы координат $\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ и прямоугольной декартовой системы координат $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$:

$$\boldsymbol{e}_\rho = \boldsymbol{e}_x cos\varphi + \boldsymbol{e}_y sin\varphi,$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{e}_x sin\varphi + \boldsymbol{e}_y cos\varphi,$$

$$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z.$$

Так как при перемещении частицы положение ортов прямоугольной декартовой системы координат фиксировано, то

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\rho = -\boldsymbol{e}_x \dot{\varphi} sin\varphi + \boldsymbol{e}_y \dot{\varphi} cos\varphi = \dot{\varphi}\left(-\boldsymbol{e}_x sin\varphi + \boldsymbol{e}_y cos\varphi\right) = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Тогда в соответствии с (1.3) скорость частицы в цилиндрической системе координат

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z.$$

Проекции скорости на координатные оси цилиндрической системы есть

$$v_\rho = \dot{\rho}, \qquad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \qquad v_z = \dot{z}.$$

Заметим, что $\dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z}$ – это, по определению, обобщенные скорости. ■

Задача 1.2. Запишите вектор скорости частицы в сферических координатах.

□ Радиус-вектор частицы в сферической системе координат

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r.$$

Скорость частицы

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\boldsymbol{e}}_r. \tag{1.4}$$

Для нахождения $\dot{\boldsymbol{e}}_r$ запишем связь между ортами сферической системы координат $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ и ортами прямоугольной декартовой системы координат $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$:

$$\boldsymbol{e}_r = (\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\boldsymbol{e}_y)\sin\theta + \cos\theta\boldsymbol{e}_z,$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = (\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\boldsymbol{e}_y)\cos\theta - \sin\theta\boldsymbol{e}_z,$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = -\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\boldsymbol{e}_y.$$

Тогда учтем, что при движении точки положения ортов прямоугольной декартовой системы координат не изменяется

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\left[(\cos\varphi\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\boldsymbol{e}_y)\cos\theta - \sin\theta\boldsymbol{e}_z\right] + \left[-\sin\varphi\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\boldsymbol{e}_y\right]\dot{\varphi}\sin\theta.$$

Первая квадратная скобка данного выражения есть не что иное, как орт $\boldsymbol{e}_\theta$, а вторая – орт $\boldsymbol{e}_\varphi$. Таким образом,

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Подставляя это выражение в (1.4), получим

$$\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Проекции скорости на координатные оси сферической системы:

$$v_r = \dot{r}, \qquad v_\theta = r\dot{\theta}, \qquad v_\varphi = r\sin\theta\dot{\varphi}.$$

Отметим, что $\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ – обобщенные скорости. ■

Задача 1.3. Запишите вектор ускорения частицы в цилиндрической системе координат.

□ Используя найденное в задаче 1.1 выражение для скорости в цилиндрической системе координат, получим

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\boldsymbol{e}}_\rho + (\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z. \tag{1.5}$$

В задаче 1.1 было найдено, что $\dot{\boldsymbol{e}}_\rho = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$. Дифференцируя по времени вектор $\boldsymbol{e}_\varphi = -\boldsymbol{e}_x\sin\varphi + \boldsymbol{e}_y\cos\varphi$ (см. задачу 1.1), имеем

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}(\boldsymbol{e}_x\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y\sin\varphi) = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\rho.$$

Подставляя выражения для $\dot{\boldsymbol{e}}_\rho$ и $\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi$, находим выражение для вектора ускорения

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z.$$

Проекции ускорения на координатные оси цилиндрической системы есть

$$a_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2),\ \ a_\varphi = (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}),\ \ a_z = \ddot{z}. \blacksquare$$

Для нахождения скорости и ускорения в ортогональных криволинейных системах координат удобно использовать *коэффициенты Ламе*. Если радиус-вектор частицы рассматривать как вектор-функцию обобщенных координат q_1, q_2, q_3, т.е.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1, q_2, q_3),$$

то коэффициенты Ламе в ортогональной системе координат определяются соотношениями

$$h_\alpha = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right| \quad (\alpha = 1,2,3). \tag{1.6}$$

Для вычисления коэффициентов Ламе удобно радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ выразить через декартовы координаты посредством равенства

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

и переписать формулу (1.6) в виде

$$h_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_\alpha}\right)^2} \quad (\alpha = 1,2,3), \tag{1.7}$$

где x, y, z рассматриваются как функции обобщенных координат q_1, q_2, q_3.

Задача 1.4. Найдите коэффициенты Ламе для а) цилиндрической и б) сферической систем координат.

□ а) Учитывая, что декартовы координаты связаны с цилиндрическими соотношениями (1.1), по формуле (1.7) имеем:

$$h_1 = h_\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,$$

$$h_2 = h_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi} = \rho,$$

$$h_3 = h_z = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

б) Связь декартовых координат со сферическими выражается равенствами (1.2), учитывая которые, получаем:

$$h_1 = h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1,$$

$$h_2 = h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2(\cos^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta)} = r,$$

$$h_3 = h_\varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{r^2(\sin^2\theta\sin^2\varphi + \sin^2\theta\cos^2\varphi)} = r\sin\theta. \blacksquare$$

Задача 1.5. Найдите скорость частицы в ортогональной криволинейной системе координат.

□ При движении частицы ее радиус-вектор зависит от времени через обобщенные координаты, т.е.

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q_1(t), q_2(t), q_3(t)).$$

Скорость точки

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3, \tag{1.8}$$

где $\dot{q}_\alpha = dq_\alpha/dt$ – обобщенные скорости точки ($\alpha = 1{,}2{,}3$). Поскольку производные $\partial\boldsymbol{r}/\partial q_\alpha$ направлены так же, как и базисные векторы, можно записать:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha} = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right| \boldsymbol{e}_\alpha = h_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha. \tag{1.9}$$

С помощью этого равенства находим:

$$\boldsymbol{v} = h_1\dot{q}_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\dot{q}_2\boldsymbol{e}_2 + h_3\dot{q}_3\boldsymbol{e}_3,$$

откуда видно, что проекции скорости на оси криволинейной системы координат

$$v_\alpha = h_\alpha \dot{q}_\alpha.$$

Отсюда, с учетом найденных коэффициентов Ламе в задаче 1.4, легко получить выражения для скорости в цилиндрической и сферической системах координат, найденные в задачах 1.1 и 1.2. ■

Задача 1.6. Найдите проекции ускорения частицы на оси ортогональной криволинейной системы координат.

□ Для ортогональных базисных векторов проекции ускорения точки на координатные оси можно записать в виде

$$a_\alpha = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}_\alpha = \dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{e}_\alpha,$$

где $\alpha = 1{,}2{,}3$. Здесь и в дальнейшем для обозначения скалярного произведения будем использовать символ “·”. Выражая $\boldsymbol{e}_\alpha$ из (1.9), представим данное выражение в виде

$$a_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\left(\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{1}{h_\alpha}\left[\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right) - \left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\right)\right]. \tag{1.10}$$

Из (1.8) следует равенство

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_1 \partial q_\alpha}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_2 \partial q_\alpha}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_3 \partial q_\alpha}\dot{q}_3. \tag{1.11}$$

Кроме того, найдем, что

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha \partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha \partial q_3}\dot{q}_3. \tag{1.12}$$

Правые части равенств (1.11) и (1.12) совпадают, так как они отличаются только порядком частного дифференцирования. Поэтому

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_\alpha}\,. \tag{1.13}$$

Дифференцируя (1.8) по $\dot{q}_\alpha$, имеем:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_\alpha}\,. \tag{1.14}$$

Используя (1.13) и (1.14), равенство (1.10) можно записать в виде:

$$a_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\left[\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_\alpha}\right) - \left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_\alpha}\right)\right] = \frac{1}{h_\alpha}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(v^2/2\right)}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial\left(v^2/2\right)}{\partial q_\alpha}\right]. \tag{1.15}$$

Данное выражение и определяет проекции ускорения на оси ортогональной криволинейной системы координат.

В частности, с помощью (1.15) находим (сравните с результатами задачи 1.3), что в цилиндрической системе координат проекции ускорения

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi},\ a_z = \ddot{z}. \ \blacksquare$$

Механическая система может представлять собой не только совокупность свободных частиц. На частицы системы могут быть наложены связи. Под *связями* будем понимать любые условия, ограничивающие свободу перемещения точек механической системы. Математически связи могут быть выражены уравнениями или неравенствами, в которые входят время, координаты всех или части точек системы и их производные по времени. В дальнейшем мы будем рассматривать *голономные* или *интегрируемые связи*, аналитическую запись которых можно свести к виду

$$f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0,$$

где $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N$ – радиусы-векторы точек системы.

Для системы N частиц, на которую наложено n голономных связей, число независимых обобщенных координат называется *числом степеней свободы* системы. Число степеней свободы

$$s = 3N - n.$$

Задача 1.7. Найдите число степеней свободы частицы, движущейся по поверхности сферы радиуса R.

□ Выберем начало прямоугольной декартовой системы координат в центре сферы. Тогда уравнение связи будет $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Согласно определению, связь является голономной, поэтому число степеней свободы

$$s = 3N - n = 3 - 1 = 2. \quad \blacksquare$$

Задача 1.8. Найдите число степеней свободы твердого тела.

□ Под твердым телом в механике понимается система материальных точек, расстояние между которыми не изменяется. Очевидно, что положение твердого тела в пространстве определяется заданием любых трех его точек, не лежащих на одной прямой. Поскольку расстояние между точками должно оставаться неизменным, то на выбранные точки наложено n=3 связей. Таким образом, число степеней свободы

$$s = 3N - n = 3 \cdot 3 - 3 = 6. \blacksquare$$

Задача 1.9. Частица движется без трения по абсолютно гладкой поверхности вертикального цилиндра, радиус которого изменяется по закону $R = C\sin(at)$, где C и a – константы. Запишите вектор скорости точки в цилиндрической системе координат.

□ Примем за начало отсчета цилиндрической системы координат центр нижнего основания цилиндра, а ось z направим вертикально вверх. Тогда уравнение связи записывается в виде $\rho = R = C\sin(at)$. Согласно определению, связь является голономной.

С учетом полученного в задаче 1.1 выражения для скорости в цилиндрических координатах, имеем:

$$\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z = Ca\cos(at)\boldsymbol{e}_\rho + C\sin(at)\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{z}\boldsymbol{e}_z. \quad \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

1.10. В случае движения точки по плоскости бывает удобным использовать полярную систему координат. В этой системе положение точки A определяется полярным радиусом $r = OA$ и полярным углом $\varphi = \angle xOA$ (рис. 1.4). Полярные координаты изменяются в пределах: $0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$. Запишите векторы скорости и ускорения точки в полярных координатах.

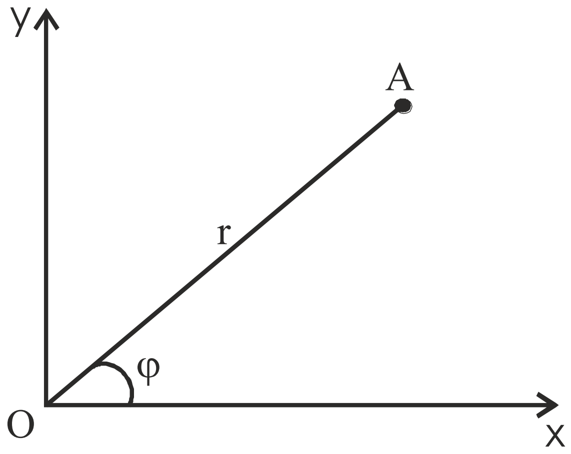


Рис. 1.4

1.11. Закон движения частицы в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\rho = C_1 t, \qquad \varphi = C_2 t, \qquad z = C_3 t,$$

где C_1, C_2, C_3 − константы. Найдите проекции скорости и ускорения частицы.

1.12. Найдите проекции ускорения частицы в сферической системе координат.

1.13. Найдите число степеней свободы тонкого массивного стержня.

1.14. Найдите число степеней свободы твердого тела с неподвижной осью.

1.15. Найдите число степеней свободы твердого тела с одной закрепленной точкой.

1.16. Найдите число степеней свободы трехатомной молекулы.

1.17. Найдите число степеней свободы твердого тела, движущегося по плоскости.

1.18. Найдите число степеней свободы частицы, движущейся по поверхности сферы радиуса $R(t)$, изменяющегося во времени.

1.19. Запишите уравнение голономной связи для частицы, движущейся по гладкой поверхности кругового конуса с углом раствора 2α (рис. 1.5) в сферической системе координат.

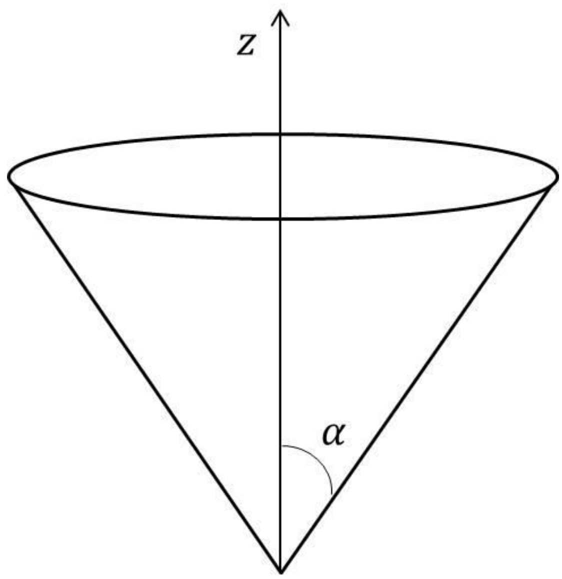


Рис. 1.5.

1.20. Запишите уравнение голономной связи для частицы, движущейся по гладкой поверхности кругового конуса с углом раствора 2α (рис. 1.5) в цилиндрической системе координат.

1.21. Запишите уравнение голономной связи для частицы, движущейся по гладкой поверхности цилиндра радиуса R, в сферических координатах.

1.22. Параболические координаты (σ, τ) на плоскости связаны с прямоугольными декартовыми координатами (x, y) соотношениями:

$$x = \sigma\tau, \;\; y = \frac{\sigma^2 - \tau^2}{2}.$$

Запишите вектор скорости частицы на плоскости в параболических координатах.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

$\mathbf{1.10}.\ \boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi,\ \ \boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\boldsymbol{e}_\varphi.$

$\mathbf{1.11}.\, v_\rho = C_1,\ \ v_\varphi = C_1C_2t,\ v_z = C_3;\ a_\rho = -C_1C_2^2t,\ \ a_\varphi = 2C_1C_2, a_z = 0.$

$\mathbf{1.12}.\, a_r = \ddot{r} - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2,\ \ a_\varphi = r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta},$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2.$ $\mathbf{1.13}.\ s = 5.$ $\mathbf{1.14}.\ s = 1.$ $\mathbf{1.15}.\, s = 3.$

$\mathbf{1.16}.\, s = 9.$ $\mathbf{1.17}.\, s = 5.$ $\mathbf{1.18}.\ s = 2.$ $\mathbf{1.19}.\ \theta = \alpha.$ $\mathbf{1.20}.\ \mathrm{tg}\alpha = \rho/z.$

$\mathbf{1.21}.\ r\sin\theta = R.$ $\mathbf{1.22}.\ \boldsymbol{v} = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}(\dot{\sigma}\boldsymbol{e}_\sigma + \dot{\tau}\boldsymbol{e}_\tau).$

§ 2. Уравнения Лагранжа в независимых координатах

Рассмотрим механическую систему, состоящую из N частиц, на которые наложены голономные *идеальные* связи. Под *идеальными связями*[*] будем понимать связи без трения. Обозначим через s число степеней свободы системы и введем s обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_s$. Будем считать, что на точки системы действуют только потенциальные силы. Как известно, потенциальную силу $\boldsymbol{F}_i$, действующую на i-ю точку системы, можно представить в виде

$$\boldsymbol{F}_i = -\mathrm{grad}_{\boldsymbol{r}_i} U,$$

где индекс $\boldsymbol{r}_i$ у градиента означает, что частные производные берутся по координатам i-й частицы, а $U = U(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$ – функция обобщенных координат и времени, которая называется *потенциальной энергией*. В прямоугольных декартовых координатах

$$\boldsymbol{F}_i = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y_i}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z_i}\boldsymbol{e}_z\right),$$

где x_i, y_i, z_i – декартовы координаты i-й частицы[**].

Задача 2.1. Найдите потенциальную энергию а) силы тяжести и б) силы упругости пружины.

□ а) Рассмотрим материальную точку массы m, находящуюся в однородном поле силы тяжести $m\boldsymbol{g}$ ($\boldsymbol{g}$ – ускорение свободного падения). Выберем систему координат таким образом, чтобы сила тяжести была направлена антипараллельно оси z. Представим силу тяжести через ее потенциальную энергию:

$$-mg\boldsymbol{e}_z = -\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e}_y - \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e}_z.$$

---

[*] Следует отметить, что класс идеальных связей на самом деле несколько шире. В частности, некоторые связи с трением тоже относятся к идеальным. Более подробный материал об идеальных связях приведен в Приложении 1.

[**] Выражение для операции градиент в криволинейных ортогональных координатах приведено в Приложении 2.

Решением этого уравнения будет

$$U = mgz + C.$$

Потенциальная энергия определяется с точностью до аддитивной константы C. Можно выбрать за ноль потенциальной энергии плоскость $z = 0$, тогда $C = 0$, а $U = mgz$.

Заметим, что в случае, когда ось Oz направлена против силы тяжести, потенциальная энергия увеличивается с увеличением z. Если направить ось Oz в сторону силы тяжести, потенциальная энергия будет уменьшаться с увеличением z, и будет описываться выражением

$$U = -mgz.$$

б) Рассмотрим систему из частицы на пружине, второй конец которой закреплен. Пусть жесткость пружины k, а ее длина в нерастянутом состоянии l_0. Движение частицы при этом является одномерным. Ось x направим вдоль пружины, а ее начало совместим с точкой закрепления пружины. Тогда можно записать

$$-k(x - l_0)\boldsymbol{e_x} = -\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{e_x} - \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{e_y} - \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{e_z},$$

откуда

$$U = \frac{k}{2}(x - l_0)^2 + C,$$

где C аддитивная константа. Разумно потенциальную энергию положить равной нулю в точке $x = l_0$, т.е. в состоянии, когда пружина не растянута. Тогда константа $C = 0$, и

$$U = \frac{k}{2}(x - l_0)^2.$$

Не снижая общности, можно взять начало отсчета координаты x в положении частицы при нерастянутой пружине, тогда потенциальная энергия силы упругости будет иметь вид

$$U = \frac{k}{2}x^2 . \qquad \blacksquare$$

Кинетическая энергия механической системы из N частиц по определению есть

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2},$$

где m_i – масса i-й частицы, а v_i — ее скорость. Скорости частиц v_i могут быть выражены через обобщенные координаты $q_1, q_2, \dots, q_s$ и обобщенные скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ (см. задачу 2.3). При этом кинетическая энергия тоже будет функцией обобщенных координат и обобщенных скоростей

$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s).$$

Введем *функцию Лагранжа* L как

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) = \\ = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s) - U(q_1, q_2, \dots, q_s, t).$$

Как видно, функция Лагранжа (в дальнейшем — лагранжиан) зависит от обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени.

Движение механической системы с s степенями свободы, на которую наложены голономные идеальные связи и действуют только потенциальные силы, описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \qquad \alpha = 1,2, \dots, s. \qquad (2.1)$$

Эти уравнения называются *уравнениями Лагранжа в независимых координатах* (в дальнейшем — просто уравнениями Лагранжа). Уравнения (2.1) представляют собой уравнения движения, которые в качестве неизвестных содержат обобщенные координаты. Нахождение закона движения механической системы с помощью уравнений Лагранжа по сравнению с законами Ньютона имеет два существенных преимущества.

1) Вид уравнений Лагранжа не зависит от конкретного выбора обобщенных координат. При другом их выборе изменяется только

лагранжиан, а форма уравнений (2.1) остается такой же. В связи с этим говорят, что уравнения Лагранжа обладают свойством *ковариантности*.

2) Если на систему наложены связи, то в уравнениях Ньютона появляются реакции связей, под которыми понимаются силы, действующие на точки системы со стороны тел, осуществляющих связи. В уравнения Лагранжа реакции связей не входят в явном виде, хотя, конечно, уравнения Лагранжа полностью учитывают влияние связей на систему.

Часто, для краткости, где это не может привести к недоразумению, совокупность обобщенных координат $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ мы будем обозначать посредством $\{q\}$ или просто q, а совокупность обобщенных скоростей $\{\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s\}$ – посредством $\{\dot{q}\}$ или просто $\dot{q}$.

Отметим, что лагранжиан определен неоднозначно. Различают два вида неоднозначности.

Мультипликативная неоднозначность. Если лагранжиан умножить на произвольную постоянную, то уравнения Лагранжа (2.1) не изменятся.

Аддитивная неоднозначность. Уравнения Лагранжа (2.1) также не изменятся, если к лагранжиану прибавить полную производную от функции координат и времени (см. задачу 2.7).

Задача 2.2. Напишите лагранжиан свободной частицы в а) декартовых, б) цилиндрических и в) сферических координатах.

□ Поскольку частица свободная, т.е. на нее не действуют никакие силы, то потенциальная энергия $U = 0$. Поэтому лагранжиан будет совпадать с кинетической энергией точки.

а) В декартовой системе координат обобщенными координатами частицы являются x, y, z. Кинетическая энергия, выраженная через обобщенные скорости, есть

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Следовательно, лагранжиан

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

б) Для цилиндрической системы обобщенными координатами рассматриваемой частицы будут ρ, φ, z. Используя выражение для скорости в цилиндрической системе координат, найденное в задаче 1.1, легко получить, что

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

Лагранжиан

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

в) Для рассматриваемой частицы в сферической системе обобщенными координатами будут r, θ, φ. С учетом выражения для скорости из задачи 1.2, имеем:

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$$

и лагранжиан

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right). \blacksquare$$

Задача 2.3. Получите лагранжиан механической системы в виде функции от обобщенных координат q, обобщенных скоростей $\dot{q}$ и времени t. На систему наложены голономные идеальные связи, а внешние силы являются потенциальными.

□ Найдем сначала выражение для кинетической энергии в виде функции от q и $\dot{q}$. Пусть $\boldsymbol{r}_i$ – радиус-вектор i-й частицы, а m_i – ее масса. Радиус-вектор $\boldsymbol{r}_i$ в случае голономных связей является функцией обобщенных координат и времени, т.е. $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$, где s – число степеней свободы системы. Дифференцируя $\boldsymbol{r}_i$ по времени, получим:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}.$$

С учетом этого кинетическая энергия системы будет равна

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^{s} m_\alpha(q) \dot{q}_\alpha + m_0(q), \tag{2.2}$$

где N — количество точек системы, а функции $m_{\alpha\beta}(q)$, $m_\alpha(q)$, $m_0(q)$ в (2.2) определяются выражениями

$$m_{\alpha\beta}(q) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta} \right) \quad (\alpha, \beta = 1,2, \dots, s),$$

$$m_\alpha(q) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right) \quad (\alpha = 1,2, \dots, s),$$

$$m_0(q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \right)^2.$$

Видно, что $m_{\alpha\beta}(q) = m_{\beta\alpha}(q)$. Таким образом, кинетическая энергия содержит три слагаемых:

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)},$$

где

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta, \quad T^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^{s} m_\alpha(q) \dot{q}_\alpha, \quad T^{(0)} = m_0(q)$$

являются однородными формами соответственно второй, первой и нулевой степени относительно обобщенных скоростей.

Лагранжиан

$$L = T - U = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)} - U,$$

где $U = U(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$ – потенциальная энергия системы.

Если радиусы-векторы частиц системы не зависят явно от времени, то

$$m_\alpha(q) = 0, \quad m_0(q) = 0,$$

следовательно,

$$L = T^{(2)} - U. \ ■$$

Задача 2.4. Сферический маятник. Найдите лагранжиан и уравнения Лагранжа для частицы, движущейся по абсолютно гладкой поверхности сферы радиуса R в однородном поле тяжести.

□ В качестве обобщенных координат удобно выбрать углы θ и φ сферической системы координат. Полярную ось сферической системы координат направим вертикально вниз, а начало отсчета системы совместим с центром сферы. Связь в этом случае имеет вид $r = R$, откуда следует, что $\dot{r} = 0$. С учетом этого, используя результат задачи 2.2 в), находим кинетическую энергию частицы:

$$T = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right).$$

Для записи потенциальной энергии маятника выразим ее сначала в декартовых координатах, а потом применим формулы преобразования декартовых координат в сферические (1.2). Выберем начало отсчета потенциальной энергии в центре сферы, тогда:

$$U = -mgz = -mgR\cos\theta.$$

Теперь составим лагранжиан:

$$L = T - U = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + mgR\cos\theta.$$

Поскольку в данной задаче имеются две обобщенные координаты, то уравнений Лагранжа также будет два:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial\theta} = mR^2\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2\right) + mgR\sin\theta = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left(mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\right) = mR^2\left(\sin^2\theta\ddot{\varphi} + \sin(2\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi}\right) = 0.$$

■

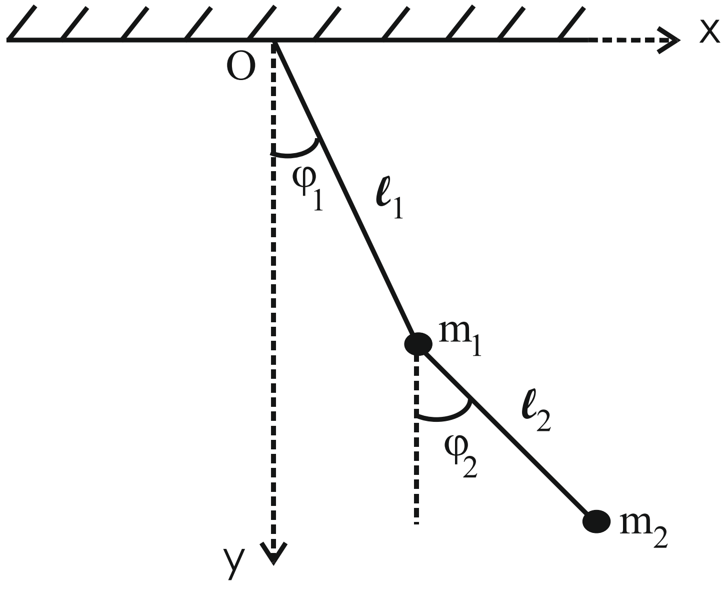


Рис. 2.1

Задача 2.5. <u>Двойной плоский математический маятник.</u> Частица массы m_1 прикреплен к точке подвеса с помощью нерастяжимой нити длиной l_1. К этой частице прикреплена невесомая нить длиной l_2, на конце которой находится частица массы m_2 (рис. 2.1). Найдите лагранжиан и уравнения Лагранжа системы для случая ее движения в вертикальной плоскости.

□ Данная система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем углы φ_1 и φ_2 отклонения нитей l_1 и l_2 от вертикали. Оси x и y направим так, как показано на рисунке, а за начало отсчета системы координат примем точку крепления нити l_1. От этого же уровня будем отсчитывать потенциальную энергию.

Координаты x_1 и y_1 точки m_1 можно представить в виде:

$$x_1 = l_1 \sin\varphi_1, \;\; y_1 = l_1 \cos\varphi_1,$$

откуда

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1, \;\; \dot{y}_1 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1.$$

Кинетическая энергия точки m_1 есть

$$T_1 = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1{}^2}{2},$$

а ее потенциальная энергия $U_1 = -m_1 g y_1 = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1$.

Координаты x_2 и y_2 точки m_2 запишутся следующим образом:

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2, \;\; y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos\varphi_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos\varphi_2, \;\; \dot{y}_1 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin\varphi_1 - l_2 \dot{\varphi}_2 \sin\varphi_2.$$

Кинетическая и потенциальная энергии точки m_2 равны соответственно

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}\left(l_1^2\dot{\varphi_1}^2 + l_2^2\dot{\varphi_2}^2 + 2l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right),$$

$$U_2 = -m_2 g y_2 = -m_2 g(l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2).$$

Лагранжиан всей системы

$$L = T_1 + T_2 - (U_1 + U_2) = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2\dot{\varphi_1}^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2\dot{\varphi_2}^2 +$$

$$+m_2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2.$$

Уравнений Лагранжа в данной задаче будет два:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0.$$

Производя дифференцирование, находим:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)(l_1\ddot{\varphi}_1 + g\sin\varphi_1) + m_2 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\ddot{\varphi}_2 + \\ \qquad\qquad + m_2 l_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_2^2 = 0, \\ l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\ddot{\varphi}_1 + l_2\ddot{\varphi}_2 - l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1^2 + g\sin\varphi_2 = 0. \end{cases}$$

■

Задача 2.6. Составьте уравнения Лагранжа для частицы, движущейся по абсолютно гладкой поверхности вертикального цилиндра радиуса R в однородном поле тяжести.

□ Данную задачу удобно решать в цилиндрической системе координат. Начало отсчета системы выберем в центре нижнего основания цилиндра, а ось z направим вертикально вверх. За ноль потенциальной энергии примем нижнее основание цилиндра. В качестве обобщенных координат выберем координаты φ и z.

Кинетическая и потенциальная энергии точки запишутся в виде

$$T = \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2), \qquad U = mgz.$$

Лагранжиан

$$L = T - U = \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

а уравнения Лагранжа по переменным φ и z есть соответственно

$$mR^2\ddot{\varphi} = 0,\ m\ddot{z} + mg = 0.\ \blacksquare$$

Задача 2.7. Покажите, что уравнения Лагранжа (2.1) не изменяются, если вместо лагранжиана $L(q, \dot{q}, t)$ взять лагранжиан

$$L_1(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q,t)}{dt},$$

где $f(q,t)$ – произвольная функция координат и времени.

□ Запишем выражение для полной производной функции $f(q,t)$ по времени:

$$\frac{df(q,t)}{dt} = \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Из этого равенства можно получить два соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{df}{dt}\right) = \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial^2 f}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_\alpha}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}. \tag{2.4}$$

Используя равенство (2.4), находим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{df}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\right) = \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial^2 f}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial q_\alpha \partial t}. \tag{2.5}$$

Изменяя порядок дифференцирования по переменным q_α, q_β, t, можем записать соотношение (2.5) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{df}{dt}\right) = \sum_{\beta=1}^{s} \frac{\partial^2 f}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\beta + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_\alpha}. \tag{2.6}$$

Записывая уравнения Лагранжа (2.1) для лагранжиана $L_1(q,\dot{q},t)$ и учитывая (2.3) и (2.6), получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L_1}{\partial q_\alpha}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\frac{df}{dt}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{df}{dt}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}+\left(\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial^2 f}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_\alpha}\right)-$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}-\left(\sum_{\beta=1}^{s}\frac{\partial^2 f}{\partial q_\beta \partial q_\alpha}\dot{q}_\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_\alpha}\right)=0.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0,$$

что совпадает с уравнением Лагранжа для функции L. ■

Задача 2.8. Частица массы m движется по спице, закрепленной под углом α к вертикали. Частица прикреплена к вершине спицы пружиной жесткостью k (рис. 2.2). Длина пружины в нерастянутом состоянии l_0. Спица вращается вокруг вертикали с угловой скоростью ω. Движение происходит в поле тяжести. Напишите лагранжиан и уравнение движения частицы.

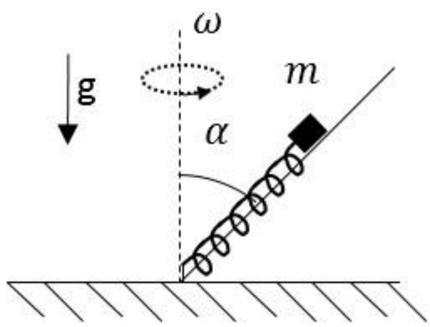


Рис. 2.2.

□ Решать задачу удобно в сферических координатах. Полярную ось сферической системы координат направим вертикально вверх, а начало отсчета выберем в точке крепления спицы. В качестве обобщенной координаты r выберем расстояние от начала отсчета до частицы.

Уравнениями связи в рассматриваемой задаче будут

$$\theta=\alpha,\qquad \varphi=\omega t,$$

откуда следует, что $\dot{\theta} = 0,\ \dot{\varphi} = \omega$.

С учетом этого кинетическая энергия частицы

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 sin^2\alpha).$$

Потенциальная энергия складывается из энергий силы упругости пружины и силы тяжести:

$$U = \frac{k}{2}(r - l_0)^2 + mgr\cos\alpha.$$

Лагранжиан будет иметь вид

$$L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin^2\alpha) - \frac{k}{2}(r - l_0)^2 - mgr\cos\alpha,$$

а уравнение Лагранжа

$$m\ddot{r} - mr\omega^2\sin^2\alpha + k(r - l_0) + mg\cos\alpha = 0. \ \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения

2.8. Длина математического маятника изменяется по закону $l(t)$. Найдите лагранжиан и уравнение движения маятника.

2.9. Два математических маятника одинаковой длины l связаны между собой пружиной жесткости k, закрепленной на расстоянии a от точки подвеса (рис. 2.3). Расстояние между точками подвеса равно длине нерастянутой пружины. Найдите лагранжиан и уравнения Лагранжа для данной системы, считая углы отклонения маятников от положения равновесия малыми.

2.10. Две частицы с массами m_1 и m_2 соединены невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через гладкий неподвижный блок (рис. 2.4). Найдите лагранжиан и уравнение движения грузов.

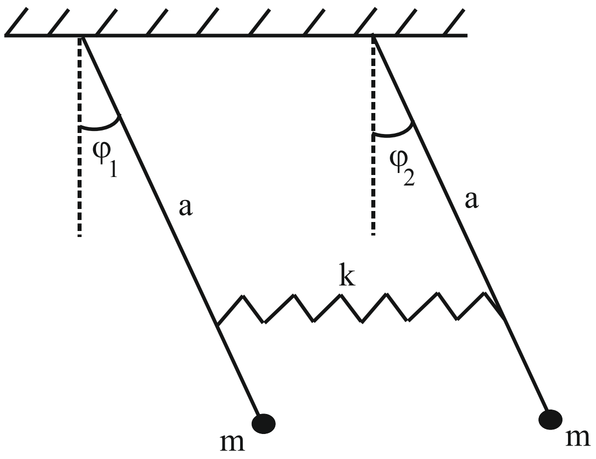


Рис. 2.3

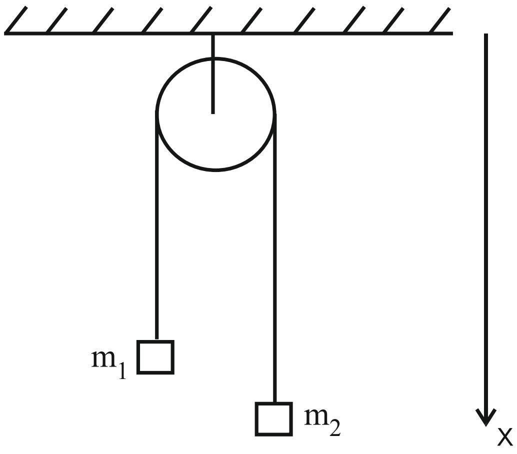


Рис. 2.4

2.11. Через гладкий неподвижный блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к одному из концов которой привязан груз массы m_1. На другом конце повис человек массы m_2, который, выбирая веревку, поднимает груз, оставаясь при этом на одном и том же расстоянии от Земли. Найдите лагранжиан системы и уравнение движения груза m_1.

2.12. Точка подвеса математического маятника движется в вертикальном направлении по закону $s = at^2/2$ $(a = \text{const})$. Найдите лагранжиан и уравнение движения маятника.

2.13. Точка подвеса математического маятника движется по горизонтали по закону $s(t)$. Найдите лагранжиан и уравнение движения маятника.

2.14. Точка подвеса математического маятника равномерно движется в вертикальной плоскости по окружности радиуса R с угловой скоростью ω. Найдите лагранжиан и уравнение движения маятника.

2.15. Частицы с массами m_1 и m_2 движутся вдоль оси z в однородном поле тяжести. Запишите лагранжиан и уравнения движения системы.

2.16. Частицы с массами m_1 и m_2, связанные пружиной, движутся в плоскости xy. Пружина имеет жесткость k и длину в нерастянутом состоянии l_0. Запишите лагранжиан и уравнения движения системы.

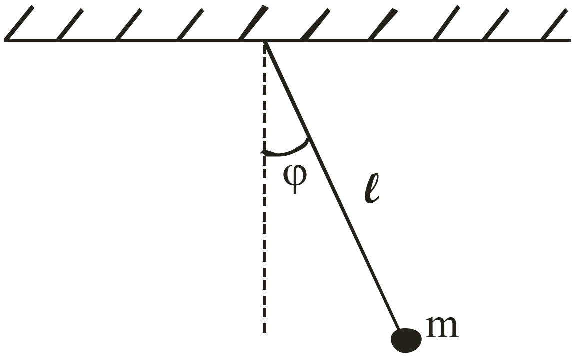


Рис. 2.5

2.17. Найдите лагранжиан и уравнение движения математического маятника (рис. 2.5).

2.18. Частица массы m движется по гладкой поверхности конуса с углом раствора 2α (рис. 1.5) в однородном поле тяжести. Найдите лагранжиан и уравнения Лагранжа.

2.19. Лагранжиан частицы массы m:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2).$$

Запишите уравнения Лагранжа.

2.20. Лагранжиан частицы массы m:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \alpha xy, \qquad \alpha = \text{const}.$$

Запишите уравнения Лагранжа.

2.21. Лагранжиан частицы массы m:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \alpha xy, \qquad \alpha = \text{const}.$$

Запишите уравнения Лагранжа.

2.22. Лагранжиан частицы массы m:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \alpha r^2\varphi, \qquad \alpha = \text{const}.$$

Запишите уравнения Лагранжа.

2.23. Лагранжиан частицы массы m:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \alpha r\varphi, \qquad \alpha = \text{const}.$$

Запишите уравнения Лагранжа.

2.24. Лагранжиан частицы массы m:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \alpha r, \qquad \alpha = \text{const}$$

Запишите уравнения Лагранжа.

2.25. Лагранжиан частицы:

$$L = \frac{\alpha}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + \beta\cos\theta\,, \qquad \alpha, \beta = \text{const.}$$

Запишите уравнения Лагранжа.

2.26. Лагранжиан частицы массы m:

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - \alpha\boldsymbol{r}^2, \qquad \alpha = \text{const.}$$

Запишите уравнения Лагранжа.

2.27. Найдите лагранжиан и уравнения Лагранжа для свободной частицы массы m на плоскости в параболических координатах (см. задачу 1.22).

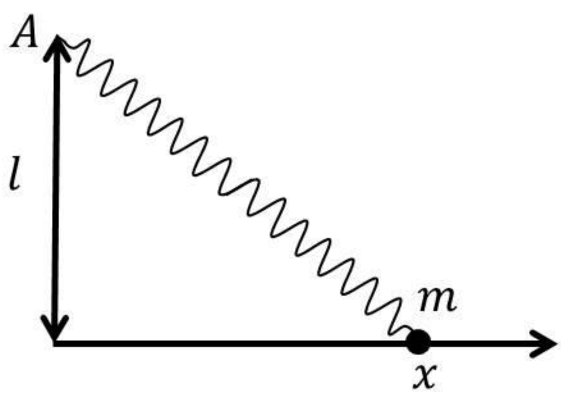


Рис. 2.6

2.28. Частица массы m может двигаться без трения по прямой. К материальной точке прикреплена пружина (жесткостью k, длиной в нерастянутом состоянии l_0), другой конец которой закреплен в точке A на расстоянии l от прямой, по которой движется частица (рис. 2.6). Найдите лагранжиан и уравнение движения точки.

2.29. Лагранжиан системы:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{c^2}},$$

где $m, c = \text{const}$. Какой вид лагранжиан будет иметь в а) цилиндрических и б) сферических координатах?

2.30. Лагранжиан системы:

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{c^2}}+\frac{\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$\alpha, m, c = \text{const}$. Какой вид лагранжиан будет иметь в а) цилиндрических и б) сферических координатах?

2.31. Лагранжиан частицы:

$$L = \alpha\frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}+\beta|\boldsymbol{r}|,$$

где $\alpha, \beta = \text{const}$. Найдите уравнение Лагранжа.

2.32. Упростите лагранжиан путем исключения полной производной по времени от функции координат и времени.

$$a)\ L_1 = \dot{x}\sin(at),\ \ a = \text{const};$$

$$\text{б)}\ \ L_1 = \frac{1}{2}(\dot{x}+bt)^2,\ \ \ b = \text{const};$$

$$\text{в)}\ \ L_1 = x\dot{y}-y\dot{x}\ ;\ \ \text{г)}\ \ L_1 = tx\dot{x}.$$

<u>*Ответы к задачам для самостоятельного решения*</u>

2.8. $L = \dfrac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2+mgl\cos\varphi;\quad \ddot{\varphi}+\dfrac{2\dot{l}}{l}\dot{\varphi}+\dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0.$

2.9. $L = \dfrac{ml^2}{2}(\dot{\varphi}_1^2+\dot{\varphi}_2^2)+mgl(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)-\dfrac{ka^2}{2}(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)^2;$

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{g}{l}\sin\varphi_1 + \frac{ka^2}{ml^2}(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)\cos\varphi_1 = 0,$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{g}{l}\sin\varphi_2 - \frac{ka^2}{ml^2}(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)\cos\varphi_2 = 0.$$

2.10. $L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + (m_1 - m_2)gx;\ (m_1 + m_2)\ddot{x} - (m_1 - m_2)g = 0.$

2.11. $L = \frac{m_1\dot{x}^2}{2} + (m_1 - m_2)gx; \quad m_1\ddot{x} - (m_1 - m_2)g = 0;$

ось x направлена вертикально вниз.

2.12. $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + ml(g + a)\cos\varphi; \quad \ddot{\varphi} + \frac{g + a}{l}\sin\varphi = 0;$

точка подвеса маятника движется вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

2.13. $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - ml\ddot{s}\sin\varphi + mlg\cos\varphi; \quad \ddot{\varphi} + \frac{\ddot{s}}{l}\cos\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$

2.14. $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mlR\omega^2\sin(\varphi - \omega t) + mgl\cos\varphi;$

$$\ddot{\varphi} - \frac{R\omega^2}{l}\cos(\varphi - \omega t) + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

2.15. $L = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2} - m_1gz_1 - m_2gz_2;\ m_1\ddot{z}_1 + m_1g = 0,$

$m_2\ddot{z}_2 + m_2g = 0,$ z_1 – координата частицы массы m_1, z_2 – координата частицы массы m_2.

2.16. $L = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{k}{2}\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - l_0\right)^2,$

$$m_1\ddot{x}_1 + k\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - l_0\right)\frac{(x_1 - x_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} = 0,$$

$$m_1\ddot{y}_1 + k\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} - l_0\right)\frac{(y_1 - y_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}} = 0,$$

$$m_1\ddot{x}_2 + k\left(\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} - l_0\right)\frac{(x_2-x_1)}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}} = 0,$$

$$m_1\ddot{y}_2 + k\left(\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} - l_0\right)\frac{(y_2-y_1)}{\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}} = 0,$$

x_1, y_1 – координаты частицы массы m_1, x_2, y_2 – координаты частицы массы m_2.

$\mathbf{2.17}$. $L = \dfrac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi\,;\ \ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0.$

При малых углах отклонения, $\sin\varphi \approx \varphi$, уравнение движения будет

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

$\mathbf{2.18}$. $L = \dfrac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2) - mgr\cos\alpha\,;\ \ddot{r} - r\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2 + g\cos\alpha = 0,$

$r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0.$

$\mathbf{2.19}$. $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0, \qquad r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0.$

$\mathbf{2.20}$. $m\ddot{x} + \alpha y = 0, \qquad m\ddot{y} + \alpha x = 0.$

$\mathbf{2.21}$. $m\ddot{x} + \alpha y = 0, \qquad m\ddot{y} + \alpha x = 0, \qquad m\ddot{z} = 0.$

$\mathbf{2.22}$. $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + 2\alpha r\varphi = 0, \qquad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) + \alpha r = 0.$

$\mathbf{2.23}$. $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \alpha\varphi = 0, \qquad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) + \alpha = 0.$

$\mathbf{2.24}$. $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \alpha = 0, \qquad m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0.$

$\mathbf{2.25}$. $\alpha\left(\ddot{\theta} - \dfrac{1}{2}\sin(2\theta)\dot{\varphi}^2\right) + \beta\sin\theta = 0, \qquad \alpha\big(\sin^2\theta\,\ddot{\varphi} + \sin(2\theta)\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\big) = 0.$

$\mathbf{2.26}$. $m\ddot{\boldsymbol{r}} + 2\alpha\boldsymbol{r} = 0.$

$\mathbf{2.27}$. $L = \dfrac{m}{2}(\sigma^2 + \tau^2)(\dot{\sigma}^2 + \dot{\tau}^2);\ (\sigma^2 + \tau^2)\ddot{\sigma} + \sigma(\dot{\sigma}^2 - \dot{\tau}^2) + 2\tau\dot{\tau}\dot{\sigma} = 0,$

$(\tau^2 + \sigma^2)\ddot{\tau} + \tau(\dot{\tau}^2 - \dot{\sigma}^2) + 2\sigma\dot{\sigma}\dot{\tau} = 0.$

2.28. $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0\right)^2$; $\quad m\ddot{x} + k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{l^2 + x^2}}\right)x = 0.$

2.29. а) $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)}{c^2}}$;

б) $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2}{c^2}}$.

2.30. а) $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$;

б) $L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2}{c^2}} + \frac{\alpha}{r}$.

2.31. $\alpha\ddot{\boldsymbol{r}} - \beta\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = 0.$

2.32. а) $L = -ax\cos(at)$; б) $L = \frac{\dot{x}^2}{2} - bx$; в) $L = 2x\dot{y}$; г) $L = -\frac{x^2}{2}$.

§ 3. Уравнения Лагранжа при наличии диссипативных и электромагнитных сил

До сих пор мы рассматривали механические системы с голономными идеальными связями при наличии только потенциальных сил. Для таких систем лагранжиан $L = T - U$. Запишем теперь функцию Лагранжа при наличии:

1) диссипативных сил, ограничившись силами сопротивления, пропорциональными скорости частицы;
2) электромагнитных сил.

1) Диссипативные силы. В случае если на частицу массы m действует сила сопротивления вида $\boldsymbol{F}_d = -k\dot{\boldsymbol{r}}$ (k – коэффициент пропорциональности), функцию Лагранжа можно представить в виде

$$L = e^{\frac{k}{m}t}\left(\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(\boldsymbol{r}, t)\right), \tag{3.1}$$

где $U(\boldsymbol{r}, t)$ – потенциальная энергия действующих на частицу потенциальных сил.

Задача 3.1. Покажите, что уравнения Лагранжа с лагранжианом L вида (3.1) приводят к уравнению $m\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}$, описывающему движение частицы при наличии диссипативной силы $\boldsymbol{F}_d = -k\dot{\boldsymbol{r}}$ и потенциальной силы $\boldsymbol{F}$.

□ Запишем уравнения Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0. \tag{3.2}$$

Здесь и в дальнейшем под производной скалярной функции по вектору будем понимать вектор, компоненты которого равны производным от этой величины по соответствующим компонентам вектора. Так, в данном случае $\partial L/\partial \boldsymbol{r}$ и $\partial L/\partial \dot{\boldsymbol{r}}$ есть векторы, компоненты которых в декартовых координатах соответственно равны

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}\right); \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right).$$

Дифференцируя (3.1) по $\dot{\boldsymbol{r}}$, найдем, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = e^{\frac{k}{m}t} m\dot{\boldsymbol{r}}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = e^{\frac{k}{m}t}(m\ddot{\boldsymbol{r}} + k\dot{\boldsymbol{r}}).$$

Производная (3.1) по $\boldsymbol{r}$ равна

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = e^{\frac{k}{m}t}\left(-\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}}\right).$$

Но $-\partial U/\partial \boldsymbol{r}$ есть по определению сила $\boldsymbol{F}$ (см. § 2).

С учетом этого уравнение Лагранжа (3.2) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = e^{\frac{k}{m}t}(m\ddot{\boldsymbol{r}} + k\dot{\boldsymbol{r}}) - e^{\frac{k}{m}t}\boldsymbol{F} = 0.$$

Сокращая обе части этого уравнения на $e^{\frac{k}{m}t}$ и перенося последние два члена вправо, получим искомое уравнение движения:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{F}.$$

■

Задача 3.2. Частица массы m движется по параболе, расположенной вертикально в поле тяжести. На частицу действует сила сопротивления, пропорциональная ее скорости с коэффициентом пропорциональности k. Найдите лагранжиан и уравнение движения точки.

□ Направим ось z вертикально вверх, и пусть уравнением параболы будет

$$z = \frac{ax^2}{2}, \;\; y = 0, \;\; a = \text{const}. \tag{3.3}$$

В качестве обобщенной координаты выберем x. Квадрат скорости частицы равен

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2. \tag{3.4}$$

Дифференцируя (3.3) по времени, находим:

$$\dot{z} = ax\dot{x}.$$

Подставляя это выражение в (3.4), получим:

$$\dot{\boldsymbol{r}}^2 = \dot{x}^2 + a^2x^2\dot{x}^2.$$

Кинетическая энергия частицы

$$T = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + a^2x^2\dot{x}^2),$$

а ее потенциальная энергия определяется выражением

$$U = mgz = mg\frac{ax^2}{2}.$$

В соответствии с формулой (3.1) составляем лагранжиан

$$L = \frac{m}{2} e^{\frac{k}{m}t}\left((1 + a^2x^2)\dot{x}^2 - gax^2\right).$$

Уравнение Лагранжа по переменной x имеет вид:

$$(1 + a^2x^2)(m\ddot{x} + k\dot{x}) + max(g + a\dot{x}^2) = 0.$$

■

<u>*2) Электромагнитные силы.*</u> Пусть частица находится в электрическом поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и в магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. Напряженности электрического и магнитного полей могут быть выражены через скалярный ϕ и векторный $\boldsymbol{A}$ потенциалы:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\phi, \tag{3.5}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}, \tag{3.6}$$

где c - скорость света. В декартовой системе координат операции градиент* и ротор записываются в виде:

$$\mathrm{grad}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{e}_x\frac{\partial \phi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y\frac{\partial \phi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial \phi}{\partial z}, \tag{3.7}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right), \tag{3.8}$$

где $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ – орты прямоугольной системы координат, а A_x, A_y, A_z – проекции вектора $\boldsymbol{A}$ на оси координат. С учетом (3.7) и (3.8) запишем

---

* Ранее операцию градиент мы уже использовали в определении потенциальной силы в начале §2 и в векторной форме уравнения Лагранжа (3.2).

уравнения (3.5) и (3.6) в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат:

$$\mathcal{E}_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \qquad \mathcal{E}_y = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y}, \qquad \mathcal{E}_z = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad (3.9)$$

$$\mathcal{H}_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \qquad \mathcal{H}_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \qquad \mathcal{H}_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \quad (3.10)$$

Следует отметить, что по заданным полям $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ скалярный и векторный потенциалы определяются неоднозначно. Их можно выбрать по-разному, единственным налагаемым условием является выполнение равенств (3.9)-(3.10). При этом, вне зависимости от выбора ϕ и $\boldsymbol{A}$, если они удовлетворяют (3.9) и (3.10), закон движения механической системы будет одним и тем же. Это связано с тем, что классическая электродинамика допускает возможность преобразований скалярного и векторного потенциалов, при которых значения полей $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ не изменяются. Такие преобразования называются калибровочными и заключаются в одновременном изменении потенциалов ϕ и $\boldsymbol{A}$ следующим образом:

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}; \quad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}F,$$

где $F = F(\boldsymbol{r}, t)$ – произвольная функция координат и времени (см. задачу 3.21).

С помощью скалярного и векторного потенциалов лагранжиан частицы массы m и заряда q, находящейся в электромагнитном поле, можно записать следующим образом*:

---

* Электромагнитные силы относятся к так называемому классу обобщенно-потенциальных сил $\boldsymbol{F}$, которые могут быть заданы с помощью скалярной функции V, зависящей не только от времени и положений точек, но и от их скоростей, посредством равенства

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} - \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}}.$$

В случае электромагнитных сил

$$V = -\frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) + q\phi.$$

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) - q\phi. \tag{3.11}$$

Задача 3.3. Покажите, что уравнение движения

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{q}{c}(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}) \tag{3.12}$$

частицы массы m и заряда q, находящейся в электромагнитном поле, получается из уравнений Лагранжа, в которых в качестве функции Лагранжа взята функция (3.11)*.

□ Составим уравнения Лагранжа для функции (3.11). Сначала найдем, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{q}{c}A_x, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) - q\frac{\partial \phi}{\partial x}. \tag{3.13}$$

Аналогичные соотношения имеют место для переменных y и z. Подстановка (3.13) в уравнение Лагранжа по переменной x, т.е. в уравнение

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

приводит к равенству

$$m\ddot{x} + \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t}\right) - \frac{q}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right) +$$

$$+q\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0.$$

Перенося в этом уравнении все силы в правую часть и группируя слагаемые, получаем:

$$m\ddot{x} = -\frac{q}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} - q\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{q}{c}\left\{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\dot{y} - \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\dot{z}\right\}. \tag{3.14}$$

---

* В формуле (3.12) под $\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}$ понимается векторное произведение. В дальнейшем везде для обозначения векторного произведения будем использовать символ “×”.

С учетом формул (3.9) и (3.10) замечаем, что первые два члена в правой части (3.14) есть умноженная на заряд q проекция $\mathcal{E}_x$ вектора напряженности электрического поля на ось x, а в круглых скобках стоят проекции $\mathcal{H}_z$ и $\mathcal{H}_y$ вектора напряженности магнитного поля на оси z и y, соответственно. Теперь уравнение (3.14) можно переписать в виде

$$m\ddot{x} = q\mathcal{E}_x + \frac{q}{c}\left(\mathcal{H}_z\dot{y} - \mathcal{H}_y\dot{z}\right). \tag{3.15}$$

Абсолютно аналогично можно получить уравнения Лагранжа для переменных y и z:

$$m\ddot{y} = q\mathcal{E}_y + \frac{q}{c}(\mathcal{H}_x\dot{z} - \mathcal{H}_z\dot{x}), \tag{3.16}$$

$$m\ddot{z} = q\mathcal{E}_z + \frac{q}{c}\left(\mathcal{H}_y\dot{x} - \mathcal{H}_x\dot{y}\right). \tag{3.17}$$

Вспоминая определение векторного произведения, видим, что в круглых скобках равенств (3.15)-(3.17) стоят проекции векторного произведения $\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{\mathcal{H}}$, и, следовательно, уравнения Лагранжа (3.15)-(3.17) эквивалентны уравнению (3.12). ■

Задача 3.4. Найдите в цилиндрических координатах лагранжиан и уравнения движения частицы массы m и заряда q, находящейся в однородном и постоянном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

□ Направим ось z цилиндрической системы координат вдоль вектора $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. Проекции векторного потенциала определяются выражениями (3.10). При выборе оси z вдоль магнитного поля $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, уравнения (3.10) примут вид:

$$0 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \qquad 0 = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \qquad \mathcal{H} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Это единственные условия, накладываемые на проекции $\boldsymbol{A}$. Для решения этих уравнений можно выбрать, например, что $A_x = A_z = 0$. Тогда остаются следующие уравнения для A_y:

$$0 = \frac{\partial A_y}{\partial z}, \qquad \mathcal{H} = \frac{\partial A_y}{\partial x}.$$

Простейшим решением этой системы будет $A_y = x\mathcal{H}$. Таким образом, в однородном магнитном поле

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = (0,0,\mathcal{H})$$

значение векторного потенциала может быть выбрано как*

$$\boldsymbol{A} = (0, x\mathcal{H}, 0).$$

При этом скалярное произведение

$$\boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = x\mathcal{H}\dot{y}.$$

Перейдем теперь в цилиндрическую систему координат. Для этого запишем связь декартовых координат x, y с цилиндрическими (см. § 1):

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

Отсюда $\dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\dot{\varphi}\cos\varphi$, а скалярное произведение

$$\boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = x\mathcal{H}\dot{y} = \rho\dot{\rho}\mathcal{H}\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\dot{\varphi}\mathcal{H}\cos^2\varphi.$$

Поскольку по условию задачи электрического поля нет, т.е. $\boldsymbol{\mathcal{E}} = 0$, а выбранный нами векторный потенциал не зависит явно от времени, то скалярный потенциал ϕ можно выбрать равным нулю. Действительно, по определению

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla\phi = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{e}_x\frac{\partial\phi}{\partial x} - \boldsymbol{e}_y\frac{\partial\phi}{\partial y} - \boldsymbol{e}_z\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

Так как $\partial\boldsymbol{A}/\partial t = 0$, то для выполнения равенства $\boldsymbol{\mathcal{E}} = 0$ наиболее просто положить $\phi = 0$.

Таким образом, лагранжиан (3.11) в рассматриваемом случае примет вид

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{c}(\rho\dot{\rho}\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi),$$

---

* Безусловно, векторный потенциал, удовлетворяющий уравнениям (3.10), может быть выбран и в другом виде. Однако получающиеся при этом уравнения движения не изменятся.

где учтено (см. задачу 1.1), что в цилиндрических координатах

$$\dot{\boldsymbol{r}}^{\boldsymbol{2}} = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2.$$

Упростим полученный лагранжиан, выделив в нем полную производную по времени от функции координат и времени. Для этого заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\right) = \rho\dot{\rho}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi,$$

откуда

$$\rho\dot{\rho}\cos\varphi\sin\varphi = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\right) - \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi.$$

Подставляя в лагранжиан вместо $\rho\dot{\rho}\cos\varphi\sin\varphi$ полученное выражение, имеем:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{d}{dt}\left(\frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\right) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\dot{\varphi}.$$

Или, исключая полную производную по времени, находим

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\dot{\varphi}. \qquad (3.18)$$

Теперь составим уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}} - \frac{\partial L}{\partial\rho} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 - \frac{q\mathcal{H}}{mc}\rho\dot{\varphi} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{d}{dt}\left(m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z} = 0.$$

Эти уравнения и есть искомые уравнения движения частицы.

Заметим, что Лагранжиан (3.18) можно получить значительно проще, если сразу записать операцию ротор в цилиндрической системе координат. Действительно, согласно приложению 2, проекции напряженности магнитного поля на оси цилиндрической системы координат равны

$$\mathcal{H}_\rho = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho,\quad \mathcal{H}_\varphi = \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right),\quad \mathcal{H}_z = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right).$$

Поскольку отлична от нуля только составляющая $\mathcal{H}_z = \mathcal{H}$, то векторный потенциал можно положить равным* $A_\rho = A_z = 0,\ A_\varphi = \rho\mathcal{H}/2$. Тогда, используя выражение для скорости из задачи 1.1, найдем, что

$$(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{\rho^2\mathcal{H}}{2}\dot{\varphi},$$

и, следовательно, лагранжиан

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\dot{\varphi},$$

что совпадает с (3.18). ■

Задача 3.5. Найдите лагранжиан заряженной частицы массы m и заряда q, движущейся в поле закрепленной частицы с зарядом Q.

□ Согласно (3.10) в отсутствии магнитного поля можно положить векторный потенциал $\boldsymbol{A} = 0$. Тогда лагранжиан будет:

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - q\phi.$$

Найдем явный вид потенциала ϕ. Начало системы координат выберем в месте расположения заряда Q. Напряженность электрического поля, создаваемая зарядом Q, есть

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{Q}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{3.19}$$

где r – расстояние от начала координат до заряда q. Эта напряженность связана со скалярным потенциалом (с учетом равенства нулю векторного потенциала) соотношением

* Конечно, как и в случае декартовых координат, такой выбор не является единственно возможным.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\left(\boldsymbol{e}_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial \phi}{\partial z}\right). \tag{3.20}$$

Умножим обе части (3.20) скалярно на вектор

$$d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{e}_x + dy\boldsymbol{e}_y + dz\boldsymbol{e}_z.$$

В результате получим

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\boldsymbol{r} = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz\right) = -d\phi.$$

Отсюда

$$\phi = -\int \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\boldsymbol{r}. \tag{3.21}$$

Подставляя в (3.21) выражение для напряженности поля (3.19) и учитывая, что $\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{r} = r dr$, имеем

$$\phi = -\int \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{r} + C, \tag{3.22}$$

где C – константа. Если принять потенциал равным нулю на бесконечности, то следует положить в (3.22) $C = 0$. Тогда окончательно получаем

$$\phi = \frac{Q}{r},$$

следовательно, лагранжиан

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - \frac{qQ}{r}.$$

■

Задача 3.6. Найдите лагранжиан частицы массы m и заряда q, находящейся в поле электрического диполя.

□ Электрическим диполем называется система из двух равных по абсолютной величине и противоположных по знаку электрических зарядов $e > 0$ и $-e < 0$, расстояние a между которыми мало по сравнению с расстоянием до рассматриваемых точек поля (в которых находится частица). Схематично рассматриваемая система изображена на рисунке 3.1.

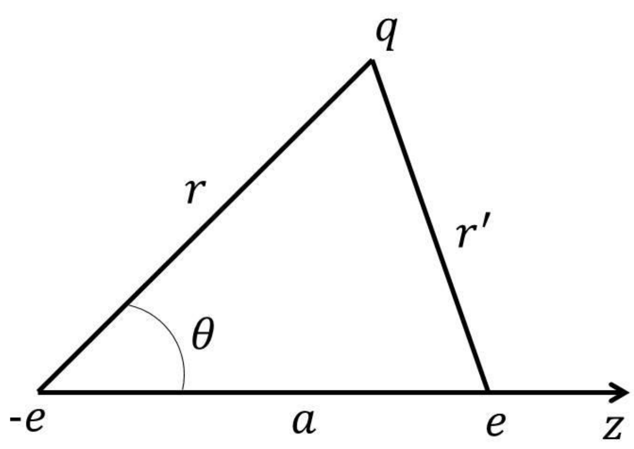


Рис. 3.1

Пусть r и r' – расстояния до частицы от зарядов $-e$ и e, соответственно. Направим полярную ось (ось z на рисунке) сферической системы координат вдоль диполя, а начало отсчета совместим с зарядом $-e$.

Потенциал диполя в точке нахождения заряда q равен*

$$\phi = e\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right). \tag{3.23}$$

Выразим с помощью теоремы косинусов r' через r и θ:

$$r' = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta} \approx \sqrt{r^2 - 2ar\cos\theta}. \tag{3.24}$$

В равенстве (3.24) мы пренебрегли членом a^2, поскольку по условию $a \ll r$.

Подставляя (3.24) в (3.23), находим:

$$\phi = \frac{e}{r}\left[\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta}} - 1\right]. \tag{3.25}$$

Разлагая в выражении (3.25) первый член в скобках по малому параметру a/r, имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{a}{r}\cos\theta}} \approx 1 + \frac{a}{r}\cos\theta,$$

и, следовательно,

$$\phi \approx \frac{ea}{r^2}\cos\theta = \frac{p}{r^2}\cos\theta,$$

---

* Данное выражение можно получить, воспользовавшись формулой для скалярного потенциала из задачи 3.5 и принципом суперпозиции.

где $p = ea$ есть дипольный момент.

В сферических координатах кинетическая энергия (см. задачу 2.1)

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right).$$

Полагая $\boldsymbol{A} = 0$ (магнитное поле отсутствует) в выражении (3.11), получаем лагранжиан:

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - q\phi = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - \frac{qp}{r^2}\cos\theta.$$

■

В случае, если на частицу помимо электромагнитных сил, действуют еще и потенциальные силы, описываемые потенциальной энергией $U(\boldsymbol{r}, t)$, то ее лагранжиан

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) - q\phi - U(\boldsymbol{r}, t). \quad (3.26)$$

Задача 3.7. Найдите лагранжиан заряженной частицы массы m и заряда q, находящейся в однородном и постоянном электрическом поле напряженностью $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и поле тяжести.

□ Для нахождения скалярного потенциала воспользуемся формулой (3.21), получим (с учетом $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \text{const}$)

$$\phi = -\int \boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int d(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{r}) = -\,\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{r} + \text{const}.$$

Векторный потенциал положим равным нулю, так как магнитное поле отсутствует.

Найдем теперь потенциальную энергию силы тяжести. По определению,

$$m\boldsymbol{g} = -\text{grad}U.$$

Решая это векторное уравнение по аналогии с решенным выше уравнением для скалярного потенциала, получим выражение для потенциальной энергии силы тяжести:

$$U = -m(\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}) + \text{const}.$$

В итоге, опуская в лагранжиане константы[*], согласно (3.26) имеем:

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + q(\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{r}) + m(\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}).$$

■

Задача 3.8. Найдите в декартовых координатах лагранжиан для частицы массы m и заряда q, движущейся в поле тяжести и постоянном и однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, которое направлено перпендикулярно полю тяжести ($\boldsymbol{\mathcal{H}} \perp \boldsymbol{g}$).

□ Выберем декартову систему координат так, чтобы ось z была направлена вдоль вектора $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, а ось y – вдоль вектора $\boldsymbol{g}$.

Согласно задаче 3.4, в случае, когда напряженность магнитного поля имеет составляющие $(0,0,\mathcal{H})$, векторный потенциал в декартовых координатах можно представить в виде

$$\boldsymbol{A} = (0, x\mathcal{H}, 0).$$

При этом, в силу отсутствия электрического поля, скалярный потенциал ϕ можно принять равным нулю (см. задачу 3.4).

За ноль потенциальной энергии поля тяжести примем $y = 0$. Тогда потенциальная энергия частицы

$$U = -mgy.$$

Следовательно, согласно (3.26), лагранжиан частицы

$$L = \frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} + \frac{q\mathcal{H}}{c} x\dot{y} + mgy.$$

■

[*] Это можно сделать, пользуясь свойством аддитивной неоднозначности лагранжиана (см. § 2).

Задачи для самостоятельного решения

3.9. Покажите, что уравнение движения одномерного гармонического осциллятора с вязким трением (сила сопротивления $F_d = -k\dot{x}$) можно записать как уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

используя лагранжиан (3.1).

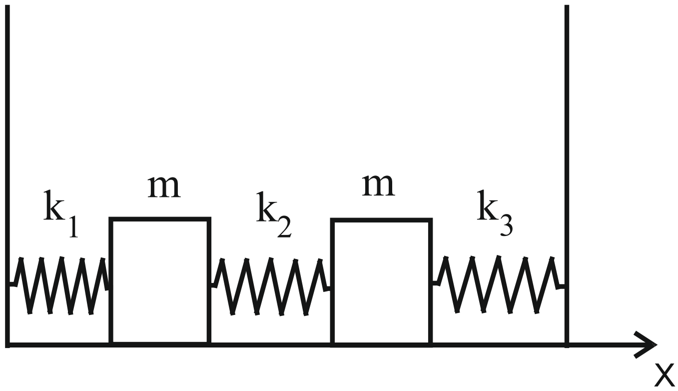


Рис. 3.2

3.10. Два одинаковых груза массы m связаны между собой и с неподвижными стенками пружинами жесткости k_1, k_2 и k_3 (рис. 3.2). На каждый из грузов действует сила сопротивления $F_i = -k\dot{x}_i$ $(i = 1, 2)$. Найдите лагранжиан системы. Можно ли построить лагранжиан, если массы грузов и коэффициенты трения различны?

3.11. На частицу массы m, движущуюся в вязкой среде (сила сопротивления $\boldsymbol{F}_r = -k\dot{\boldsymbol{r}}$, $k = \text{const}$) действует сила $\boldsymbol{F} = -\alpha\boldsymbol{r}$ $(\alpha = \text{const})$. Найдите лагранжиан системы.

3.12. Запишите лагранжиан для плоского математического маятника (рис. 2.5) (масса m, длина подвеса l), движущегося в вязкой среде (сила сопротивления $F = -\alpha\dot{\varphi}$, $\alpha = \text{const}$, φ – угол отклонения маятника от вертикали), в поле силы тяжести.

3.13. Лагранжиан имеет вид $(\beta, m, \omega = \text{const})$:

$$L = e^{\beta t}\frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2).$$

Произведя преобразование

$$x = e^{-\frac{\beta}{2}t}s,$$

запишите лагранжиан и уравнение Лагранжа по переменной s.

3.14. Частицы, имеющие массы m_1 и m_2 и заряды q_1 и q_2, соответственно, находятся в однородном и постоянном электрическом поле напряженностью $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и поле силы тяжести. Запишите лагранжиан.

3.15. Частица массы m и заряда q движется по сфере радиуса R в однородном и постоянном электрическом поле напряженностью $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Запишите лагранжиан.

3.16. Частица массы m и заряда q движется по гладкой поверхности цилиндра радиуса R в однородном и постоянном электрическом поле напряженностью $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, направленной вдоль оси цилиндра. Запишите лагранжиан.

3.17. Найдите лагранжиан в декартовых координатах для частицы массы m и заряда q в поле электрического диполя, обладающего дипольным моментом $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$.

3.18. Найдите лагранжиан для частицы массы m и заряда q, находящейся в поле электрического диполя с дипольным моментом $\boldsymbol{p}$, в цилиндрических координатах.

3.19. Векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ имеет вид $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 \cos \Omega t,\ \boldsymbol{A}_0 = \mathrm{const},\ \Omega = \mathrm{const}$, скалярный потенциал $\phi = 0$. Чему равны векторы напряженности электрического и магнитного полей?

3.20. Покажите, что векторный потенциал однородного магнитного поля напряженности $\mathcal{H}$ можно представить в виде:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mathcal{H}} \times \boldsymbol{r}).$$

3.21. Пусть электромагнитное поле характеризуется скалярным потенциалом $\phi(\boldsymbol{r}, t)$ и векторным потенциалом $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$. Изменим потенциалы следующим образом:

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}; \quad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad} F,$$

где $F = F(\boldsymbol{r}, t)$ – произвольная функция координат и времени.

а) Как напряженность электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$ для потенциалов ϕ' и $\boldsymbol{A}'$ связана с напряженностью поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ для потенциалов ϕ и $\boldsymbol{A}$?

б) Как напряженность магнитного поля $\boldsymbol{\mathcal{H}}'$ для потенциала $\boldsymbol{A}'$ связана с напряженностью магнитного поля $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ для потенциала $\boldsymbol{A}$?

в) Как лагранжиан L' для потенциалов ϕ' и $\boldsymbol{A}'$ связан с функцией Лагранжа L для потенциалов ϕ и $\boldsymbol{A}$?

3.22. Найдите в прямоугольных декартовых координатах лагранжиан и уравнения движения частицы массы m и заряда q, находящейся в однородном и постоянном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

3.23. Найдите в сферических координатах лагранжиан частицы массы m и заряда q, находящейся в однородном и постоянном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

3.24. Найдите в сферических координатах лагранжиан частицы массы m и заряда q, движущейся в поле магнитного монополя

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{\gamma \boldsymbol{r}}{r^3}, \quad \gamma = \mathrm{const}.$$

Указание: векторный потенциал удобно выбрать в виде

$$A_r = A_\theta = 0, \;\; A_\varphi = -\frac{\gamma}{r}\mathrm{ctg}\theta.$$

3.25. Частица массы m и заряда q движется в поле магнитного диполя, векторный потенциал которого

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{r}}{r^3}, \;\; \boldsymbol{\mu} = \mathrm{const}.$$

Напишите лагранжиан частицы в а) цилиндрической и б) сферической системах координат.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

$\mathbf{3.10.}\, L = \dfrac{1}{2}e^{\frac{k}{m}t}\left(m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \gamma_1 x_1^2 - \gamma_2(x_2 - x_1)^2 - \gamma_3 x_2^2\right).$

В случае, если массы и коэффициенты трения грузов различны и равны $k^{(1)}, m_1$ и $k^{(2)}, m_2$ для 1-го и 2-го грузов, соответственно, лагранжиан можно записать при условии

$$\frac{k^{(1)}}{m_1} = \frac{k^{(2)}}{m_2}.$$

$\mathbf{3.11}$. $L = e^{\frac{k}{m}t}\left(\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{\alpha\boldsymbol{r}^2}{2}\right).$

$\mathbf{3.12}$. $L = e^{\frac{\alpha}{ml}t}\left(\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi\right).$

$\mathbf{3.13}$. $L = \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 - \left(\omega^2 - \frac{\beta^2}{4}\right)s^2\right);\quad \ddot{s} + \left(\omega^2 - \frac{\beta^2}{4}\right)s = 0.$

$\mathbf{3.14}$. $L = \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{1}}^{\;2}}{2} + \frac{m_2\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{2}}^{\;2}}{2} - \frac{q_1q_2}{|\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{1}}|} + m_1(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{1}}) + m_2(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{2}}) +$

$+q_1(\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{1}}) + q_2(\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{r}_{\boldsymbol{2}}).$

$\mathbf{3.15}$. $L = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + q\mathcal{E}r\cos\theta,$

полярная ось сферической системы координат направлена вдоль $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

$\mathbf{3.16}$. $L = \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + q\mathcal{E}z.$

$\mathbf{3.17}$. $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{p_xx + p_yy + p_zz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$

$\mathbf{3.18}$. $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{qzp}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$

$\mathbf{3.19}$. $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\Omega}{\mathrm{c}}\boldsymbol{A}_0\sin\Omega t;\quad \boldsymbol{\mathcal{H}} = 0.$

$\mathbf{3.21}$. а) $\boldsymbol{\mathcal{E}}' = \boldsymbol{\mathcal{E}}$; б) $\boldsymbol{\mathcal{H}}' = \boldsymbol{\mathcal{H}}$; в) $L' = L$.

$\mathbf{3.22}$. $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{c}x\dot{y};$

$$m\ddot{x}-\frac{q\mathcal{H}}{c}\dot{y}=0,\ \ m\ddot{y}+\frac{q\mathcal{H}}{c}\dot{x}=0,\quad m\ddot{z}=0.$$

3.23. $L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)+\frac{q}{2c}\mathcal{H}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}.$

3.24. $L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)-\frac{q\gamma}{c}\cos\theta\dot{\varphi}.$

3.25. а) $L=\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)+\frac{q\mu}{c}\frac{\rho^2}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}\dot{\varphi};$

б) $L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)+\frac{q\mu}{cr}\sin^2\theta\dot{\varphi}.$

§ 4. Законы сохранения

Интегралом движения механической системы называется функция обобщенных координат $\{q\}$, обобщенных скоростей $\{\dot{q}\}$ и времени t, сохраняющая при движении механической системы постоянное значение. Таким образом, интеграл движения определяется соотношением вида

$$f(q_1,q_2,\dots,q_s,\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dots,\dot{q}_s,t)=C,$$

где s – число степеней свободы системы, а C является постоянной величиной, определяемой начальными условиями.

Обобщенным импульсом механической системы называется величина

$$\boldsymbol{P}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i},\tag{4.1}$$

где индекс i нумерует частицы механической системы. Обобщенный импульс отдельной частицы системы

$$\boldsymbol{p}_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{r}}_i}.$$

Если лагранжиан имеет вид

$$L=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2}-U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\dots,\boldsymbol{r}_N,t),$$

то обобщенный импульс (4.1) совпадает с механическим импульсом системы

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i.$$

При этом обобщенный импульс отдельной частицы

$$\boldsymbol{p}_i = m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i.$$

В случае, когда движение описывается обобщенными координатами, вводится *обобщенный импульс* p_α, *соответствующий обобщенной координате* q_α. Он определяется равенством

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\,. \tag{4.2}$$

В дальнейшем, где это не может привести к недоразумению, будем p_α называть просто обобщенным импульсом.

Обобщенная энергия механической системы с s степенями свободы определяется выражением

$$E = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L. \tag{4.3}$$

В случае, когда $L = T - U$, а радиусы-векторы точек системы как функции обобщенных координат явно от времени не зависят, обобщенная энергия совпадает с полной энергией системы, т. е.

$$E = T + U.$$

Момент импульса механической системы, состоящей из N частиц, по определению есть

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i. \tag{4.4}$$

В случае, когда обобщенный импульс $\boldsymbol{p}_i = m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$, момент импульса, определяемый равенством (4.4), совпадает с обычным в механическом смысле моментом импульса

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{r}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i). \tag{4.5}$$

В общем же случае момент импульса (4.4) может не совпадать с (4.5) (см. задачу 4.9).

Если в качестве обобщенной координаты выступает угол поворота системы φ вокруг какой-то оси, например оси z, то обобщенный импульс $p_\varphi = \partial L / \partial \dot{\varphi}$ совпадает с проекцией M_z момента импульса на ось z.

При определенных условиях обобщенные энергия, импульс и/или момент импульса являются интегралами движения, называемыми *законами сохранения* соответствующих величин. Рассмотрим их последовательно.

1) *Закон сохранения энергии.*

Пусть лагранжиан механической системы не зависит явно от времени, т.е. $\partial L / \partial t = 0$. Это приводит к закону сохранения обобщенной энергии E (см. задачу 4.1).

Задача 4.1. Покажите, что если лагранжиан механической системы не зависит явно от времени, то выражение (4.3) является интегралом движения.

□ Поскольку лагранжиан $L(q_1, q_2, \ldots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_s)$ не зависит явно от времени, то полная производная по времени от L будет

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right), \tag{4.6}$$

где s – число степеней свободы системы.

Согласно уравнениям Лагранжа (2.1)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,2, \ldots, s.$$

Отсюда

$$\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad \alpha = 1,2, \ldots, s.$$

Подставляя вместо $\partial L/\partial q_\alpha$ найденное значение в (4.6), имеем

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}\dot q_\alpha+\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}\ddot q_\alpha\right)=\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}\dot q_\alpha,$$

или

$$\frac{d}{dt}\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}\dot q_\alpha-L\right)=0.$$

Следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}\dot q_\alpha-L\right)=\text{const},$$

т.е. выражение (4.3) является интегралом движения. ■

Задача 4.2. Найдите обобщенную энергию E свободной частицы массы m в а) декартовых, б) цилиндрических и в) сферических координатах.

□ а) Лагранжиан свободной частицы в декартовой системе координат есть (см. задачу 2.2)

$$L=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2).$$

По определению обобщенной энергии (4.3) находим:

$$E=\sum_{\alpha=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial\dot q_\alpha}\dot q_\alpha-L=\left(\frac{\partial L}{\partial\dot x}\dot x+\frac{\partial L}{\partial\dot y}\dot y+\frac{\partial L}{\partial\dot z}\dot z-L\right)=$$

$$=m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)-\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)=\frac{m}{2}(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2).$$

б) В цилиндрических координатах лагранжиан свободной частицы (см. задачу 2.2)

$$L=\frac{m}{2}(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2).$$

Отсюда по формуле (4.3)

$$E = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot\rho}\dot\rho + \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\dot\varphi + \frac{\partial L}{\partial \dot z}\dot z - L\right) = m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) - \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) =$$

$$= \frac{m}{2}(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2).$$

в) В сферической системе координат лагранжиан свободной частицы (см. задачу 2.2)

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2 sin^2\theta\dot\varphi^2\right).$$

По определению (4.3)

$$E = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\dot r + \frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\dot\theta + \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\dot\varphi - L\right) =$$

$$= m\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\right) - \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\right).$$

Как видно, во всех трех случаях обобщенная энергия совпадает с кинетической энергией частицы, которая является и ее полной энергией, так как по условию задачи потенциальная энергия $U = 0$. При этом, поскольку лагранжиан не содержит времени явно, то обобщенная энергия частицы сохраняется. ■

Задача 4.3. Найдите обобщенную энергию заряженной частицы, находящейся в электромагнитном поле.

□ Лагранжиан частицы в электромагнитном поле имеет вид (3.11):

$$L(\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}, t) = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}) - q\phi.$$

Найдем, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} = m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}).$$

С учетом этого, пользуясь определением обобщенной энергии (4.3), имеем:

$$E = m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}) - \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}) + q\phi = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + q\phi.$$

■

Задача 4.4. Найдите обобщенную энергию системы, лагранжиан которой имеет вид (см. задачу 2.3):

$$L = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha\dot{q}_\beta + \sum_{\alpha=1}^{s} m_\alpha(q)\dot{q}_\alpha + m_0(q) - U(q_1, q_2, \dots, q_s, t).$$

□ По определению, обобщенная энергия:

$$E = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L.$$

Подставим в это выражение заданный в задаче лагранжиан. Прежде всего заметим, что

$$\frac{\partial \dot{q}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \delta_{\alpha i},$$

где $\delta_{\alpha i}$ – символ Кронекера:

$$\delta_{\alpha i} = \begin{cases} 1, \text{при } \alpha = i, \\ 0, \text{при } \alpha \neq i. \end{cases}$$

С учетом этого найдем, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}(q)\delta_{\alpha i}\dot{q}_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}(q)\dot{q}_\alpha\delta_{\beta i} + \sum_{\alpha=1}^{s} m_\alpha(q)\delta_{\alpha i},$$

откуда

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{s} m_{i\beta}(q)\dot{q}_\beta + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{s} m_{\alpha i}(q)\dot{q}_\alpha + m_i(q).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i=\frac{1}{2}\sum_{i,\beta=1}^{s}m_{i\beta}(q)\dot q_\beta\dot q_i+\frac{1}{2}\sum_{i,\alpha=1}^{s}m_{\alpha i}(q)\dot q_\alpha\dot q_i+\sum_{i=1}^{s}m_i(q)\dot q_i.$$

Поскольку сумма не зависит от того, какой буквой обозначен индекс суммирования, то в первой и третьей суммах справа заменим индекс i на α, а во второй сумме – индекс i на β. Тогда получим

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i=\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}m_{\alpha\beta}(q)\dot q_\alpha\dot q_\beta+\sum_{\alpha=1}^{s}m_\alpha(q)\dot q_\alpha.$$

Обобщенная энергия

$$E=\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\dot q_i-L=\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}m_{\alpha\beta}(q)\dot q_\alpha\dot q_\beta+\sum_{\alpha=1}^{s}m_\alpha(q)\dot q_\alpha-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}m_{\alpha\beta}(q)\dot q_\alpha\dot q_\beta-$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{s}m_\alpha(q)\dot q_\alpha-m_0(q)+U(q_1,q_2,\dots,q_s,t)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}m_{\alpha\beta}(q)\dot q_\alpha\dot q_\beta-m_0(q)+U(q_1,q_2,\dots,q_s,t).$$

В обозначениях, введенных в задаче 2.3, обобщенная энергия

$$E=T^{(2)}-T^{(0)}+U.$$

Видно, что она не совпадает с полной энергией

$$T+U=T^{(2)}+T^{(1)}+T^{(0)}+U.$$

Совпадение обобщенной энергии и полной энергии системы достигается в тех случаях, когда радиусы-векторы точек системы как функции независимых координат явно от времени не зависят (см. задачу 2.3). В этом случае $T^{(1)}=T^{(0)}=0$, и обобщенная энергия $E=T^{(2)}+U$. ■

2) *Закон сохранения импульса.*

Обобщенный импульс p_α сохраняется, если лагранжиан не зависит явно от координаты q_α (см. задачу 4.6). Координата q_α, от которой лагранжиан явно не зависит, называется *циклической координатой.*

Задача 4.5. Лагранжиан частицы:

$$L = \alpha \frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \beta|\dot{\boldsymbol{r}}|,$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор частицы, $\alpha, \beta = \text{const}$. Найдите обобщенный импульс частицы $\boldsymbol{P}$.

□ Запишем функцию Лагранжа частицы в декартовой системе координат. Для этого учтем, что

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\boldsymbol{e}_z, \tag{4.7}$$

$$|\dot{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \tag{4.8}$$

Тогда

$$L = \alpha \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{2} + \beta\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

По определению обобщенный импульс

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}}.$$

Отсюда, с учетом определения производной по вектору (см. § 3), имеем

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\boldsymbol{e}_z = \alpha\left(\dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\boldsymbol{e}_z\right) + \beta\frac{\dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

Или, используя (4.7) и (4.8),

$$\boldsymbol{P} = \alpha\dot{\boldsymbol{r}} + \beta\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}.$$

■

Задача 4.6. Покажите, что если q_α – циклическая координата, то соответствующий этой координате обобщенный импульс p_α сохраняется.

□ Уравнение Лагранжа по координате q_α имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}. \qquad (4.9)$$

Поскольку лагранжиан не зависит явно от q_α, то $\partial L/\partial q_\alpha = 0$. Учитывая, что по определению $\partial L/\partial \dot{q}_\alpha = p_\alpha$, из (4.9) имеем

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = 0,$$

следовательно, $p_\alpha = \text{const}$. ■

Задача 4.7. Найдите обобщенные импульсы свободной частицы в а) декартовой, б) цилиндрической и в) сферической системах координат.

□ а) Лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Обобщенные импульсы:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

б) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$;

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = M_z, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

в) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)$;

$$p_r = m\dot{r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = M_z.$$

■

Задача 4.8. Найдите законы сохранения для частицы массы m, движущейся в поле тяжести.

□ Запишем лагранжиан в прямоугольных декартовых координатах в виде

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz,$$

видим, что $\partial L/\partial t = 0, \partial L/\partial x = 0, \partial L/\partial y = 0$. Это означает, что сохраняется энергия

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz,$$

и обобщенные импульсы

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \;\; p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}.$$

■

Задача 4.9. Найдите законы сохранения для частицы массы m и заряда q, движущейся в однородном и постоянном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

□ В задаче 3.4 был найден лагранжиан для такой частицы в цилиндрических координатах

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\dot{\varphi}.$$

Лагранжиан не зависит явно от времени, а координаты φ и z – циклические. Поэтому сохраняются энергия

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$$

и обобщенные импульсы:

$$p_\varphi = M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{q\rho^2}{2c}\mathcal{H},$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Видно, что обобщенный импульс $p_\varphi = M_z$ в данном случае отличается наличием слагаемого $q\rho^2\mathcal{H}/2c$ от проекции на ось z обычного механического момента импульса (равной в цилиндрических координатах $m\rho^2\dot{\varphi}$). ■

Задачи для самостоятельного решения

4.10. Математический маятник прикреплен к частице, способной двигаться вдоль гладкой горизонтальной прямой. Найдите интегралы движения системы.

4.11. Найдите обобщенные импульсы и обобщенную энергию для пространственного осциллятора, лагранжиан в сферических координатах которого имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - \frac{kr^2}{2} \quad (m, k = \mathrm{const}).$$

Какие из найденных величин являются интегралами движения?

4.12. Частицы с массами m_1 и m_2, связанные пружиной, движутся в плоскости xy. Пружина характеризуется жесткостью k и длиной в нерастянутом состоянии l_0. Найдите обобщенную энергию системы.

4.13. Лагранжиан механической системы имеет вид:

$$L = \frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \beta\rho^2\dot{\varphi};$$

где $\alpha, \beta = \mathrm{const}$. Найдите обобщенные импульсы и энергию систем. Какие из них сохраняются?

4.14. Лагранжиан механической системы имеет вид:

$$L = \frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \beta\rho^2\sin\varphi\,\dot{\varphi};$$

где $\alpha, \beta = \mathrm{const}$. Найдите обобщенные импульсы и энергию систем. Какие из них сохраняются?

4.15. Лагранжиан механической системы имеет вид

$$L=\frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)+\beta\dot{\rho}\dot{z};$$

где $\alpha,\beta=\mathrm{const}$. Найдите обобщенные импульсы и энергию систем. Какие из них сохраняются?

4.16. Лагранжиан механической системы имеет вид

$$L=\frac{\alpha}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)+\frac{\beta}{r}\sin^2\theta\,\dot{\varphi};$$

где $\alpha,\beta=\mathrm{const}$. Найдите обобщенные импульсы и энергию систем. Какие из них сохраняются?

4.17. Лагранжиан механической системы имеет вид

$$L=\frac{\alpha}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)+\beta\dot{r}\sin\theta\,;$$

где $\alpha,\beta=\mathrm{const}$. Найдите обобщенные импульсы и энергию систем. Какие из них сохраняются?

4.18. Найдите компоненты импульса $\boldsymbol{p}$ и момента импульса $\boldsymbol{M}$, которые сохраняются при движении заряженной частицы в поле электрического диполя.

4.19. Найдите компоненты импульса $\boldsymbol{p}$ и момента импульса $\boldsymbol{M}$, которые сохраняются при движении заряженной частицы в поле равномерно заряженной бесконечной плоскости.

4.20. Найдите компоненты импульса $\boldsymbol{p}$ и момента импульса $\boldsymbol{M}$, которые сохраняются при движении заряженной частицы в поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра.

4.21. Найдите в сферических координатах обобщенные импульсы частицы массы m и заряда q, находящейся в однородном и постоянном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

4.22. Частица массы m и заряда q движется в электромагнитном поле, характеризуемом векторным потенциалом $\boldsymbol{A}$ и скалярным потенциалом ϕ. Найдите обобщенный импульс частицы.

4.23. Лагранжиан частицы массы m и заряда q, движущейся в однородном и постоянном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

Найдите величину проекции момента импульса частицы на ось z.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

4.10. E, p_x; ось x направлена по горизонтали.

4.11. $p_r = m\dot{r}, \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta},$

$p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi} = M_z;\ E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + \frac{kr^2}{2};$

$p_\varphi, E = \mathrm{const}.$

4.12. $E = \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{k}{2}\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l_0\right)^2$

где x_1, y_1 – координаты частицы массы m_1, x_2, y_2 – координаты частицы массы m_2, соответственно.

4.13. $a)\ p_\rho = \alpha\dot{\rho}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi} + \beta\rho^2, p_z = \alpha\dot{z};\ E = \frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2);$

$E, p_\varphi, p_z = \mathrm{const}$

4.14. $p_\rho = \alpha\dot{\rho}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi} + \beta\rho^2\sin\varphi, p_z = \alpha\dot{z}; E = \frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2);$

$E, p_z = \mathrm{const};$

4.15. $p_\rho = \alpha\dot{\rho} + \beta\dot{z}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi}, p_z = \alpha\dot{z} + \beta\dot{\rho};$

$E = \frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \beta\dot{\rho}\dot{z};$

$E, p_\varphi, p_z = \mathrm{const};$

4.16. $p_r = \alpha\dot{r}, p_\theta = \alpha r^2\dot{\theta}, p_\varphi = \alpha\, r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} + \frac{\beta}{r}\sin^2\theta\,;$

$$E = \frac{\alpha}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right);\ E, p_\varphi = \text{const};$$

$\mathbf{4.17}.\, p_r = \alpha\dot{r} + \beta\sin\theta,\ \ p_\theta = \alpha r^2\dot{\theta},\ \ p_\varphi = \alpha\, r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi},$

$$E = \frac{\alpha}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right);\ E, p_\varphi = \text{const}.$$

$\mathbf{4.18}$. $M_z = p_\varphi$, ось z направлена вдоль диполя (вдоль дипольного момента), в случае магнитного диполя ось z направлена вдоль магнитного дипольного момента.

$\mathbf{4.19}$. $p_x,\ p_y,\ M_z$, плоскость xy совмещена с бесконечной плоскостью.

$\mathbf{4.20}$. $p_z,\ M_z$, ось z является осью цилиндра.

$\mathbf{4.21}$. $p_r = m\dot{r}, \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \qquad p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} + \dfrac{q\mathcal{H}}{2c}r^2\sin^2\theta.$

$\mathbf{4.22}$. $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \dfrac{q}{c}\boldsymbol{A}.$

$\mathbf{4.23}.\, M_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) + \dfrac{q\mathcal{H}}{2c}(x^2 + y^2).$

§ 5. Одномерное движение

Одномерным называют движение системы, имеющей одну степень свободы. Если на такую систему наложены стационарные (независящие от времени) идеальные голономные связи и действуют только потенциальные силы, независящие от времени, то лагранжиан можно записать в виде:

$$L = \frac{m(q)\dot{q}^2}{2} - U(q), \tag{5.1}$$

где $m(q)$ — некоторая функция обобщенной координаты q (см. задачу 2.3). Поскольку лагранжиан (5.1) не зависит явно от времени, то для рассматриваемой системы сохраняется энергия

$$E = \frac{m(q)\dot{q}^2}{2} + U(q). \tag{5.2}$$

Преобразуя (5.2), имеем:

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m(q)}[E - U(q)]}, \tag{5.3}$$

откуда

$$t - t_0 = \pm\int\limits_{q_0}^{q}\sqrt{\frac{m(q)}{2}}\frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}}, \quad q_0 = q(t_0). \tag{5.4}$$

Знак “+” (“−”) в выражениях (5.3) и (5.4) берется на участках траектории, где $\dot{q} > 0$ ($\dot{q} < 0$). Формула (5.4) позволяет найти закон движения системы. Из нее видно, что движение может происходить лишь в тех областях пространства, где $U(q) < E$.

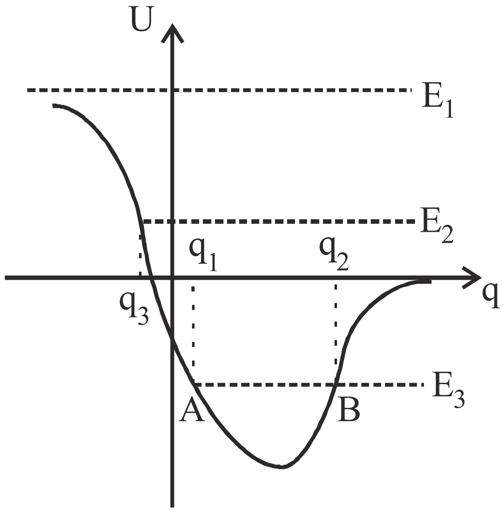


Рис. 5.1

Пусть, например, зависимость $U(q)$ имеет вид, изображенный на рис. 5.1. Если энергия системы E_1 или E_2, то движение будет *инфинитным*, т.е. частица может уйти на бесконечность. Если полная энергия системы E_3, то движение будет происходить в ограниченной области пространства между точками A и B. В этом случае движение является *финитным*. Точки A и B называются *точками остановки*, поскольку скорость частицы в них равна нулю. Координаты этих точек q_1 и q_2 определяются из условия:

$$U(q) = E. \tag{5.5}$$

Одномерное финитное движение является колебательным – частица совершает периодически повторяющееся движение между двумя границами. Период этого колебательного движения определяется формулой:

$$T = \int_{q_1}^{q_2}\sqrt{2m(q)}\frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}}. \tag{5.6}$$

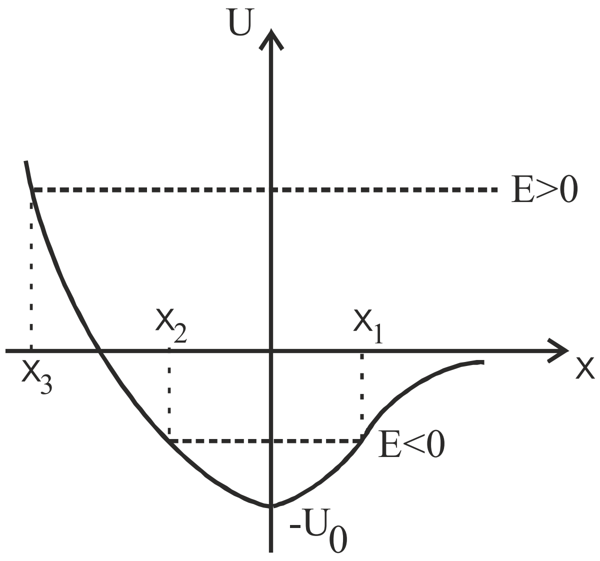


Рис. 5.2

Точки поворота q_1 и q_2 в (5.6) задаются условием (5.5).

Задача 5.1. Потенциал Морза. Найдите закон движения частицы в поле $U(x) = U_0(e^{-2ax} - 2e^{-ax}),\ U_0, a = \text{const}$.

□ Схематично данный потенциал представлен на рис. 5.2. Видно, что в зависимости от энергии частицы E возможно два типа движения: 1) $E < 0$ – финитное движение; 2) $E \geq 0$ – инфинитное движение.

Рассмотрим эти случаи. Для определенности будем считать, что частица движется вправо и $t_0 = 0$.

1) $E < 0$. В этом случае движение колебательное и происходит между точками x_1 и x_2. Воспользовавшись формулой (5.4), находим:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{-|E| - U_0 e^{-2ax} + 2U_0 e^{-ax}}} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}\left(\arcsin\frac{|E|e^{ax} - U_0}{\sqrt{U_0(U_0 - |E|)}} - C_1\right), \tag{5.7}$$

где

$$C_1 = \arcsin\frac{|E|e^{ax_0} - U_0}{\sqrt{U_0(U_0 - |E|)}}.$$

Выражая x через t из соотношения (5.7), получаем:

$$x(t) = \frac{1}{a}\ln\left[\frac{U_0 + \sqrt{U_0(U_0 - |E|)}\ \sin\left(a\sqrt{\frac{2|E|}{m}}t + C_1\right)}{|E|}\right]. \tag{5.8}$$

2) $E \geq 0$. В этом случае движение будет инфинитным, частица может уйти на бесконечность вправо. Рассмотрим сначала случай $E = 0$. Формула (5.4) при этом запишется в виде:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{U_0(2e^{-ax} - e^{-2ax})}} \,. \tag{5.9}$$

Интегрирование (5.9) дает:

$$t = \frac{\sqrt{m}}{a\sqrt{2U_0}}\sqrt{2e^{ax} - 1} + C_2, \qquad \left(C_2 = \frac{\sqrt{m}}{a\sqrt{2U_0}}\sqrt{2e^{ax_0} - 1}\right).$$

Отсюда

$$x(t) = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{a^2 U_0}{m}(t - C_2)^2\right). \tag{5.10}$$

Перейдем к случаю $E > 0$. Интегрируя формулу (5.4), имеем:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{E - U_0 e^{-2ax} + 2U_0 e^{-ax}}} =$$

$$= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{m}{2E}}\left(\operatorname{arch}\frac{Ee^{ax} + U_0}{\sqrt{U_0(U_0 + E)}} - C_3\right), \tag{5.11}$$

где

$$C_3 = \operatorname{arch}\frac{Ee^{ax_0} + U_0}{\sqrt{U_0(U_0 + E)}}.$$

Из (5.11) находим

$$x(t) = \frac{1}{a}\ln\frac{\sqrt{U_0(U_0 + E)}\operatorname{ch}\left(a\sqrt{\frac{2E}{m}}t + C_3\right) - U_0}{E}. \tag{5.12}$$

Формулы (5.8), (5.10) и (5.12) определяют закон движения частицы в зависимости от ее полной энергии. ■

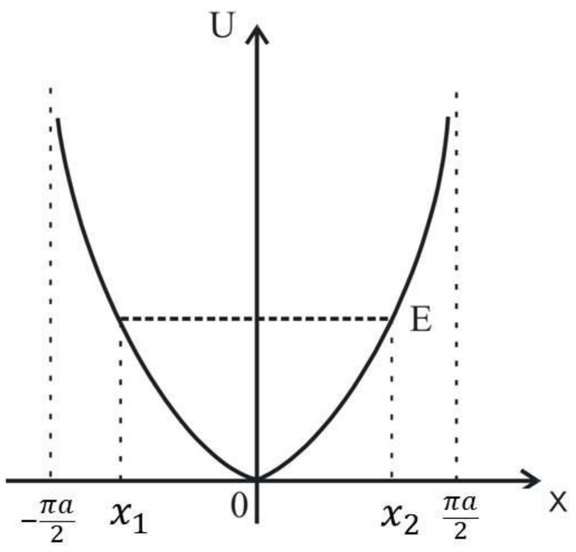


Рис. 5.3

Задача 5.2. Точка движется в поле с потенциалом $U(x) = U_0 \mathrm{tg}^2(x/a)$ ($U_0, a = \mathrm{const}$). Найдите закон движения точки и период колебаний.

□ Схематично один период графика функции $U(x)$ представлен на рис. 5.3. Как видно из рис. 5.3, движение может происходить лишь в ограниченной области между точками поворота x_1 и x_2.

Пусть $t_0 = 0$, а $\dot{x} > 0$. Тогда формула (5.4) будет иметь вид:

$$t = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_0 \mathrm{tg}^2 \frac{x}{a}\right)}},$$

откуда

$$t = a\sqrt{\frac{m}{2(E+U_0)}}\left[\arcsin\left(\sqrt{\frac{E+U_0}{E}}\sin\left(\frac{x}{a}\right)\right) - C\right], \tag{5.13}$$

где $C = \arcsin\left(\sqrt{\frac{E+U_0}{E}}\sin\left(\frac{x_0}{a}\right)\right)$.

Выражая x через t с помощью (5.13), получаем закон движения точки:

$$x(t) = a \arcsin\left[\sqrt{\frac{E}{E+U_0}}\sin\left(\sqrt{\frac{2(E+U_0)}{m}}\frac{t}{a} + C\right)\right].$$

По формуле (5.6) определяем период:

$$T = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U_0 \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{a}}} = \frac{\sqrt{2m}a}{\sqrt{E + U_0}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{E + U_0}{\mathrm{E}}}\ \sin\frac{x}{a} \right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}. \quad (5.14)$$

Точки остановки x_1 *и* x_2 находим из уравнения

$$E - U_0 \mathrm{tg}^2 \frac{x}{a} = 0,$$

решая которое, имеем:

$$\sin\frac{x_1}{a} = -\sqrt{\frac{E}{E + U_0}},\ \ \sin\frac{x_2}{a} = \sqrt{\frac{E}{E + U_0}}. \quad (5.15)$$

Подставляя (5.15) в (5.14), окончательно получаем:

$$T = \pi a \sqrt{\frac{2m}{E + U_0}}.$$

■

Задача 5.3. Определите период нелинейных колебаний плоского математического маятника, представляющего собой точку массы m на конце нити длиной l в поле тяжести (рис. 2.5).

□ В качестве обобщенной координаты выберем угол φ – отклонение нити от вертикали. За ноль потенциальной энергии примем точку подвеса маятника. Тогда потенциальная и кинетическая энергии маятника, соответственно, равны:

$$U = -mgl\cos\varphi,\ \ T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2},$$

а его полная энергия

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0, \quad (5.16)$$

где φ_0 – максимальный угол отклонения нити от вертикали. Из (5.16) находим, что

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\varphi_0)}.$$

Пусть в начальный момент времени $t_0 = 0$ угол отклонения нити от вертикали равен нулю, т.е. $\varphi(0) = 0$. Тогда

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\pm\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}. \tag{5.17}$$

Знак “+” (“–”) перед радикалом берется в интервалах изменения угла φ от 0 до φ_0 и от $-\varphi_0$ до 0 (от φ_0 до 0 и от 0 до $-\varphi_0$). Используя (5.17), получаем выражение для периода колебаний:

$$T = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} - \sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_{\varphi_0}^{0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} -$$

$$-\sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_0^{-\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} + \sqrt{\frac{l}{2g}} \int\limits_{-\varphi_0}^{0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} =$$

$$= 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}. \tag{5.18}$$

С помощью подстановки

$$\sin\xi = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}$$

запишем соотношение (5.18) следующим образом:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\xi}}, \tag{5.19}$$

где $k^2 = \sin^2(\varphi_0/2)$.

Интеграл вида

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

называется эллиптическим интегралом первого рода.

Разложим подынтегральное выражение в (5.19) в ряд, считая колебания малыми. Получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}} \approx 1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\xi+\cdots. \tag{5.20}$$

С учетом (5.20) представим равенство (5.19) в форме:

$$T \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\xi\right)d\xi = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}k^2\right).$$

При $\varphi_0 \ll 1$ имеем $k=\sin(\varphi_0/2)\approx\varphi_0/2$. Поэтому

$$T = 2\pi\left(1+\frac{\varphi_0^2}{16}\right)\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5.21}$$

Видно, что колебания маятника не являются гармоническими, поскольку период зависит от амплитуды. Первое слагаемое в (5.21) дает хорошо знакомую формулу для периода линейных колебаний математического маятника. ■

Задача 5.4. Частица массы m и заряда q движется по абсолютно гладкой кривой $y=A\sin(kx)$ (A, k – константы) в постоянном и однородном электрическом поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, направленной по оси x, и поле тяжести, направленном по оси y. Найдите закон движения частицы.

□ На рис. 5.4 показана система, в которой находится частица. Кинетическая энергия частицы

$$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)=\frac{m\dot{x}^2}{2}(1+k^2A^2\cos^2 kx),$$

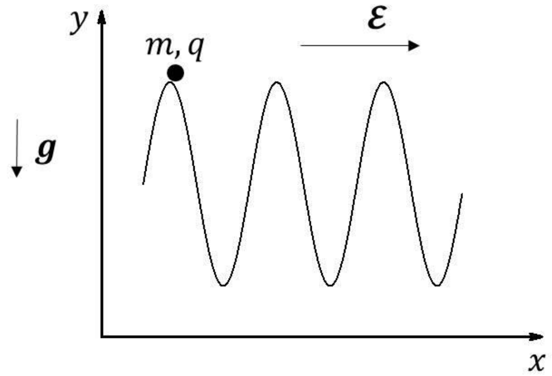


Рис. 5.4

а ее потенциальная энергия (см. задачу 3.7)

$$U = -q\mathcal{E}x + mgA\sin kx.$$

Лагранжиан частицы

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + k^2A^2\cos^2 kx) + q\,\mathcal{E}\,x - $$
$$-mgA\sin kx.$$

Лагранжиан не зависит явно от времени, поэтому обобщенная энергия системы сохраняется:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2}(1 + k^2A^2\cos^2 kx) - q\mathcal{E}x + mgA\sin kx = \text{const}.$$

Отсюда следует, что

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2(E + q\,\mathcal{E}\,x - mgA\sin kx)}{m(1 + k^2A^2\cos^2 kx)}},$$

где знак "+" ("–") берется на участках траектории, на которых $\dot{x} > 0$ ($\dot{x} < 0$). Интегрируя данное уравнение, получаем закон движения в квадратурах:

$$t - t_0 = \pm\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{2(E + q\,\mathcal{E}\,x - mgA\sin kx)}{m(1 + k^2A^2\cos^2 kx)}}\,dx\,, \qquad r(t_0) = r_0.$$

■

Задачи для самостоятельного решения

5.5. Найдите, используя закон сохранения энергии, закон движения и период колебаний одномерного гармонического осциллятора (система с потенциальной энергией $U = kx^2/2\,, k = \text{const}$).

5.6. Найдите закон движения частицы в потенциальном поле

$$U(x) = -U_0e^{x/a}, \;\; U_0, a = \text{const},$$

если ее полная энергия $E = 0$. В начальный момент времени $x_0 = 0$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

5.7. Определите закон движения и период колебаний частицы в поле

$$U(x) = -\frac{U_0}{\mathrm{ch}^2 ax}, \quad U_0, a = \mathrm{const},$$

если ее полная энергия $E < 0$.

5.8. Найдите закон движения частицы массы m с нулевой полной энергией и начальной координатой $x(0) = x_0$ в поле $U(x) = -Ax^4$, $A = \mathrm{const}$.

5.9. Найдите период финитного движения системы, описываемой лагранжианом $L = a\dot{q}^2 - bq^2$ $(a, b = \mathrm{const} > 0)$.

5.10. При каких значениях полной энергии E система, описываемая лагранжианом

$$L = a\frac{\dot{q}^2}{q} - bq - \frac{c}{q} \ (a, b, c = \mathrm{const} > 0),$$

совершает финитное движение?

5.11. Найдите период колебаний частицы с массой m и энергией E, движущейся в поле с потенциалом $(k = \mathrm{const})$

$$U(x) = \begin{cases} \dfrac{kx^2}{2}, x < 0 \\ kx, x > 0 \end{cases}$$

5.12. Найдите период колебаний частицы с массой m и энергией E, движущейся в поле с потенциалом $(k_{1,2} = \mathrm{const})$

$$U(x) = \begin{cases} \dfrac{k_1 x^2}{2}, x < 0 \\ \dfrac{k_2 x^2}{2}, x > 0 \end{cases}$$

5.13. Укажите условия финитности движения и найдите период колебаний системы, лагранжиан которой имеет вид

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{2a}{x} - \frac{b}{x^2}, \qquad m, a, b = \text{const} > 0.$$

5.14. Укажите условия финитности движения и найдите период колебаний системы, лагранжиан которой имеет вид

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - b\left(e^{x/a} - 1\right)^2, \qquad m, a, b = \text{const} > 0.$$

5.15. Укажите условия финитности движения и найдите период колебаний системы, лагранжиан которой имеет вид

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U_0\,\text{th}^2 x, \qquad m, U_0 = \text{const} > 0.$$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

$\mathbf{5.5.}\ x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \alpha\right), \quad A, \alpha = \text{const};\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$

$\mathbf{5.6.}\ x = -2a\ln\left(1 - \frac{\dot{x}_0}{2a}t\right).$

$\mathbf{5.7.}\ x = \frac{1}{a}\ \text{arsh}\left[\sqrt{\frac{U_0 - |E|}{|E|}}\sin\left(a\sqrt{\frac{2|E|}{m}}t + C\right)\right], C = \text{const};\ T = \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{m}{2|E|}}.$

$\mathbf{5.8.}\ x(t) = \frac{x_0}{1 \pm x_0 t\sqrt{\frac{2A}{m}}}.$ $\mathbf{5.9.}\ T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{b}}.$ $\mathbf{5.10.}\ |E| > 2\sqrt{bc}.$

$\mathbf{5.11.}\ T = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\sqrt{\frac{2E}{k}} + \frac{\pi}{2}\right).$ $\mathbf{5.12.}\ T = \pi\sqrt{m}\left(\frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}}\right).$

$\mathbf{5.13.} -\frac{a^2}{b} < E < 0;\ T = a\pi\sqrt{\frac{2m}{-E^3}}.$ $\mathbf{5.14.}\ 0 < E < b;\ T = a\pi\sqrt{\frac{2m}{b - E}}.$

5.15. $0 < E < U_0, T = \pi\sqrt{\dfrac{2m}{U_0 - E}}$.

§ 6. Движение в центральном поле. Задача двух тел

Рассмотрим движение частицы массы m во внешнем поле, в котором ее потенциальная энергия зависит только от расстояния до определенной неподвижной точки – *центра поля*. Если это расстояние обозначить посредством r, то $U = U(r)$. Такое поле называют *центральным*. Сила

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \tag{6.1}$$

действующая при этом на частицу, зависит тоже только от r и направлена в каждой точке вдоль радиуса-вектора. При движении в центральном поле сохраняются энергия и момент импульса, вычисленный относительно центра поля.

Задача 6.1. Покажите, что траектория частицы, движущейся в центральном поле, лежит в одной плоскости.

□ Покажем, что момент импульса при движении частицы в центральном поле сохраняется. Рассмотрим уравнение Лагранжа в виде (3.2):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0,$$

где лагранжиан частицы

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(r).$$

Подставляя лагранжиан в уравнение Лагранжа и учитывая (6.1), получим:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Умножим левую и правую части полученного равенства векторно на $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r} \times m\ddot{\boldsymbol{r}} = 0.$$

Учитывая соотношение

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}) = \dot{\boldsymbol{r}} \times m\dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{r} \times m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times m\ddot{\boldsymbol{r}},$$

получим

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}}) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{r} \times m\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{M} = \text{const}.$$

Таким образом, момент импульса сохраняется. Из определения векторного произведения следует, что вектор $\boldsymbol{r}$ лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{M}$**.** Так как $\boldsymbol{M} = \text{const}$, то радиус-вектор частицы $\boldsymbol{r}$ все время лежит в одной плоскости.

■

Поскольку траектория частицы в центральном поле лежит целиком в одной плоскости, то для описания движения частицы необходимо выбрать две обобщенные координаты. Удобно взять полярные координаты* (r, φ) и начало отсчета полярной системы координат совместить с центром поля. При этом лагранжиан:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r). \tag{6.2}$$

Координата φ в лагранжиане (6.2) является циклической. Соответствующий ей обобщенный импульс $p_\varphi = \partial L/\partial\dot{\varphi}$ сохраняется и совпадает в рассматриваемом случае с моментом импульса M (см. § 4), т.е.

$$M = p_\varphi = {}^{\partial L}\!/_{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}. \tag{6.3}$$

Кроме того, поскольку лагранжиан не зависит явно от времени, то сохраняется энергия

---

* См. задачу 1.10.

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r).$$

Выражая с помощью (6.3) $\dot{\varphi}$ через M, запишем энергию частицы в виде:

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r). \qquad (6.4)$$

Из этого выражения следует, что

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}},$$

откуда, разделяя переменные и интегрируя,

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}}}, \qquad r_0 = r(t_0). \qquad (6.5)$$

Равенство (6.5) определяет в неявном виде расстояние r движущейся точки от центра поля как функцию времени. Знак "+" ("-") перед радикалом берется на участках траектории, где $\dot{r} > 0$ ($\dot{r} < 0$).

Из (6.3) имеем

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2}dt = \frac{M}{mr^2}\frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(r)) - \frac{M^2}{m^2r^2}}}.$$

Отсюда находим зависимость $r(\varphi)$, определяющую траекторию частицы:

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{M\,dr}{\pm r^2\sqrt{2m(E - U(r)) - \frac{M^2}{r^2}}}, \quad \varphi_0 = \varphi(t_0). \qquad (6.6)$$

Формулы (6.5) и (6.6) определяют в квадратурах закон движения частицы в центральном поле.

В центральном поле энергия частицы определяется выражением (6.4), из которого видно, что радиальную часть движения можно рассматривать как одномерное движение в поле с *"эффективной" потенциальной энергией*

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r).$$

Величину $M^2/2mr^2$ называют *центробежной энергией.*

Границы области движения по расстоянию от центра, в частности минимальное расстояние между частицей и силовым центром, определяются равенством

$$U_{\text{eff}}(r) = E. \tag{6.7}$$

Значения r, при которых выполняется равенство (6.7), называются *точками поворота*, поскольку в этом случае радиальная скорость $\dot{r} = 0$, а угловая скорость $\dot{\varphi}$ не обращается в нуль, т.е. $r(t)$ переходит от увеличения к уменьшению или наоборот.

Задача 6.2. Найдите уравнение траектории частицы массы m в центральном поле с потенциалом

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}, \qquad \alpha > 0, \;\; \beta > 0.$$

Определите условие замкнутости траектории.

□ Пусть в начальный момент времени t_0 частица находится на минимальном расстоянии $r_0 = r_{\min}$ от силового центра. Будем отсчитывать угол φ от направления радиуса-вектора в этот момент времени, т.е. положим $\varphi_0 = 0$. Тогда, подставляя $U(r)$ в формулу (6.6) и производя интегрирование, найдем:

$$\varphi = \int_{r_{\min}}^{r} \frac{M\,dr}{r^2\sqrt{2m\left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}\right) - \frac{M^2}{r^2}}} =$$

$$= M \int_{r_{\min}}^{r} \frac{-d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{2m\beta + M^2} + 2mE - \frac{\left[(2m\beta + M^2)\frac{1}{r} - m\alpha\right]^2}{2m\beta + M^2}}} =$$

$$= -\frac{M}{\sqrt{2m\beta + M^2}} \arcsin \frac{\left(2\beta + \frac{M^2}{m}\right)\frac{1}{r} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4E\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}}\Bigg|_{r_{\min}}^{r} . \quad (6.8)$$

Для нахождения $r_{\min}$ воспользуемся формулой (6.7):

$$-\frac{\alpha}{r_{\min}} + \frac{\beta}{r_{\min}^2} + \frac{M^2}{2mr_{\min}^2} = E.$$

Отсюда

$$\frac{1}{r_{\min}} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4E\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}}{2\beta + \frac{M^2}{m}}. \quad (6.9)$$

Подставляя это значение в (6.6), имеем:

$$\varphi = \frac{M}{\sqrt{2m\beta + M^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\left(2\beta + \frac{M^2}{m}\right)\frac{1}{r} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4E\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}}\right] =$$

$$= \frac{M}{\sqrt{2m\beta + M^2}} \arccos \frac{\left(2\beta + \frac{M^2}{m}\right)\frac{1}{r} - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4E\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}}. \quad (6.10)$$

Введем обозначения:

$$p = \frac{2\beta}{\alpha} + \frac{M^2}{m\alpha}, \ \ e = \sqrt{1 + \frac{4E}{\alpha^2}\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}, \ \ \omega = \sqrt{1 + \frac{2m\beta}{M^2}}.$$

С учетом сделанных обозначений из (6.10) получаем уравнение траектории:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\omega\varphi)}. \quad (6.11)$$

Из (6.11) следует, что в случае $E < 0$ $(e < 1)$ движение частицы будет финитным. При этом условие замкнутости траектории имеет вид:

$$
\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{{}^{M}\!/_{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\left(E+\frac{\alpha}{r}-\frac{\beta}{r^2}\right)-\frac{M^2}{r^2}}} = 2\pi\frac{k}{n}, \tag{6.12}
$$

где k и n – произвольные целые числа. Условие (6.12) означает, что через k полных оборотов точка займет первоначальное положение. С помощью (6.7) находим, что

$$
\frac{1}{r_{\max}} = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4E\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}}{2\beta + \frac{M^2}{m}}. \tag{6.13}
$$

Вычисляя интеграл в выражении (6.12) с учетом (6.9) и (6.13), определяем, что траектория будет замкнутой при $\omega = {}^{k}\!/_{n}$. ■

Задача 6.3. Задача двух тел. Имеются две частицы массами m_1 и m_2. Потенциальная энергия их взаимодействия зависит только от расстояния между частицами, а внешние силы отсутствуют. Определите закон движения системы.

□ Лагранжиан системы двух частиц имеет вид:

$$
L = \frac{m_1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|),
$$

где $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ – радиусы-векторы частиц m_1 и m_2, соответственно.

Выберем в качестве обобщенных координат системы радиус-вектор центра инерции

$$
\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{6.14}
$$

и вектор взаимного расстояния точек

$$
\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2. \tag{6.15}
$$

Из выражений (6.14) и (6.15) находим:

$$
\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} + \frac{m_2\boldsymbol{r}}{m_1 + m_2}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} - \frac{m_1\boldsymbol{r}}{m_1 + m_2},
$$

откуда

$$\dot{\boldsymbol{r}}_1 = \dot{\boldsymbol{R}} + \frac{m_2 \dot{\boldsymbol{r}}}{m_1 + m_2}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_2 = \dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m_1 \dot{\boldsymbol{r}}}{m_1 + m_2}. \qquad (6.16)$$

Подставляя (6.16) в лагранжиан, получим:

$$L = \frac{\mu \dot{\boldsymbol{R}}^2}{2} + \frac{m \dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(r). \qquad (6.17)$$

Здесь $\mu = m_1 + m_2$ – полная масса системы, а $m = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ называется *приведенной массой*.

Из (6.17) видно, что лагранжиан в координатах $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}$ распадается на два слагаемых, зависящих от различных наборов переменных, т.е. его можно представить в виде

$$L = L_1(\dot{\boldsymbol{R}}) + L_2(\dot{\boldsymbol{r}}, r).$$

Лагранжиан L_1 описывает движение частицы с массой μ и радиусом-вектором $\boldsymbol{R}$, а лагранжиан L_2 – движение частицы с массой m и радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ в заданном потенциальном поле $U(r)$.

Тот факт, что лагранжиан является суммой лагранжианов этих систем означает, что уравнения Лагранжа для первой системы не содержат координат второй, и наоборот, и потому их движения независимы. Таким образом, законы движения определяются отдельно для функций L_1 и L_2.

Для функции $L_1 = \mu \dot{\boldsymbol{R}}^2/2$ компоненты $\boldsymbol{R}$ являются циклическими координатами. Поэтому $\partial L/\partial \dot{\boldsymbol{R}}$ есть сохраняющийся импульс системы, т.е.

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} = \mu \dot{\boldsymbol{R}} = \text{const}.$$

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{R}(t) = \frac{\boldsymbol{P} t}{\mu} + \boldsymbol{R}(0),$$

т.е. центр инерции движется прямолинейно и равномерно.

Лагранжиан

$$L_2 = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(r)$$

описывает движение -точки – воображаемой точки массы m в центральном поле с неподвижным центром, находящимся в центре инерции системы двух тел. Закон движения приведенной массы m в центральном поле $U(r)$ определяется интегралами (6.5) и (6.6). ■

Задачи для самостоятельного решения

6.4. Найдите уравнение траектории частицы массы m, движущейся в центральном поле с потенциалом

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \;\; \alpha = \text{const}.$$

6.5. Частица массы m движется в центральном поле с потенциалом

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}\ln\frac{r}{r_0} \quad (\alpha, r_0 = \text{const} > 0).$$

Постройте график зависимости $U_{\text{eff}}(r)$, опишите возможные типы движения и для случая равенства нулю полной энергии точки найдите уравнение траектории.

6.6. Найдите уравнение траектории частицы массы m, движущейся в центральном поле с потенциалом

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2} \quad (\alpha = \text{const} > 0).$$

6.7. Частица массы m движется в поле $U = -\alpha/r^6, \alpha = \text{const} > 0$. Полная энергия равна нулю. Найдите уравнение траектории частицы.

6.8. Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц имеет вид

$$U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{k}{2}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2, \;\; k = \text{const}.$$

Найдите $\boldsymbol{r}_1(t)$ и $\boldsymbol{r}_2(t)$.

6.9. Атом состоит из ядра массы M и n электронов одинаковых масс m. Исключите движение центра инерции и сведите задачу к задаче о движении n частиц. Найдите лагранжиан рассматриваемой системы.

6.10. Напишите лагранжиан системы из двух частиц, имеющих массы m_1 и m_2 и заряды q_1 и $-q_2$ $(q_1, q_2 > 0)$, в системе центра масс. Определите, при каких значениях полной энергии система совершает финитное движение.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

6.4. $r = \dfrac{p}{\pm 1 + e\cos\varphi}$, знак "+" ("-") берется при $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$;

$$p = \frac{M^2}{m|\alpha|}, e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}.$$

6.5. $E < U_{\text{eff}}^{\min}$ – движение невозможно;

$U_{\text{eff}}^{\min} < E < 0$ – финитное движение;

$E \geq 0$ – инфинитное движение;

при $E = 0$ $\quad r = r_0 \exp\left\{\dfrac{m\alpha}{2M^2}(\varphi - C)^2 + \dfrac{M^2}{2m\alpha}\right\}$; $\quad C = \text{const}$.

6.6. $r = \dfrac{1}{a\cos(\omega\varphi) + b\sin(\omega\varphi)}$; $\quad \omega = \sqrt{1 + \dfrac{2m\alpha}{M^2}}$, $\; a, b = \text{const}$.

6.7. $r^2 = \dfrac{\sqrt{2m\alpha}}{M}\cos[2(\varphi + C)]$

6.8. $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{R} + \dfrac{m}{m_1}(\boldsymbol{a}\cos(\omega t) + \boldsymbol{b}\sin(\omega t))$,

$$\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{R} - \frac{m}{m_2}(\boldsymbol{a}\cos(\omega t) + \boldsymbol{b}\sin(\omega t)); \; \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \text{const}.$$

$$\mathbf{6.9.}\ L=\frac{m}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{\boldsymbol{r}}_i^2-\frac{m^2}{2(M+nm)}\left(\sum_{i=1}^{n}\dot{\boldsymbol{r}}_i\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n}\frac{e^2}{|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j|}+\sum_{i=1}^{n}\frac{ne^2}{r_i},$$

здесь e – заряд электрона, а $\boldsymbol{r}_i$ – расстояние от i-го электрона до ядра. Начало отсчета выбрано в центре инерции атома.

$$\mathbf{6.10.}\ L=\frac{\mu\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2}+\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}+\frac{q_1q_2}{|\boldsymbol{r}|},\ \ \mu=m_1+m_2,\ \ \ m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2},\ \ \ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,$$

$\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ – радиусы-векторы материальных точек. $E<0$ – условие финитного движения.

§7. Интегрирование уравнений движения

В двух предыдущих параграфах уже были рассмотрены задачи на нахождение закона движения механической системы с использованием интегралов движения (законов сохранения) – закона сохранения энергии для одномерного движения (§ 5) и законов сохранения энергии и момента импульса для движения в центральном поле (§ 6). В данном параграфе рассмотрим еще ряд задач на применение интегралов движения.

Задача 7.1. Сферический маятник. Проинтегрируйте уравнения движения частицы массы m, движущейся по абсолютно гладкой поверхности сферы радиуса R в однородном поле тяжести.

□ Лагранжиан для сферического маятника (задача 2.4)

$$L=\frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)+mgR\cos\theta.$$

Видно, что координата φ – циклическая, а $\partial L/\partial t=0$. Следовательно, имеется два интеграла движения – обобщенный импульс p_φ (совпадающий с проекцией M_z момента импульса на полярную ось z) и энергия E:

$$p_\varphi=M_z=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mR^2\sin^2\theta\dot{\varphi}\ , \tag{7.1}$$

$$E = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - mgR\cos\theta. \quad (7.2)$$

Из интеграла движения (7.1) следует, что

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z}{mR^2\sin^2\theta}. \quad (7.3)$$

Подставляя это выражение в (7.2), получим:

$$E = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + U_{\text{eff}}(\theta), \quad (7.4)$$

где

$$U_{\text{eff}}(\theta) = \frac{M_z^2}{2mR^2\sin^2\theta} - mgR\cos\theta.$$

Из (7.4) находим, что

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E - U_{eff}(\theta)\right)},$$

и, следовательно,

$$dt = \frac{d\theta}{\pm\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E - U_{eff}(\theta)\right)}}. \quad (7.5)$$

Знак “+” (“−”) берется на участках траектории, где $\dot{\theta} > 0$ ($\dot{\theta} < 0$).

Интегрируя (7.5), получим

$$t - t_0 = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pm\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E - U_{\text{eff}}(\theta)\right)}}, \quad \theta_0 = \theta(t_0). \quad (7.6)$$

Из равенства (7.3) находим

$$d\varphi = \frac{M_z}{mR^2\sin^2\theta}dt,$$

или, с учетом (7.5),

$$d\varphi = \pm \frac{M_z}{mR^2 \sin^2\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2}\big(E - U_{\text{eff}}(\theta)\big)}}.$$

Интегрируя это выражение, имеем

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{M_z d\theta}{\sin^2\theta \sqrt{2mR^2\big(E - U_{\text{eff}}(\theta)\big)}}, \qquad \varphi_0 = \varphi(t_0). \quad (7.7)$$

Формулы (7.6) и (7.7) являются решением в квадратурах поставленной задачи. ■

Задача 7.2. Проинтегрируйте уравнения движения частицы массы m и заряда q, находящейся в магнитном поле бесконечного прямого тока.

□ Введем цилиндрическую систему координат, ось z которой направим вдоль тока. Силовые линии магнитного поля представляют собою концентрические окружности, плоскость которых перпендикулярна току. Поэтому вектор напряженности магнитного поля $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ будет иметь единственную отличную от нуля составляющую $\mathcal{H}_\varphi$. Для ее нахождения воспользуемся законом полного тока. В качестве замкнутой кривой L (контура интегрирования) выберем окружность радиуса ρ, перпендикулярную к току и имеющую центр на оси тока. Тогда

$$\oint_L \mathcal{H}_\varphi dl = 2\pi\rho\mathcal{H}_\varphi = \frac{4\pi}{c} I, \quad (7.8)$$

где I – сила тока. Из (7.8) находим, что

$$\mathcal{H}_\varphi = \frac{2I}{c\rho}\ .$$

В цилиндрических координатах (см. приложение 2)

$$\text{rot}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix},$$

а равенство $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{(\partial A_z)}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial A_\varphi}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial A_\rho}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial \rho} = \dfrac{2I}{c\rho}, \\ \dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \dfrac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right) = 0. \end{cases} \tag{7.9}$$

Положим $A_\rho = 0$, $A_\varphi = 0$. Тогда из второго уравнения системы (7.9) имеем

$$A_z = -\frac{2I}{c}\ln\frac{\rho}{\rho_0}, \qquad \rho_0 = \mathrm{const}.$$

Прямой подстановкой легко убедиться, что при сделанном выборе векторного потенциала все уравнения системы (7.9) обращаются в тождества.

Поскольку по условию задачи электрическое поле отсутствует, скалярный потенциал ϕ можно положить равным нулю (см. задачу 3.4). При этом лагранжиан частицы

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{2qI}{c^2}\ln\frac{\rho}{\rho_0}\dot{z}. \tag{7.10}$$

Из (7.10) видно, что φ и z – циклические координаты, а ${\partial L}/{\partial t} = 0$. Это означает, что интегралами движения являются обобщенные импульсы

$$p_\varphi = M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}\,, \tag{7.11}$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} - \frac{2qI}{c^2}\ln\frac{\rho}{\rho_0}, \tag{7.12}$$

и энергия

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2). \tag{7.13}$$

Интегралы движения (7.11)-(7.13) позволяют найти закон движения частицы в квадратурах. Действительно, выражая $\dot{\varphi}$ и $\dot{z}$ из (7.11) и (7.12) соответственно, представим энергию (7.13) в виде

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \frac{M_z^2}{m^2\rho^2} + \left(\frac{p_z}{m} + \frac{2qI}{mc^2}\ln\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2\right),$$

откуда

$$\dot{\rho} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(\rho))}. \tag{7.14}$$

Здесь

$$U_{eff}(\rho) = \frac{M_z^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}\left(p_z + \frac{2qI}{c^2}\ln\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2,$$

а знак “+” (“–”) берется на участках траектории, где $\dot{\rho} > 0$ ($\dot{\rho} < 0$). Разделение переменных в (7.14) приводит к равенству

$$dt = \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(\rho))}}, \tag{7.15}$$

интегрируя которое, имеем (полагаем, что $\rho(t_0) = \rho_0$):

$$t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(\rho))}}. \tag{7.16}$$

Из выражений (7.11) и (7.12), учитывая (7.15), находим, что

$$d\varphi = \frac{M_z}{m\rho^2}dt = \pm\frac{M_z d\rho}{\rho^2\sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(\rho))}},$$

$$dz = \left(\frac{p_z}{m} + \frac{2Iq}{mc^2}\ln\frac{\rho}{\rho_0}\right)dt = \pm\left(p_z + \frac{2Iq}{c^2}\ln\frac{\rho}{\rho_0}\right)\frac{d\rho}{\sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(\rho))}}.$$

Интегрирование последних двух уравнений дает:

$$\varphi - \varphi_0 = \pm\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{M_z d\rho}{\rho^2\sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(\rho))}}, \quad \varphi_0 = \varphi(t_0). \tag{7.17}$$

$$z - z_0 = \pm \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \left(p_z + \frac{2Iq}{c^2} \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) \frac{d\rho}{\sqrt{2m(E - U_{\text{eff}}(\rho))}}, \qquad z_0 = z(t_0). \quad (7.18)$$

Интегралы (7.16)-(7.18) задают закон движения частицы. ■

Задача 7.3 Частица массы m и заряда q движется в поле с векторным потенциалом

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{r}}{r^3}, \ \ \boldsymbol{\mu} = \text{const},$$

в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{\mu}$. Определите возможные типы движения и найдите закон движения в квадратурах.

□ Воспользуемся цилиндрической системой координат, ось z которой направим вдоль $\boldsymbol{\mu}$, а плоскость $z = 0$ совместим с плоскостью движения частицы.

Векторный потенциал

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho^3} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ 0 & 0 & \mu \\ \rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\mu}{\rho^2} \boldsymbol{e}_\varphi,$$

а лагранжиан (3.11) есть

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{q\mu}{c\rho} \dot{\varphi}.$$

Поскольку лагранжиан явно от времени не зависит, а координата φ – циклическая, то интегралами движения являются энергия

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2), \tag{7.19}$$

и обобщенный импульс

$$p_\varphi = M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} + \frac{q\mu}{c\rho}. \tag{7.20}$$

Из (7.20) находим, что

$$\dot{\varphi} = \frac{\left(M_z - \frac{q\mu}{c\rho}\right)}{m\rho^2}\,. \tag{7.21}$$

Подставляя (7.21) в (7.19), имеем:

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + U_{\text{eff}}(\rho), \tag{7.22}$$

где

$$U_{\text{eff}}(\rho) = \frac{\left(M_z - \frac{q\mu}{c\rho}\right)^2}{2m\rho^2}\,. \tag{7.23}$$

С целью определения возможных типов движения частицы проанализируем зависимость $U_{\text{eff}}(\rho)$. Очевидно, что при $\rho \to \infty$, эффективная потенциальная энергия $U_{\text{eff}} \to 0$, а при $\rho \to 0$, $U_{\text{eff}} \to \infty$. Приравнивая производную $dU_{\text{eff}}/d\rho$ к нулю, получим:

$$\left(\frac{M_z c}{q\mu}\rho - 1\right)\left(\frac{M_z c}{2q\mu}\rho - 1\right) = 0. \tag{7.24}$$

Отсюда следует, что при $M_z/q \le 0$ уравнение (7.24) не имеет решений, а следовательно, функция (7.23) не имеет локальных экстремумов. Схематично график функции $U_{\text{eff}}(\rho)$ для данного случая представлен на рис. 7.1 (а). В этом случае при любой энергии E частица совершает инфинитное движение.

В противном случае, $M_z/q > 0$, решениями (7.24) будут:

$$\rho^{(1)} = \frac{q\mu}{M_z c}, \qquad \rho^{(2)} = \frac{2q\mu}{M_z c}.$$

Значение $\rho^{(1)}$ соответствует минимуму функции $U_{\text{eff}}(\rho)$, а значение $\rho^{(2)}$ – ее локальному максимуму. Подставляя $\rho^{(2)}$ в (7.23), найдем значение локального максимума функции $U_{\text{eff}}(\rho)$:

$$U_{\text{eff}}^{\max} = \frac{c^2 M_z^4}{32mq^2\mu^2}.$$

График $U_{\text{eff}}(\rho)$ для $M_z/q > 0$ приведен на 7.1 (б). Видно, что при $E > U_{\text{eff}}^{\max}$ движение инфинитно, а при $E \le U_{\text{eff}}^{\max}$ движение может быть как инфинитным (в области $\rho > \rho_3$ для энергии E_2 на рисунке), так и финитным ($\rho_1 < \rho < \rho_2$ для энергии E_2 на рисунке).

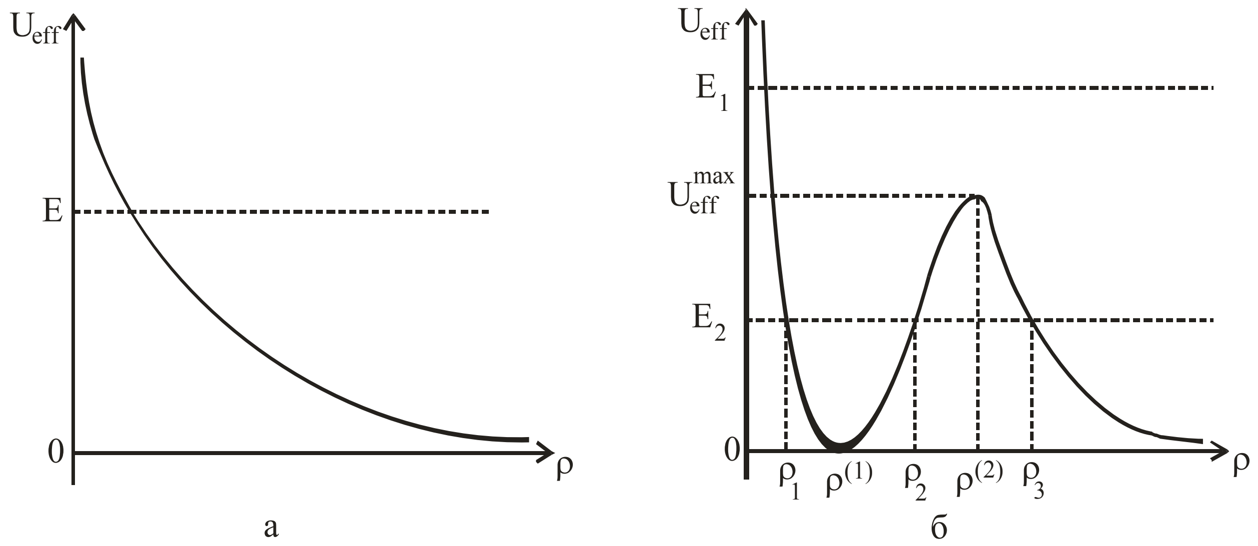


Рис. 7.1

Из соотношения (7.22) следует:

$$dt = \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - U_{\text{eff}}(\rho)\big)}}, \tag{7.25}$$

откуда

$$t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\big(E - U_{\text{eff}}(\rho)\big)}}, \qquad \rho_0 = \rho(t_0). \tag{7.26}$$

Знак “+” (“−”) в формулах (7.25) и (7.26) берется на участках траектории, где $\dot{\rho} > 0$ ($\dot{\rho} < 0$).

Учитывая (7.25), из (7.21) получаем:

$$d\varphi = \frac{\left(M_z - \frac{q\mu}{c\rho}\right)}{m\rho^2} dt = \frac{\left(M_z - \frac{q\mu}{c\rho}\right) d\rho}{\pm\rho^2\sqrt{2m\big(E - U_{\text{eff}}(\rho)\big)}}.$$

Интегрируя это выражение, находим, что

$$\varphi - \varphi_0 = \int\limits_{\rho_0}^{\rho} \frac{\left(M_z - \frac{q\mu}{c\rho}\right) d\rho}{\pm\rho^2 \sqrt{2m\big(E - U_{\text{eff}}(\rho)\big)}}, \qquad \varphi_0 = \varphi(t_0). \tag{7.27}$$

Выражения (7.26) и (7.27) определяют закон движения частицы. ■

Задача 7.4. Частица массы m движется по абсолютно гладкой поверхности вертикального цилиндра в поле тяжести. Радиус цилиндра увеличивается с постоянной скоростью. Найдите закон движения частицы.

□ Учитывая симметрию задачи, введем цилиндрическую систему координат с осью z, направленной вверх по оси цилиндра. Начало отсчета системы координат поместим в центр нижнего основания цилиндра, и потенциальную энергию будем отсчитывать от этого основания.

По условию задачи поверхность цилиндра увеличивается с постоянной скоростью, которую обозначим посредством $\dot{\rho}_0$. Таким образом, обобщенная скорость

$$\dot{\rho} = \dot{\rho}_0.$$

Отсюда следует, что

$$\rho = \dot{\rho}_0 t + R, \tag{7.28}$$

где R – постоянная, равная радиусу цилиндра в начальный момент времени. Условие (7.28) есть не что иное, как уравнение связи (голономной и идеальной) для рассматриваемой системы.

Лагранжиан частицы в цилиндрических координатах

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}_0{}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz,$$

или, с учетом (7.28),

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}_0{}^2 + (\dot{\rho}_0 t + R)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz. \tag{7.29}$$

Лагранжиан (7.29) зависит явно от времени (это означает, что энергия не сохраняется), а единственной циклической координатой является угол φ. Соответственно, можно найти один интеграл движения – закон сохранения обобщенного импульса p_φ, совпадающего с проекцией момента импульса частицы M_z на ось z:

$$M_z = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m(\dot{\rho}_0 t + R)^2 \dot{\varphi}. \qquad (7.30)$$

Интегрируя (7.30), находим (считая, что в начальный момент времени $t_0 = 0$, угол $\varphi = \varphi_0$):

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{M_z t}{mR(\dot{\rho}_0 t + R)}. \qquad (7.31)$$

Переменная z не является циклической, поэтому для нахождения закона движения по оси z воспользуемся уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$$

Имеем

$$\ddot{z} = -g,$$

откуда

$$z = -\frac{gt^2}{2} + \dot{z}_0 t + z_0, \qquad (7.32)$$

где $\dot{z}_0$ и z_0 – постоянные.

Выражения (7.28), (7.31) и (7.32) определяют закон движения частицы. ■

Задача 7.5. Частица массы m и заряда q движется по абсолютно гладкой поверхности кругового конуса с углом раствора 2α (рис. 1.5) в однородном и постоянном электрическом поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, направленной вдоль оси конуса. В вершине конуса закреплен заряд Q. Найдите закон движения частицы.

□ Введем сферическую систему координат с началом отсчета в вершине конуса и полярной осью, направленной вдоль вектора напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. При этом уравнение связи запишется в виде $\theta = \alpha$, а обобщенными координатами будут r и φ. Кинетическая энергия частицы равна

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2).$$

Скалярный потенциал можно представить в виде (см. задачи 3.5 и 3.7)

$$\phi = \frac{Q}{r} - \boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{r} = \frac{Q}{r} - \mathcal{E}r\cos\alpha.$$

Тогда лагранжиан

$$L = T - q\phi = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2) - \frac{qQ}{r} + q\mathcal{E}r\cos\alpha. \tag{7.33}$$

Координата φ является циклической, поэтому обобщенный импульс по этой координате сохраняется:

$$M_z = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi},$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z}{mr^2\sin^2\alpha}. \tag{7.34}$$

Также, поскольку время не входит в явном виде в лагранжиан, сохраняется обобщенная энергия, которую с учетом (7.34) можно представить в виде

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + \frac{qQ}{r} - q\mathcal{E}r\cos\alpha.$$

Отсюда

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} - \frac{qQ}{r} + q\mathcal{E}r\cos\alpha\right)},$$

и, следовательно,

$$dt = \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} - \frac{qQ}{r} + q\mathcal{E}r\cos\alpha\right)}}, \tag{7.35}$$

где знак “+” (“–”) берется на участках траектории, на которых $\dot{r} > 0$ ($\dot{r} < 0$).

Интегрируя последнее выражение, найдем

$$t - t_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} - \frac{qQ}{r} + q\mathcal{E}r\cos\alpha\right)}}, \ r_0 = r(t_0). \quad (7.36)$$

Согласно (7.34),

$$d\varphi = \frac{M_z}{mr^2\sin^2\alpha}dt.$$

Подставляя сюда dt из (7.35) и интегрируя, имеем (считаем $\varphi(t_0) = \varphi_0$):

$$\varphi - \varphi_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{M_z\,dr}{\pm r^2\sin^2\alpha\sqrt{2m\left(E - \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} - \frac{qQ}{r} + q\mathcal{E}r\cos\alpha\right)}}. \quad (7.37)$$

Зависимости (7.36) и (7.37) определяют закон движения частицы в квадратурах. ■

Задачи для самостоятельного решения

7.6. Частица массы m движется в поле тяжести по абсолютно гладкой поверхности кругового конуса с углом раствора 2α; ось конуса направлена вертикально (рис. 1.5). Найдите закон движения частицы.

7.7. Частица массы m движется в поле тяжести по поверхности горизонтальной абсолютно гладкой плоскости, совершающей колебания по закону $A\sin(\omega t)$, где A и ω – константы. Найдите закон движения частицы.

7.8. Частица массы m и заряда q движется по абсолютно гладкой прямой спице, составляющей угол α с вертикалью и вращающейся вокруг вертикальной оси с частотой ω. Система находится в однородном и постоянном электрическом поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, направленной по вертикали. Найдите закон движения частицы.

7.9. Частица массы m и заряда q движется по абсолютно гладкой поверхности сферы радиуса R в однородном и постоянном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. Найдите закон движения частицы.

7.10. Частица массы m и заряда q движется по абсолютно гладкой поверхности сферы радиуса R в однородном и постоянном электрическом поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Найдите закон движения частицы.

7.11. Частица массы m и заряда q движется по абсолютно гладкой поверхности кругового конуса с углом раствора 2α (рис. 1.5) в направленных вдоль оси конуса постоянных и однородных электрическом и магнитном полях с напряженностями $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ соответственно. Найдите закон движения частицы.

7.12. Частица массы m и заряда q движется по абсолютно гладкой поверхности вертикального цилиндра в поле тяжести и постоянном и однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленной вдоль оси цилиндра. Радиус цилиндра увеличивается с постоянной скоростью $\dot{\rho}_0$. Найдите закон движения частицы.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

7.6. $$t - t_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}(r)\right)}}, \qquad r_0 = r(t_0);$$

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{M_z}{\sqrt{2m}\sin^2\alpha} \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\pm r^2\sqrt{E - U_{\text{eff}}(r)}}, \qquad \varphi_0 = \varphi(t_0);$$

$$U_{eff}(r) = \frac{M_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha, \quad M_z = \text{const}, \quad E = \text{const}.$$

7.7. $$x = \frac{p_x}{m}t + x_o, \;\; y = \frac{p_y}{m}t + y_o, \;\; z = A\sin(\omega t); \quad p_x, p_y, x_o, y_o = \text{const}$$

7.8. $$t - t_0 = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{mr^2\omega^2\sin^2\alpha}{2} + q\mathcal{E}r\cos\alpha\right)}}, \; r_0 = r(t_0), \; E = \text{const}.$$

7.9. $$t - t_0 = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pm\sqrt{\frac{2E}{mR^2} - \sin^2\theta\left(\frac{M_z}{mR^2\sin^2\theta} - \frac{q\mathcal{H}}{2mc}\right)^2}}, \;\; \theta_0 = \theta(t_0);$$

$$\varphi-\varphi_0=\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{\left(\frac{M_z}{mR^2\sin^2\theta}-\frac{q\mathcal{H}}{2mc}\right)d\theta}{\pm\sqrt{\frac{2E}{mR^2}-\sin^2\theta\left(\frac{M_z}{mR^2\sin^2\theta}-\frac{q\mathcal{H}}{2mc}\right)^2}},\ \ \varphi_0=\varphi(t_0);$$

$E=\text{const},\ M_z=\text{const}.$

7.10. $$t-t_0=\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\pm\sqrt{\frac{2}{mR^2}\left(E-\frac{M_z^2}{2mR^2\sin^2\theta}+q\mathcal{E}R\cos\theta\right)}},\ \ \theta_0=\theta(t_0);$$

$$\varphi-\varphi_0=\int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{M_z d\theta}{\pm\sin^2\theta\sqrt{2mR^2\left(E-\frac{M_z^2}{2mR^2\sin^2\theta}+q\mathcal{E}R\cos\theta\right)}},\ \ \varphi_0=\varphi(t_0);$$

$E=\text{const},\ M_z=\text{const}.$

7.11. $$t-t_0=\int\limits_{r_0}^{r}\frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{mr^2\sin^2\alpha}{2}\left(\frac{M_z}{mr^2\sin^2\alpha}-\frac{q\mathcal{H}}{2mc}\right)^2+q\mathcal{E}R\cos\alpha\right)}},$$

$$\varphi-\varphi_0=\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\left(\frac{M_z}{mr^2\sin^2\alpha}-\frac{q\mathcal{H}}{2mc}\right)dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{mr^2\sin^2\alpha}{2}\left(\frac{M_z}{mr^2\sin^2\alpha}-\frac{q\mathcal{H}}{2mc}\right)^2+q\mathcal{E}R\cos\alpha\right)}},$$

$r_0=r(t_0),\ \ \varphi_0=\varphi(t_0),\ \ \ E=\text{const},\ M_z=\text{const}.$

7.12. $\rho=\dot\rho_0 t+R;\ \ \varphi-\varphi_0=\dfrac{M_z t}{mR(\dot\rho_0 t+R)}-\dfrac{q\mathcal{H}}{2mc}t,\ \ \varphi_0=\varphi(t=0);$

$z=-\dfrac{gt^2}{2}+\dot z_0 t+z_0;\ \ M_z,R,\dot z_0,z_0=\text{const}.$

§ 8. Рассеяние частиц

Рассмотрим однородный поток одинаковых частиц, налетающих на неподвижный силовой центр из бесконечности, где все они имеют одинаковую скорость v_∞. Если после прохождения силового центра частицы отклоняются от своего первоначального направления и снова уходят на бесконечность, то такой процесс называют *рассеянием частиц*. На рис. 8.1 схематично изображена траектория движения одной из частиц потока.

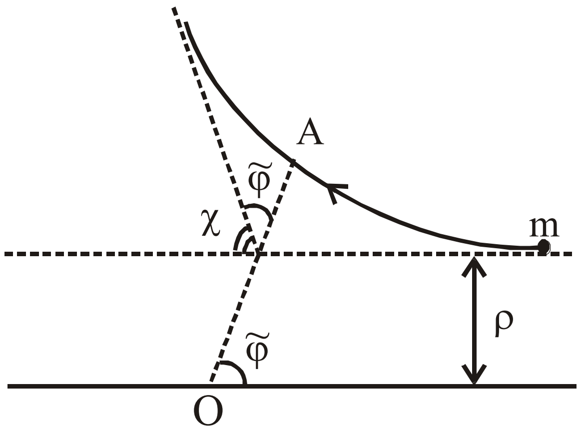


Рис. 8.1

Пусть потенциальная энергия взаимодействия частиц с полем зависит только от расстояния r до силового центра (точки O на рисунке), т.е. $U = U(r)$. Угол между асимптотами траектории называется *углом рассеяния* (на рисунке угол рассеяния обозначен посредством χ). Если бы частица не взаимодействовала с силовым центром, то она прошла бы на расстоянии ρ от него. Расстояние ρ называют *прицельным параметром*. Траектория частицы в центральном поле симметрична по отношению к прямой, проведенной в ближайшую к силовому центру точку орбиты (отрезок OA на рисунке). Поэтому обе асимптоты пересекают указанную прямую под одинаковыми углами. Обозначим эти углы через $\tilde{\varphi}$. Угол $\tilde{\varphi}$ связан с центральным углом соотношением

$$\chi = |\pi - 2\tilde{\varphi}|. \tag{8.1}$$

Поместим начало O полярной системы координат в силовом центре. Будем отсчитывать угол φ от радиуса-вектора $\boldsymbol{r}_{\min} = \overrightarrow{OA}$. Полярный угол φ будет определяться формулой (6.6). Поскольку частица уходит на бесконечность, то для определения $\tilde{\varphi}$ верхний предел интегрирования в (6.6) следует положить равным ∞. Ввиду того, что энергия E и момент импульса M частицы сохраняются, их значения могут быть выражены через начальную скорость частицы v_∞ и прицельный параметр:

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2} \text{ и } M = mv_\infty\rho.$$

Тогда из формулы (6.6) получим:

$$\tilde{\varphi} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho/r^2 \ dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2}}}. \tag{8.2}$$

Формула (6.7) для определения минимального расстояния между частицей и силовым центром в новых обозначениях запишется в виде

$$1 - \frac{\rho^2}{r_{\min}^2} - \frac{2U}{mv_\infty^2} = 0. \tag{8.3}$$

В физических приложениях, как правило, приходится иметь дело с рассеянием целого пучка одинаковых частиц, падающих на силовой центр с одинаковой скоростью v_∞. Этот пучок можно охарактеризовать *плотностью потока* частиц n, под которой подразумевается число частиц, пролетающих за секунду через перпендикулярную к пучку единичную площадку.

Частицы пучка рассеиваются на разные углы χ в зависимости от того, с каким прицельным параметром они летят. Будем считать, что связь между ρ и χ является взаимно однозначной. Тогда частицы, прицельный параметр которых лежит в пределах $[\rho,\ \rho + d\rho]$, рассеиваются в интервал углов $[\chi,\ \chi + d\chi]$. В случае однородного по сечению пучка поток частиц, прицельный параметр которых попадает в интервал $[\rho,\ \rho + d\rho]$, равен $dN = 2\pi n\rho \mathrm{d}\rho$.

Основной характеристикой процесса рассеяния является *дифференциальное эффективное сечение рассеяния*, $d\sigma$, которое определяется как отношение числа частиц, рассеянных в интервал углов $[\chi,\ \chi + d\chi]$ в единицу времени к плотности потока налетающих частиц, т.е.

$$d\sigma = \frac{\mathrm{d}N}{n} = 2\pi\rho d\rho.$$

Отсюда, переходя от переменной ρ к χ, получим:

$$d\sigma = 2\pi\rho(\chi) \left|\frac{\mathrm{d}\rho(\chi)}{\mathrm{d}\chi}\right| d\chi. \tag{8.4}$$

Здесь производная $\mathrm{d}\rho(\chi)/\mathrm{d}\chi$ взята по модулю, поскольку, как правило, $\mathrm{d}\rho(\chi)/\mathrm{d}\chi < 0$ (как правило, чем меньше ρ, тем больше угол рассеяния χ). Часто $\mathrm{d}\sigma$ относят не к элементу плоского угла $\mathrm{d}\chi$, а к элементу телесного угла $\mathrm{d}\Omega$. Телесный угол между конусами с углами раствора χ и $\chi + \mathrm{d}\chi$ есть $\mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\chi\mathrm{d}\chi$. Учитывая это, из (8.4) находим:

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\Omega. \tag{8.5}$$

Полное сечение рассеяния, σ, можно получить либо интегрированием (8.4) по углу рассеяния χ в пределах от 0 до π, либо интегрированием (8.5) по всему телесному углу.

Задача 8.1. Найдите дифференциальное и полное сечения рассеяния частиц от поверхности абсолютно твердого шара радиуса R.

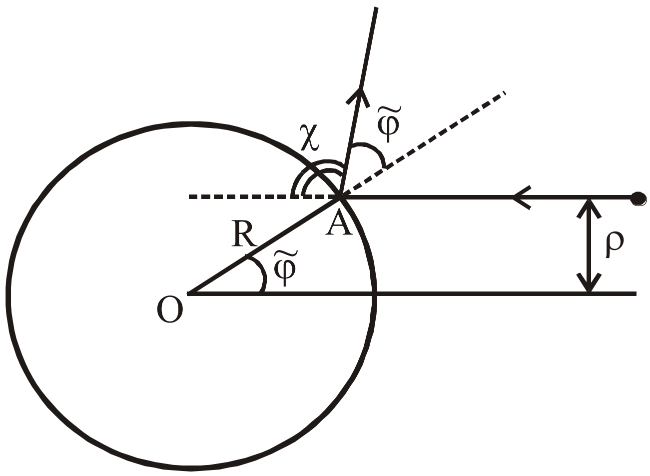


Рис. 8.2

□ Поскольку в данном случае угол падения частиц равен углу отражения, траектория каждой частицы будет состоять из двух прямых, расположенных симметрично относительно радиуса, проведенного в точку столкновения частицы с шаром. Схематично процесс рассеяния показан на рис. 8.2. Из рисунка видно, что

$$\rho = R\sin\tilde{\varphi}.$$

Пользуясь равенством (8.1), перепишем выражение для ρ в виде:

$$\rho = R\sin\frac{\pi - \chi}{2} = R\cos\frac{\chi}{2}.$$

Подставляя это выражение в (8.5), найдем:

$$d\sigma = \frac{R^2}{4} d\Omega.$$

Для нахождения полного сечения рассеяния проинтегрируем $d\sigma$ по всему телесному углу $d\Omega$, получим:

$$\sigma = \int \frac{R^2}{4} d\Omega = \pi R^2.$$

Отсюда виден геометрический смысл найденного полного сечения рассеяния: для того, чтобы частица могла вообще рассеяться ей необходимо попасть в площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр и расположенной перпендикулярно скорости частицы. ■

Задача 8.2. Найдите дифференциальное сечение рассеяния частиц в поле

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2} \quad (\alpha > 0).$$

□ Формула (8.2) в условиях данной задачи принимает вид:

$$\tilde{\varphi} = \int\limits_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho dr}{r\sqrt{r^2 - \left(\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv_\infty^2}\right)}}. \tag{8.6}$$

Вычислив интеграл (8.6), найдем:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}} \arcsin \frac{\sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}}{r_{\min}}. \tag{8.7}$$

Значение $r_{\min}$ ищем из условия (8.3):

$$1 - \frac{\rho^2}{r_{\min}^2} - \frac{2\alpha}{mv_\infty^2 r_{\min}^2} = 0,$$

откуда

$$r_{\min} = \sqrt{\rho^2 + \frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}.$$

Подставляя $r_{\min}$ в (8.7), имеем:

$$\tilde{\varphi} = \frac{\pi}{2}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \dfrac{2\alpha}{mv_\infty^2}}}.$$

Выражая отсюда ρ через $\tilde{\varphi}$ и учитывая, что $\tilde{\varphi} = (\pi - \chi)/2$, получаем:

$$\rho = \sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}\frac{\pi - \chi}{\sqrt{2\pi\chi - \chi^2}}. \tag{8.8}$$

Дифференцирование этого выражения по χ дает:

$$\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| = \sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}\frac{\pi^2}{(2\pi\chi - \chi^2)^{3/2}}. \tag{8.9}$$

Дифференциальное сечение рассеяния получим, подставив (8.8) и (8.9) в формулу (8.5):

$$d\sigma = \frac{2\pi^2\alpha}{mv_\infty^2}\frac{\pi - \chi}{\chi^2(2\pi - \chi)^2}\frac{d\Omega}{\sin\chi}.$$

■

При движении в центральном поле (см. § 6) наличие центробежной энергии $M^2/2mr^2$, обращающейся при $r \to 0$ в бесконечность, как $1/r^2$, приводит обычно к невозможности проникновения движущихся частиц к центру поля. “Падение” частицы в центр поля возможно лишь при условии, что $U(r) \to -\infty$ либо как $-\alpha/r^2$ с $\alpha > M^2/2m$, либо пропорционально $-r^{-n}$ с $n > 2$. *Полное сечение захвата* или *“падения”* в центр поля определяется как отношение числа всех частиц данного пучка, захваченных за единицу времени, к плотности потока этого пучка до рассеяния.

Задача 8.3. Определите полное сечение захвата частиц в центр поля

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \;\; \alpha > 0.$$

□ Чтобы частица достигла центра поля, необходимо выполнение условия $\alpha > M^2/2m$. Учитывая, что $M = mv_\infty\rho$, данное условие можно переписать в виде $2\alpha > m\rho^2 v_\infty^2$. Отсюда видно, что захватываются полем частицы, у которых прицельное расстояние

$$\rho \le \rho_{\max} = \sqrt{\frac{2\alpha}{mv_\infty^2}}.$$

Поэтому искомое сечение захвата

$$\sigma = \pi\rho_{\max}^2 = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}.$$

■

Задача 8.4. Определите полное сечение захвата в центр поля

$$U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}, \qquad \alpha > 0, \ \ \beta > 0.$$

□ На рис. 8.3 схематично представлены зависимости “эффективной” потенциальной энергии

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2} \tag{8.10}$$

для случаев $M^2/2m \ge \beta$ (а) и $M^2/2m < \beta$ (б).

Видно, что в случае $M^2/2m \ge \beta$ частицы не могут попасть в центр поля, при любой энергии падающих частиц возможно лишь их рассеяние.

Для случая $M^2/2m < \beta$ найдем максимальное значение “эффективной” потенциальной энергии. Из равенства

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}\right) = 0$$

определяем координату максимума функции (8.10):

$$r_0 = \frac{2\beta}{\alpha} - \frac{M^2}{m\alpha}.$$

Подставляя r_0 в (8.10), получаем:

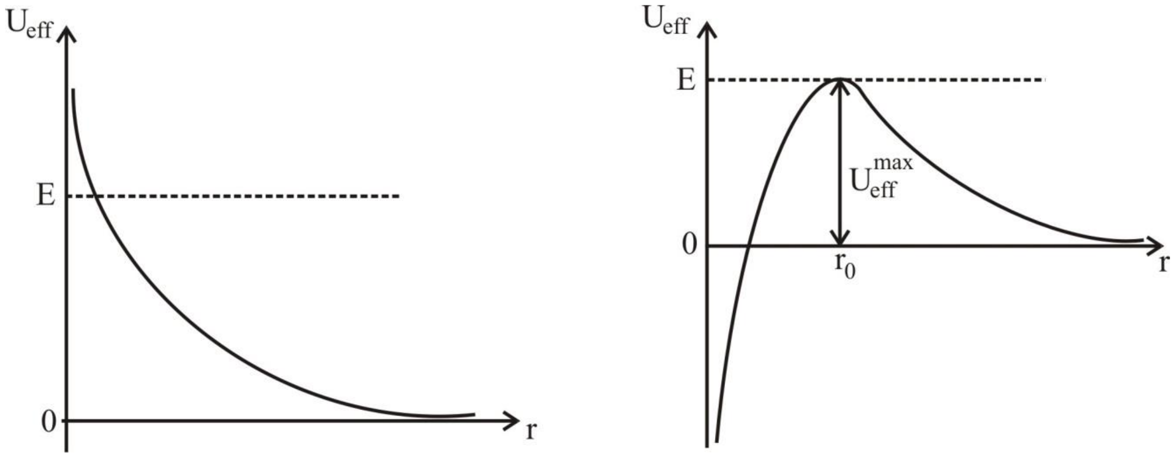
$$U_{\text{eff}}^{\max} = \frac{\alpha^2}{4\beta - 2mv_\infty^2\rho^2}.$$

Здесь учтено, что $M = mv_\infty\rho$.

Очевидно, что “падают” в центр те частицы, у которых $E > U_{\text{eff}}^{\max}$. Максимальное значение прицельного расстояния $\rho_{\max}$ находится из условия $E = U_{\text{eff}}^{\max}$ или

$$E = \frac{\alpha^2}{4\beta - 2mv_\infty^2\rho_{\max}^2} = \frac{\alpha^2}{4\beta - 4E\rho_{\max}^2}, \tag{8.11}$$

где учтено, что $E = {mv_\infty^2}/{2}$.



а) б)

Рис. 8.3

Из (8.11) находим, что

$$\rho_{\max}^2 = \frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2}.$$

Полное сечение захвата

$$\sigma = \pi\rho_{\max}^2 = \pi\left(\frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2}\right).$$

■

Задача 8.5. Формула Резерфорда. Найдите дифференциальное сечение рассеяния частиц в поле

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}, \qquad \alpha > 0.$$

□ По формуле (8.2) найдем значение $\tilde{\varphi}$

$$\tilde{\varphi} = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho\, dr}{r^2\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2\alpha}{mv_\infty^2 r}}} = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho\, d\left(\frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}\right)}{r^2\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4\rho^2} - \left(\frac{\rho}{r} + \frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}\right)^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{\frac{\rho}{r_{\min}} + \frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4\rho^2}}} - \arcsin\frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4\rho^2}}}. \qquad (8.13)$$

Значение $r_{\min}$ определим из условия (8.3), которое в рассматриваемом случае запишется в виде

$$1 + \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4\rho^2} - \left(\frac{\rho}{r_{\min}} + \frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}\right)^2 = 0.$$

Получим:

$$r_{\min} = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4\rho^2}} - \frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}. \qquad (8.14)$$

Подставляя (8.14) в (8.13), получаем:

$$\tilde{\varphi} = -\arcsin\frac{\frac{\alpha}{mv_\infty^2\rho}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4\rho^2}}}.$$

Выражая отсюда ρ через $\tilde{\varphi}$ и учитывая, что $\tilde{\varphi} = (\pi - \chi)/2$, имеем:

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2v_\infty^4}\operatorname{ctg}^2\frac{\chi}{2}.$$

Дифференциальное сечение рассеяния:

$$d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| \mathrm{d}\Omega = \frac{\alpha^2 d\Omega}{4m^2v_\infty^4 \sin^4\frac{\chi}{2}}.$$

Данное выражение называется формулой Резерфорда. ■

Задачи для самостоятельного решения

8.6. Поток частиц, скорости которых первоначально параллельны оси z, рассеивается на неподвижном упругом эллипсоиде вращения

$$\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad \rho=\sqrt{x^2+y^2}\ , a, c=\text{const}.$$

Найдите дифференциальное сечение рассеяния.

Указание: угол наклона касательной в точке падения частицы равен углу падения $\tilde{\varphi}$ и определяется соотношением $\text{tg}\tilde{\varphi}=dz/d\rho$ (рис. 8.4). Угол рассеяния $\chi=\pi-2\tilde{\varphi}$.

8.7. Найдите полное сечение захвата частиц в центр поля

$$U(r)=-\frac{\alpha}{r^n}, \qquad \alpha>0,\ \ n>2.$$

8.8. Найдите полное сечение захвата в центр поля

$$U(r)=\frac{\alpha}{r^2}-\frac{\beta}{r^4}, \qquad \alpha>0,\ \ \beta>0.$$

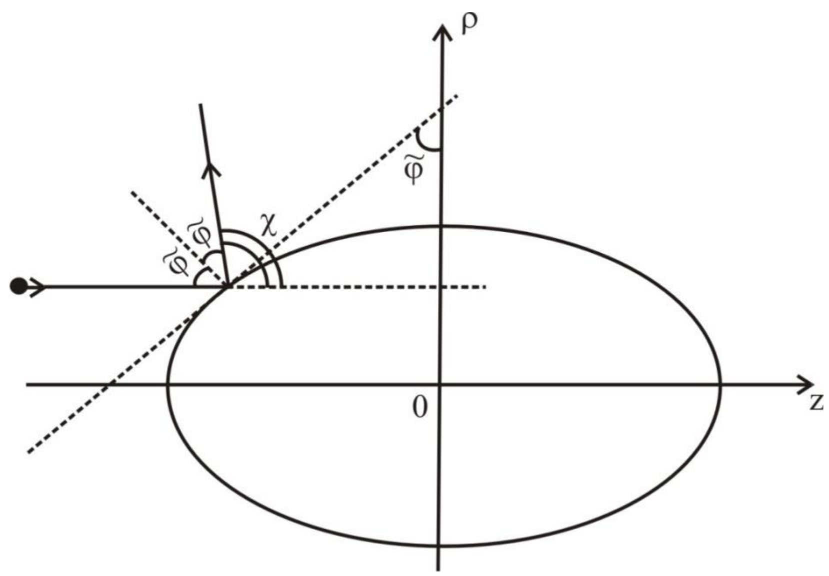


Рис. 8.4

8.6. $d\sigma = \dfrac{a^4c^2d\Omega}{4\cos^4\frac{\chi}{2}\left(a^2 + c^2\mathrm{tg}^2\frac{\chi}{2}\right)^2}$.

8.7. $\sigma = \pi n(n-2)^{(2-n)/n}\left(\dfrac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^{2/n}$. **8.8**. $\sigma = \pi\left(2\sqrt{\dfrac{\beta}{E}} - \dfrac{\alpha}{E}\right)$.

§ 9. Колебания систем со многими степенями свободы

Рассмотрим механическую систему с s степенями свободы, на которую наложены стационарные идеальные голономные связи и действуют потенциальные силы. Пусть потенциальная энергия системы зависит только от обобщенных координат q и имеет минимум в точке q^0. Обозначим отклонения системы от положения равновесия посредством $\xi_\alpha = q_\alpha - q_\alpha^0$, $\alpha = 1,2,\ldots,s$. Потенциальную энергию разложим в окрестности точки q^0 в ряд по малому параметру ξ_α с точностью до членов второго порядка малости, полагая $U(q^0) = 0$:

$$U = \frac{1}{2!}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}(q^0)\xi_\alpha\xi_\beta = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}k_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta, \tag{9.1}$$

где введено обозначение $k_{\alpha\beta} = \partial^2 U/\partial q_\alpha \partial q_\beta\ (q^0)$. Ряд (9.1) не содержит члена с первыми производными от U по координатам, поскольку по предположению потенциальная энергия имеет экстремум в точке q^0.

Кинетическая энергия рассматриваемой системы (см. задачу 2.3)

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}m_{\alpha\beta}(q)\dot{\xi}_\alpha\dot{\xi}_\beta, \tag{9.2}$$

где

$$m_{\alpha\beta}(q) = \sum_{i=1}^{N}m_i\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \xi_\beta};$$

$\boldsymbol{r}_i$ и m_i – радиусы-векторы и массы точек системы, соответственно.

Будем считать, что скорости $\dot{\xi}_\alpha$ малы. Тогда, чтобы получить в (9.2) форму второго порядка малости (такого же порядка малости, что и потенциальная энергия), разложим коэффициенты $m_{\alpha\beta}(q)$ в ряд, ограничиваясь первым членом разложения:

$$m_{\alpha\beta}(q) = m_{\alpha\beta}(q^0) + \cdots.$$

При этом (9.2) сводится к выражению

$$T = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s} m_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\alpha\dot{\xi}_\beta\,,$$

где для сокращения записи введено обозначение: $m_{\alpha\beta}(q^0) = m_{\alpha\beta}$.

Лагранжиан системы

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{s}\left(m_{\alpha\beta}\dot{\xi}_\alpha\dot{\xi}_\beta - k_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\right),$$

а уравнения Лагранжа есть

$$\sum_{\beta=1}^{s}(m_{\alpha\beta}\ddot{\xi}_\beta + k_{\alpha\beta}\xi_\beta) = 0, \quad \alpha = 1,2,\dots,s. \tag{9.3}$$

Частные решения системы (9.3) будем искать в виде

$$\xi_\beta = A_\beta e^{i\omega t}, \qquad \beta = 1,2,\dots,s,$$

где A_β – комплексные постоянные (“i” в экспоненте – мнимая единица). Подставляя ξ_β в (9.3) и сокращая на $e^{i\omega t}$, получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно A_β:

$$\sum_{\beta=1}^{s}\left(-\omega^2 m_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}\right)A_\beta = 0, \ \ \alpha = 1,2,\dots,s. \tag{9.4}$$

Чтобы эта система имела нетривиальные решения, ее определитель должен быть равен нулю, т.е.

$$\left|-\omega^2 m_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}\right| = 0. \tag{9.5}$$

Уравнение (9.5) называется *характеристическим уравнением*. Оно представляет собой алгебраическое уравнение степени s относительно ω^2 и имеет s корней ω_k^2 (k=1,2,…, s). Величины ω_k называются *собственными частотами* системы. Значения ω_k могут оказаться кратными, т.е. какие-то из частот могут совпадать. Такие частоты называются *вырожденными*.

После того как частоты ω_k найдены, подставляя каждую из них в систему (9.4), можно найти соответствующие значения $A_\beta^{(k)}$. В случае, когда все корни характеристического уравнения различны, система (9.4) имеет для каждого ω_k ровно одно линейно независимое решение $A_\beta^{(k)}$, которое можно представить в виде

$$A_\beta^{(k)} = \Delta_{\beta_k\beta}^{(k)} A_k, \qquad \beta = 1,2,\dots,s,$$

где A_k — произвольная комплексная постоянная, а $\Delta_{\beta_k\beta}^{(k)}$ — алгебраические дополнения элементов β_k-й строки характеристического детерминанта (9.5), взятого при значении $\omega = \omega_k$. Строка β_k выбирается произвольно, но так, чтобы в ней был хотя бы один элемент с отличным от нуля алгебраическим дополнением (такой элемент существует в силу предположения о невырожденности собственных частот).

Комплексную постоянную A_k выразим через действительные постоянные C_k и δ_k с помощью соотношения

$$A_k = C_k e^{i\delta_k}.$$

Тогда

$$A_\beta^{(k)} = \Delta_{\beta_k\beta}^{(k)} C_k e^{i\delta_k}, \qquad \beta = 1,2,\dots,s,$$

а частное решение

$$\xi_\beta = \Delta_{\beta_k\beta}^{(k)} C_k e^{i(\omega_k t + \delta_k)}, \;\; \beta = 1,2,\dots,s.$$

Переходя к вещественной части, имеем:

$$\xi_\beta = \Delta_{\beta_k\beta}^{(k)} C_k \cos(\omega_k t + \delta_k), \;\; \beta = 1,2,\dots,s.$$

Общим решением системы (9.3) будет

$$\xi_\beta = \sum_{k=1}^{s} \Delta_{\beta_k\beta}^{(k)} C_k \cos(\omega_k t + \delta_k), \quad \beta = 1,2,\dots,s. \tag{9.6}$$

Константы C_k и δ_k определяются начальными условиями.

Из (9.6) следует, что изменение каждой из координат системы со временем представляет собой суперпозицию s гармонических колебаний $\Theta_k = C_k\cos(\omega_k t + \delta_k)$. С помощью (9.6) можно выразить Θ_k через $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$. Таким образом, координаты Θ_k можно рассматривать как новые обобщенные координаты. Эти координаты (изменяющиеся по гармоническому закону, и, следовательно, удовлетворяющие уравнению $\ddot{\Theta}_k + \omega_k^2\Theta_k = 0$) называют *нормальными* или *главными* координатами.

Задача 9.1. Тело массы m_1, соединенное с пружиной жесткости k, другой конец которой закреплен неподвижно, может двигаться без трения по горизонтальной плоскости. К телу прикреплен математический маятник массы m_2 и длины l (рис. 9.1). Найдите лагранжиан системы и частоты малых колебаний.

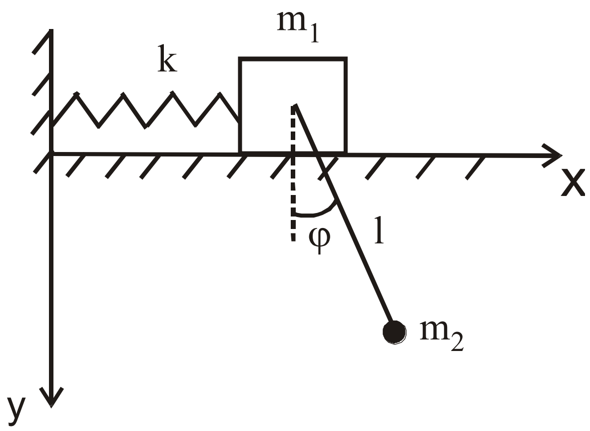


Рис. 9.1

□ В качестве обобщенных координат выберем координату x смещения тела массы m_1 от положения равновесия и угол φ отклонения от вертикали математического маятника. Кинетическую энергию можно записать в виде:

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2),$$

где x_2 и y_2 – декартовы координаты частицы m_2, выраженные через обобщенные координаты с помощью формул $x_2 = x + l\sin\varphi,\ y_2 = l\cos\varphi$.

Отсюда

$$\dot{x}_2 = \dot{x} + l\dot{\varphi}\cos\varphi,\ \ \dot{y}_2 = -l\dot{\varphi}\sin\varphi. \tag{9.7}$$

С учетом (9.7) кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} + m_2 l \dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi. \qquad (9.8)$$

Ограничиваясь членами второго порядка малости, полагаем в (9.8) $\cos\varphi = 1$. При этом

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} + m_2 l \dot{x}\dot{\varphi}.$$

Потенциальная энергия системы

$$U = \frac{k}{2}x^2 - m_2 g l \cos\varphi. \qquad (9.9)$$

Разлагая (9.9) в ряд до членов второго порядка малости, имеем:

$$U = \frac{k}{2}x^2 - m_2 g l\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right).$$

Опуская постоянную $m_2 g l$, находим функцию Лагранжа малых колебаний системы:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2 l^2 \dot{\varphi}^2}{2} + m_2 l \dot{x}\dot{\varphi} - \frac{k}{2}x^2 - m_2 g l \frac{\varphi^2}{2}.$$

Теперь составим уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2 l \ddot{\varphi} + kx = 0, \\ \ddot{x} + l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0. \end{cases} \qquad (9.10)$$

Частные решения этой системы ищем в виде:

$$x = A_1 e^{i\omega t}, \qquad \varphi = A_2 e^{i\omega t}.$$

Подставляя их в (9.10) и сокращая на $e^{i\omega t}$, имеем:

$$\begin{cases} (-(m_1 + m_2)\omega^2 + k)A_1 - m_2 l \omega^2 A_2 = 0, \\ -\omega^2 A_1 + (g - l\omega^2)A_2 = 0. \end{cases} \qquad (9.11)$$

Запишем характеристическое уравнение системы (9.11):

$$\begin{vmatrix} -(m_1 + m_2)\omega^2 + k & -m_2 l \omega^2 \\ -\omega^2 & g - l\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно ω^2:

$$\omega^4 - \left(\frac{k}{m_1} + \frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)\omega^2 + \frac{kg}{m_1 l} = 0.$$

Решая это уравнение, находим собственные частоты малых колебаний системы:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{k}{m_1} + \frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{k}{m_1} + \frac{g}{l}\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right)^2 - \frac{4kg}{m_1 l}}\right].$$

■

Задача 9.2. Проинтегрируйте уравнения движения и определите нормальные координаты малых колебаний плоского двойного математического маятника (рис. 2.1) при условии, что длины и массы математических маятников одинаковы.

□ Лагранжиан двойного математического маятника получен в задаче 2.5. В случае $m_1 = m_2 = m$ и $l_1 = l_2 = l$, он имеет вид:

$$L = ml^2\left(\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{\dot{\varphi}_2{}^2}{2} + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) + mgl(2\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2).$$

Считая колебания малыми, полагаем

$$\cos\varphi_1 \approx 1 - \frac{\varphi_1^2}{2}, \qquad \cos\varphi_2 \approx 1 - \frac{\varphi_2^2}{2}, \qquad \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \approx 1.$$

При этом

$$L = ml^2\left(\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{\dot{\varphi}_2{}^2}{2} + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) - mgl\left(\varphi_1^2 + \frac{\varphi_2^2}{2}\right),$$

а уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} 2\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \dfrac{2g}{l}\varphi_1 = 0, \\ \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 + \dfrac{g}{l}\varphi_2 = 0. \end{cases} \tag{9.12}$$

Ищем частные решения системы (9.12) в виде

$$\varphi_1 = A_1 e^{i\omega t}, \ \ \varphi_2 = A_2 e^{i\omega t}.$$

Подставляя φ_1 и φ_2 в (9.12), получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{2g}{l} - 2\omega^2\right) A_1 - \omega^2 A_2 = 0, \\ -\omega^2 A_1 + \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) A_2 = 0. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение этой системы:

$$\begin{vmatrix} \frac{2g}{l} - 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \frac{g}{l} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\omega_{1,2}^2 = \left(2 \pm \sqrt{2}\right)\frac{g}{l}.$$

Частным решением системы (9.12), соответствующим частоте ω_1 является:

$$\varphi_1(\omega_1) = \Delta_{11}^{(1)} C_1 e^{i(\omega_1 t + \delta_1)} = C_1 e^{i(\omega_1 t + \delta_1)},$$

$$\varphi_2(\omega_1) = \Delta_{12}^{(1)} C_1 e^{i(\omega_1 t + \delta_1)} = -\sqrt{2} C_1 e^{i(\omega_1 t + \delta_1)}.$$

Вторым частным решением системы (9.12) будет:

$$\varphi_1(\omega_2) = \Delta_{21}^{(2)} C_2 e^{i(\omega_2 t + \delta_2)} = C_2 e^{i(\omega_2 t + \delta_2)},$$

$$\varphi_2(\omega_2) = \Delta_{22}^{(2)} C_2 e^{i(\omega_2 t + \delta_2)} = \sqrt{2} C_2 e^{i(\omega_2 t + \delta_2)}.$$

Общее решение системы (9.12) записывается в виде:

$$\varphi_1 = \mathrm{Re}[\varphi_1(\omega_1) + \varphi_1(\omega_2)] = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2), \qquad (9.13)$$

$$\varphi_2 = \mathrm{Re}\left[\varphi_2(\omega_1) + \varphi_2(\omega_2)\right] =$$

$$= -\sqrt{2}(C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)). \qquad (9.14)$$

Из (9.13) и (9.14) видно, что

$$\Theta_1 = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_2\right) = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1),$$

и

$$\Theta_2 = \frac{1}{2}\left(\varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_2\right) = C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2).$$

являются нормальными (главными) координатами. ■

Рассмотрим теперь колебания молекул. -атомная молекула имеет $3N$ степеней свободы. Поступательному движению молекулы соответствует три степени свободы. Если не все атомы молекулы расположены вдоль одной прямой (нелинейная молекула), то также три степени свободы отвечают вращательному движению. Для линейной молекулы имеется всего две вращательные степени свободы. Таким образом, в случае нелинейной молекулы имеется $3N - 6$, а в случае линейной молекулы $3N - 5$ колебательных степеней свободы.

Представим радиус-вектор i-го атома молекулы $\boldsymbol{r}_i$ в виде $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i^0 + \boldsymbol{u}_i$, где $\boldsymbol{r}_i^0$ – радиус-вектор положения равновесия атома с номером i, а $\boldsymbol{u}_i$ – его отклонение от положения равновесия.

Исключение из рассмотрения поступательного движения молекулы как целого приводит к равенству

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{u}_i = 0, \tag{9.15}$$

а исключение вращения молекулы – к выражению

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\boldsymbol{r}_i^0 \times \boldsymbol{u}_i\right) = 0. \tag{9.16}$$

Здесь m_i – масса i-го атома. При рассмотрении задачи о колебаниях молекулы условия (9.15) и (9.16) являются голономными идеальными связями, наложенными на систему.

Задача 9.3. Найдите частоты и закон движения малых колебаний молекулы CO_2.

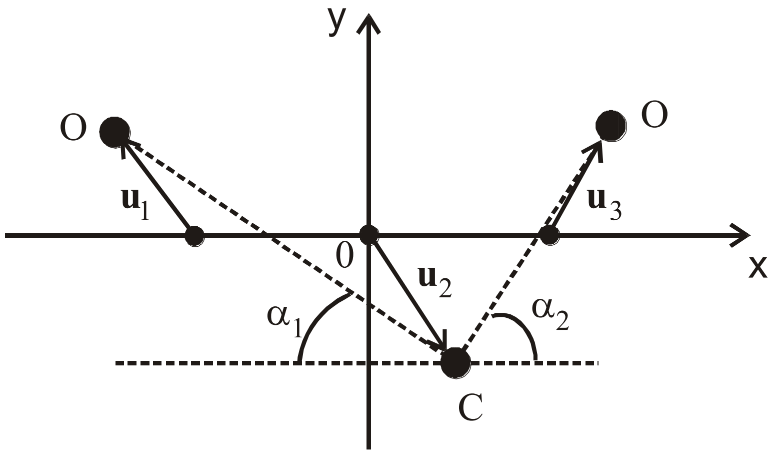


Рис. 9.2

□ Молекула CO_2 является линейной молекулой. Совместим положение равновесия атома углерода с началом прямоугольной декартовой системы координат, а ось x направим вдоль молекулы.

Рассмотрим сначала колебания молекулы в плоскости xy (рис. 9.2). Из симметрии задачи ясно, что для плоскости xz ситуация будет полностью аналогичной. Пронумеруем атомы слева направо и обозначим расстояния между атомами C и O в положении равновесия посредством l. Тогда радиусы-векторы атомов в положении равновесия будут $\boldsymbol{r}_1^0 = (-l, 0{,}0)$, $\boldsymbol{r}_2^0 = (0{,}0{,}0)$, $\boldsymbol{r}_3^0 = (l, 0{,}0)$. Смещения атомов от положения равновесия имеют компоненты: $\boldsymbol{u}_1 = (x_1, y_1, 0)$, $\boldsymbol{u}_2 = (x_2, y_2, 0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (x_3, y_3, 0)$. Пусть m — масса атома кислорода, а M — углерода. Для рассматриваемого случая условие (9.15) сводится к двум уравнениям:

$$m(x_1 + x_3) + Mx_2 = 0, \tag{9.17}$$

$$m(y_1 + y_3) + My_2 = 0; \tag{9.18}$$

а условие (9.16) принимает вид

$$y_1 = y_3. \tag{9.19}$$

В случае линейной молекулы различают колебания, сохраняющие ее прямолинейную форму (валентные колебания) и колебания, выводящие атомы с прямой (деформационные колебания). Будем считать, что валентные и деформационные колебания являются независимыми. Также будем предполагать, что между атомами молекулы действуют упругие силы. Потенциальную энергию валентных колебаний тогда можно записать как (считаем, что потенциальные энергии валентных связей $C - O$ независимы друг от друга)

$$U_1 = \frac{k}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2,$$

где $k > 0$ – коэффициент пропорциональности.

Потенциальная энергия деформационных колебаний зависит от угла α равного отклонению угла OCO от значения π, т.е. угол $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ (см. рис. 9.2). В случае малых колебаний $\alpha_1 \approx (y_1 - y_2)/l$, $\alpha_2 \approx (y_3 - y_2)/l$. Поэтому $\alpha \approx (y_1 - y_2)/l + (y_3 - y_2)/l.$ С учетом этого потенциальная энергия деформационных колебаний

$$U_2 = \frac{æ l^2 \alpha^2}{2} = \frac{æ}{2}[(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)]^2,$$

где $æ > 0$ – еще один коэффициент пропорциональности.

Лагранжиан молекулы

$$L = T - (U_1 + U_2) = \frac{m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2)}{2} + \frac{M(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)}{2} -$$

$$-\frac{k}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_3 - x_2)^2] - \frac{æ}{2}[(y_1 - y_2) + (y_3 - y_2)]^2. \quad (9.20)$$

Так как имеется три уравнения связей (9.17)-(9.19), то из шести переменных $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ только три являются независимыми. Выберем в качестве независимых координаты x_1, x_3, y_1. С помощью уравнений связей (9.17)-(9.19) остальные переменные выражаются через x_1, x_3, y_1:

$$x_2 = -\frac{m}{M}(x_1 + x_3), \qquad y_3 = y_1, \qquad y_2 = -\frac{2my_1}{M}.$$

Подставляя эти выражения в лагранжиан (9.20), найдем:

$$L = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{m^2}{M}\dot{x}_1\dot{x}_3 + m\left(1 + \frac{2m}{M}\right)\dot{y}_1^2 - 2æ\left(1 + \frac{2m}{M}\right)^2 y_1^2 -$$

$$-\frac{k}{2}\left[1 + \frac{2m}{M}\left(1 + \frac{m}{M}\right)\right](x_1^2 + x_3^2) - \frac{2km}{M}\left(1 + \frac{m}{M}\right)x_1 x_3.$$

Рассмотрим сперва уравнение движения по переменной y_1. Имеем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = 2m\left(1+\frac{2m}{M}\right)\ddot{y}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial y_1} = -4æ\left(1+\frac{2m}{M}\right)^2 y_1,$$

и уравнение Лагранжа

$$m\ddot{y}_1 + 2æ\left(1+\frac{2m}{M}\right)y_1 = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$y_1(t) = C_1\cos(\omega_1 t + \delta_1),$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2æ}{m}\left(1+\frac{2m}{M}\right)}.$$

Таким образом, частное решение уравнений движения, описывающее деформационное колебание молекулы CO_2, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(\omega_1 t + \delta_1).$$

Заметим, что частота ω_1 является двукратно вырожденной, поскольку с такой же частотой будут происходить деформационные колебания в плоскости xz.

Рассмотрим теперь валентные колебания. Запишем уравнения Лагранжа по переменным x_1 и x_3:

$$\begin{cases} m\rho\ddot{x}_1 + k\left(1+\dfrac{2m\rho}{M}\right)x_1 + \dfrac{m^2}{M}\ddot{x}_3 + \dfrac{2km\rho}{M}x_3 = 0, \\ \dfrac{m^2}{M}\ddot{x}_1 + \dfrac{2km\rho}{M}x_1 + m\rho\ddot{x}_3 + k\left(1+\dfrac{2m\rho}{M}\right)x_3 = 0. \end{cases} \tag{9.21}$$

Здесь $\rho = 1 + m/M$.

Частные решения ищем в виде

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, \qquad x_3 = A_3 e^{i\omega t}.$$

Подставляя частные решения в систему (9.21), находим:

$$\begin{cases} \left[-m\rho\omega^2 + k\left(1+\dfrac{2m\rho}{M}\right)\right]A_1 + \left(-\dfrac{m^2}{M}\omega^2 + \dfrac{2km\rho}{M}\right)A_3 = 0, \\ \left(-\dfrac{m^2}{M}\omega^2 + \dfrac{2km\rho}{M}\right)A_1 + \left[-m\rho\omega^2 + k\left(1+\dfrac{2m\rho}{M}\right)\right]A_3 = 0. \end{cases} \tag{9.22}$$

Характеристическое уравнение для системы (9.22) запишется, как

$$\begin{vmatrix} -m\rho\omega^2 + k\left(1+\dfrac{2m\rho}{M}\right) & \left(-\dfrac{m^2}{M}\omega^2 + \dfrac{2km\rho}{M}\right) \\ -\dfrac{m^2}{M}\omega^2 + \dfrac{2km\rho}{M} & -m\rho\omega^2 + k\left(1+\dfrac{2m\rho}{M}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k(2m+M)}{mM}}.$$

По стандартной процедуре (для невырожденных частот) получаем частные решения, соответствующие частотам ω_2 и ω_3:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \delta_2), \qquad \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_3 t + \delta_3).$$

Общим решением уравнений движения, описывающим колебание молекулы в плоскости xy, будет

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_3(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t + \delta_2) +$$

$$+ C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_3 t + \delta_3).$$

Как уже отмечалось ранее, еще одним независимым нормальным колебанием является деформационное колебание в плоскости xz. Соответствующее решение получится, если в вышеприведенных формулах заменить y на z. ■

Задачи для самостоятельного решения

9.4. Система уравнений Лагранжа для малых колебаний механической системы имеет вид ($a, b = \text{const} > 0$):

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2 + a\xi_1 = 0 \\ \ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2 + b\xi_2 = 0 \end{cases}$$

Найдите частоту колебаний системы.

9.5. Система уравнений Лагранжа для малых колебаний механической системы имеет вид (ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты, $m, k = \text{const}$; $m, k > 0$):

$$\begin{cases} m_1\ddot{\xi}_1 + k(\xi_1 - \xi_2) = 0 \\ m_2\ddot{\xi}_2 + k(\xi_2 - \xi_1) = 0 \end{cases}$$

Найдите частоту колебаний системы.

9.6. Система уравнений Лагранжа для малых колебаний механической системы имеет вид (ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты, $m, k, l = \text{const} > 0$):

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1 + k\xi_1 + l(\xi_1 - \xi_2) = 0 \\ m\ddot{\xi}_2 + k\xi_2 + l(\xi_2 - \xi_1) = 0 \end{cases}$$

Найдите частоту колебаний системы.

9.7. Найдите частоты малых колебаний системы, если ее лагранжиан имеет вид ($a, U_0 = \text{const}$, $U_0 > 0$):

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U_0 \sin\frac{x}{a}.$$

9.8. Найдите частоты малых колебаний системы, если ее лагранжиан имеет вид ($a, b, c = \text{const} > 0$):

$$L = \frac{a\dot{x}^2 - bx^2 - c}{2x}.$$

9.9. Найдите частоты малых колебаний системы, если ее лагранжиан имеет вид ($a, U_0 = \text{const}$, $U_0 > 0$):

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - U_0 x^2 e^{x/a}.$$

9.10. Найдите частоты малых колебаний системы, если ее лагранжиан имеет вид ($a, b, c = \text{const} > 0$):

$$L = \frac{a\dot{x}^2}{x} - \frac{bx}{\ln(x/c)}.$$

9.11. Найдите нормальные (главные) координаты системы, лагранжиан которой имеет вид ($m, k = \text{const} > 0$):

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right).$$

9.12. Найдите нормальные (главные) координаты системы, лагранжиан которой имеет вид ($m, k, \alpha = \text{const} > 0$):

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2\right) - \frac{k}{2}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) - \alpha\xi_1\xi_2.$$

9.13. Найдите нормальные (главные) координаты системы, лагранжиан которой имеет вид ($m_1, m_2, k_1, k_2 = \text{const} > 0$):

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2\right)^2 - \frac{k_1}{2}(\xi_1 + \xi_2)^2 - \frac{k_2}{2}(\xi_1 - \xi_2)^2.$$

9.14. Найдите закон движения и нормальные координаты системы, если ее лагранжиан

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy, \qquad \omega_0^2, \alpha = \text{const}, \quad \alpha > 0.$$

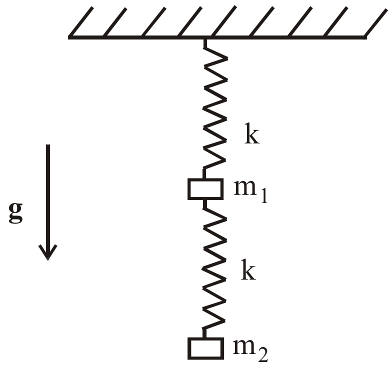


Рис. 9.3

9.15. Два груза массами m_1 и m_2 прикреплены к пружинам жесткости k (рис. 9.3). Найдите частоты малых колебаний системы в поле тяжести.

9.16. Два математических маятника одинаковой длины l и массы m связаны между собой пружиной жесткости k, закрепленной на расстоянии a от точки подвеса (рис. 2.3). Проинтегрируйте уравнения движения и найдите нормальные координаты малых колебаний.

9.17. Найти отношение частот антисимметричных и симметричных валентных колебаний линейной молекулы CO_2.

9.18. Найдите частоту колебаний двухатомной молекулы. Массы атомов которой равны m_1 и m_2.

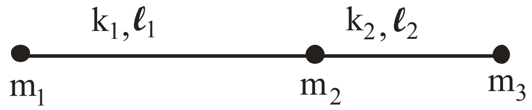


Рис. 9.4

9.19. Найдите частоты колебаний трехатомной линейной несимметричной молекулы, массы атомов которой равны m_1, m_2 и m_3 (рис. 9.4). Считать, что между атомами молекулы действуют упругие силы, с коэффициентами пропорциональности k_1, k_2 для валентных колебаний и æ для деформационных колебаний.

<u>Ответы к задачам для самостоятельного решения</u>

$\mathbf{9.4.}\ \omega = \sqrt{\dfrac{ab}{a+b}}$. $\mathbf{9.5.}\ \omega = \sqrt{\dfrac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$. $\mathbf{9.6.}\ \omega_1 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}, \omega_2 = \sqrt{\dfrac{k+2l}{m}}$.

$\mathbf{9.7.}\ \sqrt{\dfrac{U_0}{ma^2}}$. $\mathbf{9.8.}\ \sqrt{\dfrac{b}{a}}$. $\mathbf{9.9.}\ \sqrt{\dfrac{2U_0}{m}}$. $\mathbf{9.10.}\ \sqrt{\dfrac{b}{2a}}$. $\mathbf{9.11.}\ \Theta_1 = \xi_1, \Theta_2 = \xi_2$.

$\mathbf{9.12.}\ \Theta_1 = \dfrac{\xi_1+\xi_2}{\sqrt{2}}, \Theta_2 = \dfrac{\xi_1-\xi_2}{\sqrt{2}}$. $\mathbf{9.13.}\ \Theta_1 = \xi_1+\xi_2, \quad \Theta_2 = \xi_1-\xi_2$.

$\mathbf{9.14.}\ \omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \mp \alpha;\ x = C_1\cos(\omega_1 t+\delta_1) + C_2\cos(\omega_2 t+\delta_2);$

$y = C_1\cos(\omega_1 t+\delta_1) - C_2\cos(\omega_2 t+\delta_2);$

$\Theta_1 = \dfrac{x+y}{2}, \Theta_2 = \dfrac{x-y}{2};\ C_1, C_2, \delta_1, \delta_2 = \mathrm{const}.$

$$\mathbf{9.15.}\ \omega_{1,2}^2 = \frac{(2m_2+m_1)k}{2m_1m_2} \pm \sqrt{\frac{(2m_2+m_1)^2k^2}{4m_1^2m_2^2} - \frac{k^2}{m_1m_2}}.$$

$\mathbf{9.16.}\ \varphi_1 = C_1\cos(\omega_1 t+\delta_1) + C_2\cos(\omega_2 t+\delta_2),$

$$\varphi_2 = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2),$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}};$$

$$\Theta_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \Theta_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}; \quad C_1, C_2, \delta_1, \delta_2 = \mathrm{const}.$$

9.17. 1.9. **9.18.** $\omega = \sqrt{\dfrac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}, \qquad k = \mathrm{const}.$

9.19. $\omega_1^2 = \dfrac{æ(l_1 + l_2)^2}{4 l_1^2 l_2^2} \left(\dfrac{l_2^2}{m_1} + \dfrac{(l_1 + l_2)^2}{m_2} + \dfrac{l_1^2}{m_3} \right),$

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2}\right) + \left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_2}{m_3}\right) \pm \sqrt{\left(\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2}\right) + \left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{k_2}{m_3}\right)\right)^2 - \frac{4\mu k_1 k_2}{m_1 m_2 m_3}}}{2},$$

$$\mu = m_1 + m_2 + m_3.$$

§ 10. Тензор инерции

Как уже упоминалось ранее, под твердым телом в механике понимается система материальных точек, расстояния между которыми неизменны. Твердое тело обладает шестью степенями свободы (см. задачу 1.8). Для однозначного определения положения твердого тела относительно инерциальной системы отсчета K (с осями x, y, z) введем систему K' (с осями x', y', z'), жестко связанную с твердым телом. Начало отсчета системы K' удобно выбрать в центре инерции твердого тела. Произвольное перемещение твердого тела можно представить в виде параллельного переноса тела в пространстве и поворота вокруг центра инерции.

В качестве обобщенных координат, задающих положение твердого тела, выберем радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ центра инерции (для описания поступательного движения) и три угла, характеризующих ориентацию осей x', y', z' по отношению к осям x, y, z (для описания вращательного движения).

Кинетическая энергия твердого тела

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta} \Omega_\alpha \Omega_\beta, \tag{10.1}$$

где μ, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{\Omega}$ – масса, скорость центра инерции и угловая скорость вращения твердого тела, соответственно, а $I_{\alpha\beta}$ – *тензор моментов инерции* или просто *тензор инерции* тела. Индексы α, β в (10.1) нумеруют оси декартовой системы координат K'. Компоненты тензора инерции тела можно записать в виде следующей таблицы:

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sum m(y'^2 + z'^2) & -\sum m x' y' & -\sum m x' z' \\ -\sum m y' x' & \sum m(x'^2 + z'^2) & -\sum m y' z' \\ -\sum m z' x' & -\sum m z' y' & \sum m(x'^2 + y'^2) \end{pmatrix}, \tag{10.2}$$

где суммирование ведется по всем материальным точкам системы. Из представления (10.2) видно, что тензор инерции является *аддитивной* величиной – моменты инерции тела равны суммам моментов инерции его частей. Если возможно ввести плотность твердого тела ρ, то в (10.2) сумма заменяется интегралом по объему тела:

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \int \rho(y'^2 + z'^2) dV & -\int \rho x' y' dV & -\int \rho x' z' dV \\ -\int \rho y' x' dV & \int \rho(x'^2 + z'^2) dV & -\int \rho y' z' \, dV \\ -\int \rho z' x' dV & -\int \rho z' y' dV & \int \rho(x'^2 + y'^2) dV \end{pmatrix}. \tag{10.3}$$

Тензор инерции симметричен, т.е.

$$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}.$$

Как и всякий симметричный тензор второго ранга, тензор инерции может быть приведен к диагональному виду путем соответствующего выбора направлений осей x', y', z' относительно тела. Эти направления называют *главными осями* *инерции*, а соответствующие значения компонент тензора – *главными моментами инерции*. Обозначим главные моменты инерции посредством $I_{11} = I_{x'} = I_1$, $I_{22} = I_{y'} = I_2$, $I_{33} = I_{z'} = I_3$. Тензор инерции при этом будет иметь вид

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

а кинетическая энергия твердого тела запишется следующим образом:

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}(I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2). \qquad (10.4)$$

Следовательно, для определения кинетической энергии твердого тела надо найти его главные моменты инерции.

Задача 10.1. Определите главные моменты инерции двухатомной молекулы (такую систему можно рассматривать как *жесткий ротатор*: две частицы, скрепленные жестким невесомым стержнем).

□ Пусть l – расстояние между атомами. Направим ось z' по оси молекулы. Далее совместим начало координат с центром инерции молекулы, определяемым равенством

$$m_1 z_1' + m_2 z_2' = 0, \qquad (10.5)$$

где m_1, m_2 и z_1', z_2' – массы и координаты первого и второго атомов соответственно. Поскольку расстояние между атомами l, то

$$|z_2' - z_1'| = l. \qquad (10.6)$$

Из (10.5) и (10.6) находим (в предположении, что $z_2' > z_1'$):

$$z_1' = -\frac{m_2 l}{m_1 + m_2}; \quad z_2' = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Поскольку координаты x', y' атомов равны нулю, то, как видно из формулы (10.2), отличными от нуля компонентами тензора инерции будут

$$I_1 = I_2 = \sum_{a=1}^{2} m_a z_a'^2 = m_1 z_1'^2 + m_2 z_2'^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

Так как тензор инерции получился диагональным, то найденные значения являются главными моментами инерции молекулы.

■

Задача 10.2. Определите главные моменты инерции однородного шара массы μ и радиуса R.

□ В силу сферической симметрии центр инерции шара находится в его центре, а тензор инерции диагонален, причем $I_1 = I_2 = I_3 = I$. Вычисления удобно проводить в сферической системе координат с началом в центре шара. Поскольку декартовы прямоугольные координаты связаны со сферическими соотношениями $x' = r\sin\theta\cos\varphi$, $y' = r\sin\theta\sin\varphi$, $z' = r\cos\theta$, то момент инерции можно представить в виде:

$$I = \int \rho(x'^2 + y'^2)dV = \rho\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r^4\sin^3\theta\, dr d\varphi d\theta = \frac{8\pi R^5}{15}\rho. \qquad (10.7)$$

В формуле (10.7) учтено, что якобиан перехода от прямоугольных декартовых координат к сферическим равен $r^2\sin\theta$. Поскольку плотность шара $\rho = 3\mu/4\pi R^3$, то, подставляя это значение в (10.7), найдем:

$$I = \frac{2\mu R^2}{5}.$$

■

Формулы (10.2), (10.3) позволяют найти тензор инерции $I_{\alpha\beta}$, вычисленный относительно системы координат с началом в центре инерции твердого тела. Пусть $I_{\alpha\beta}^A$ – тензор инерции, определенный по отношению к системе координат с началом в точке A. Будем считать, что точка A находится на расстоянии $\boldsymbol{a}$ от центра инерции тела. Связь между тензорами $I_{\alpha\beta}^A$ и $I_{\alpha\beta}$ устанавливается соотношением

$$I_{\alpha\beta}^A = I_{\alpha\beta} + \mu\big(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\big), \qquad (10.8)$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, \text{при } \alpha = \beta, \\ 0, \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Задача 10.3. Определите главные моменты инерции однородного полушара массы μ и радиуса R (рис. 10.1).

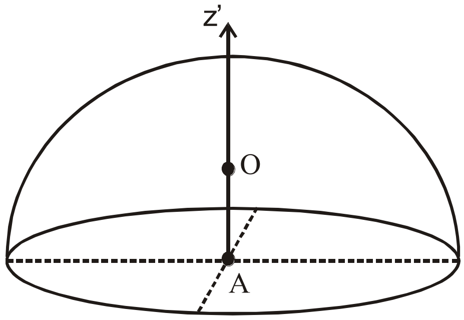


Рис. 10.1

□ Сначала определим тензор инерции полушара относительно системы координат с центром в точке A – центре шара. Поскольку тензор инерции аддитивен по отношению к частям, из которых состоит тело, то тензор инерции полушара $I^A_{\alpha\beta}(\mu)$ (вычисленный относительно точки A) связан с тензором шара $I_{\alpha\beta}(2\mu)$ (вычисленным относительно той же точки в задаче 10.2) выражением:

$$I^A_{\alpha\beta}(\mu) = \frac{I_{\alpha\beta}(2\mu)}{2} = \begin{cases} \frac{2}{5}\mu R^2, \text{при } \alpha = \beta, \\ 0, \qquad \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Теперь вычислим координаты центра инерции (точки O) полушара. Из соображений симметрии очевидно, что центр инерции будет находиться на оси z', т.е. координаты вектора $\boldsymbol{a}$, задающего положение центра инерции полушара относительно точки A, есть $(0, 0, a_3)$. Координата a_3 определяется равенством:

$$a_3 = \frac{1}{\mu}\int \rho z' dV = \frac{\rho}{\mu}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 \sin\theta\cos\theta\, dr d\varphi d\theta = \frac{3}{8}R.$$

Далее, используя формулу (10.8), найдем компоненты тензора $I_{\alpha\beta}(\mu)$ полушара относительно системы координат с центром в точке O. С учетом равенства нулю компонент a_1 и a_2, формула (10.8) будет иметь вид:

$$I_{\alpha\beta}(\mu) = I^A_{\alpha\beta}(\mu) - \mu\left(a_3^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right). \qquad (10.9)$$

С помощью соотношения (10.9) находим главные моменты инерции:

$$I_1(\mu) = I_{11}(\mu) = I_2(\mu) = I_{22}(\mu) = I^A_{11}(\mu) - \mu a_3^2 = \frac{83}{320}\mu R^2,$$

$$I_3(\mu) = I_{33}(\mu) = I^A_{33}(\mu) - \mu(a_3^2 - a_3^2) = \frac{2}{5}\mu R^2.$$

■

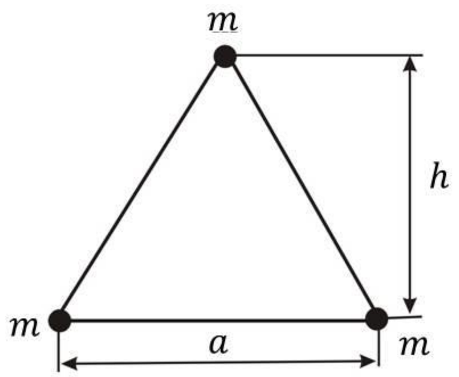


Рис. 10.2

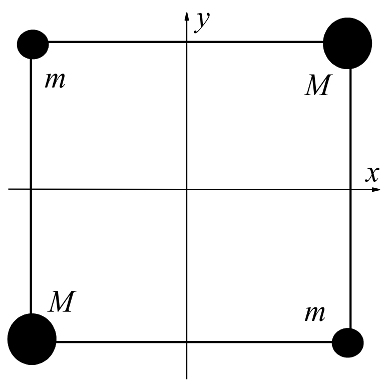
10.4. Найдите главные моменты инерции молекулы из трех одинаковых атомов, расположенных в вершинах равнобедренного треугольника (рис. 10.2).

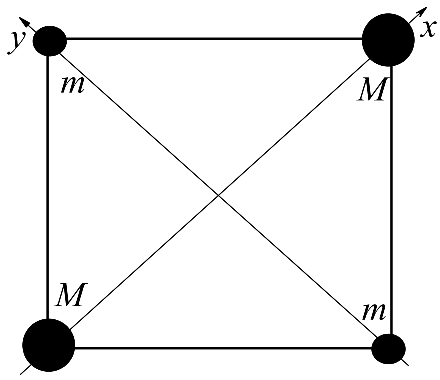
10.5. Твердое тело представляет собой набор N частиц массы m, находящихся на одной прямой, все расстояния между соседними частицами одинаковы и равны a. Чему равен тензор моментов инерции относительно центра масс такого твердого тела?

Указание: $$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

10.6. Твердое тело представляет собой набор N частиц массы m, находящихся на длинном узком стержне длиной l и массой M, расстояния между соседними частицами одинаковы и равны a. Чему равен тензор моментов инерции такого твердого тела относительно его центра масс?

10.7. Частицы с массами m и M расположены по вершинам квадрата со стороной a (рис. 10.3). Найдите тензор моментов инерции для осей x, y, z (ось z перпендикулярна плоскости рисунка и проходит через его центр) для различных направлений осей x, y (рис. 10.3а) и 10.3б)).





а) б)

Рис. 10.3

10.8. Четыре частицы массы m расположены по вершинам правильного тетраэдра со стороной a. Найдите тензор моментов инерции такого тела относительно центра масс в главных осях.

10.9. Определите главные моменты инерции однородного прямоугольного параллелепипеда с ребрами длины $2a, 2b, 2c$ и массой μ.

10.10. Определите главные моменты инерции однородного кругового конуса с высотой H, радиусом основания R и массой μ.

10.11. Определите главные моменты инерции сплошного однородного полуцилиндра массы μ, радиуса R и длины H.

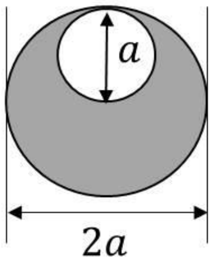


Рис. 10.4

10.12. Твердое тело представляет собой тонкий круглый диск массы M и радиуса a, в котором вырезано круглое отверстие диаметром a, как показано на рисунке 10.4. На каком расстоянии от центра круга находится центр инерции такого тела? Какова величина момента инерции относительно оси, перпендикулярной твердому телу и проходящей через его центр инерции?

10.13. Найдите тензор моментов инерции тонкостенной полусферы массы m и радиуса a относительно центра масс.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

$$\mathbf{10.4.}\, I_1 = \frac{2m}{3}h^2, \quad I_2 = \frac{m}{2}a^2, \quad I_3 = m\left(\frac{2}{3}h^2 + \frac{a^2}{2}\right);$$

центр инерции лежит на высоте треугольника на расстоянии $h/3$ от основания.

$$\mathbf{10.5.}\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.6. $\begin{pmatrix} \dfrac{Ml^2}{12}+\dfrac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{Ml^2}{12}+\dfrac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

10.7. а) $\begin{pmatrix} \dfrac{m+M}{2}a^2 & \dfrac{m-M}{2}a^2 & 0 \\ \dfrac{m-M}{2}a^2 & \dfrac{m+M}{2}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (m+M)a^2 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & (m+M)a^2 \end{pmatrix}.$

10.8. $\begin{pmatrix} ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & ma^2 \end{pmatrix}.$

10.9. $I_1=\dfrac{1}{3}\mu(b^2+c^2), I_2=\dfrac{1}{3}\mu(a^2+c^2),\ \ I_3=\dfrac{1}{3}\mu(a^2+b^2).$

10.10. $I_1=I_2=\dfrac{3}{20}\mu\left(R^2+\dfrac{H^2}{4}\right),\ \ I_3=\dfrac{3}{10}\mu R^2;\ \ z' -$ ось конуса.

10.11. $I_1=\mu R^2\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{16}{9\pi^2}\right)+\dfrac{\mu H^2}{12}, I_2=\dfrac{\mu}{4}\left(R^2+\dfrac{H^2}{3}\right), I_3=\dfrac{\mu R^2}{2}\left(1-\dfrac{32}{9\pi^2}\right);$

y' – ось, перпендикулярная плоскости разреза полуцилиндра, z' – ось, направленная вдоль полуцилиндра параллельно плоскости разреза.

10.12. Центр инерции находится на расстоянии $a/6$ от центра круга, момент инерции $\frac{37}{72}Ma^2$.

10.13. $\begin{pmatrix} \frac{5ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ma^2}{3} \end{pmatrix}$.

§ 11. Углы Эйлера. Интегрирование уравнений движения твердого тела

В § 10 отмечалось, что для описания вращательного движения твердого тела необходимо задать три угла, которые характеризуют ориентацию осей (x', y', z') системы K', жестко связанной с твердым телом, по отношению к осям (x, y, z) неподвижной системы K. Обычно в качестве трех таких углов используют эйлеровы углы φ, θ, ψ.

Для определения этих углов совместим начало системы K с началом системы K'. Это можно сделать, поскольку в данном случае нас не интересует поступательное движение тела. Любой поворот тела можно представить как последовательность показанных на рис. 11.1 трех поворотов:

– поворота вокруг оси z на угол φ (рис. 11.1 а);
– поворота вокруг полученной в результате первого поворота линии ON (называемой линией узлов) на угол θ (рис. 11.1 б);
– поворота вокруг оси z' на угол ψ (рис. 11.1 в).

Направление каждого из поворотов связано с направлением оси, вокруг которой он осуществляется, правилом правого винта. Линия узлов (как можно видеть из рисунка) есть линия пересечения плоскостей $x'y'$ и xy. Угол φ образован осью X и линией узлов, угол ψ – линией узлов и осью x, и угол θ есть угол между осями z и z'. Значения углов φ и ψ могут изменяться в пределах от 0 до 2π, а значение угла θ ограничивают интервалом от 0 до π.

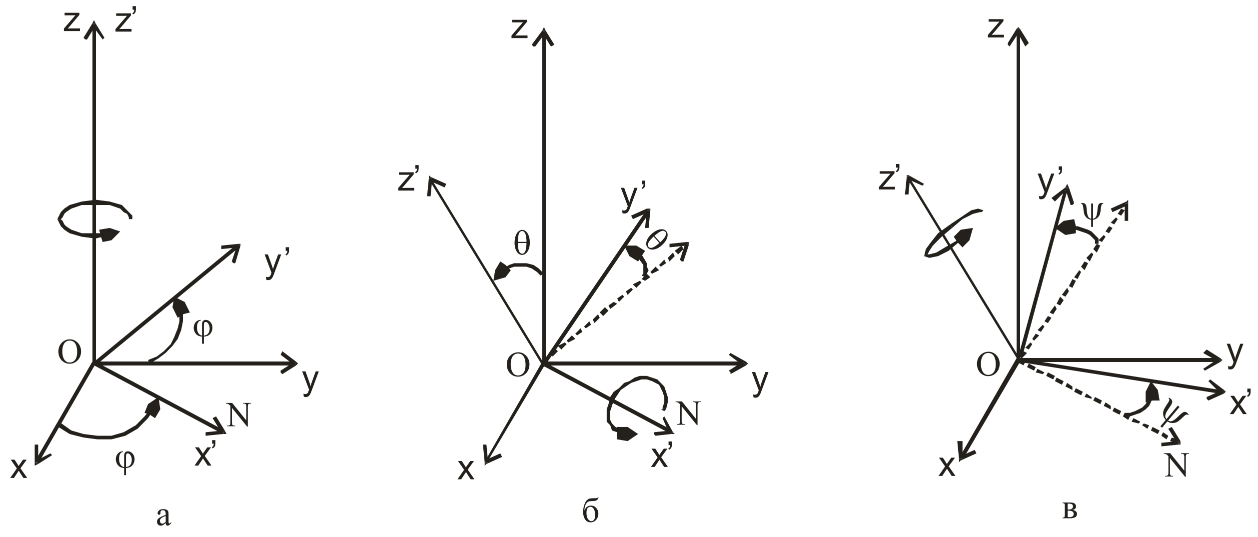


Рис. 11.1

Проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ на оси подвижной системы координат (x', y', z') определяются через эйлеровы углы следующими выражениями:

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\,, \\ \Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi, \\ \qquad \Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{cases} \tag{11.1}$$

С помощью этих выражений можно представить кинетическую энергию твердого тела (10.4) в виде функции от обобщенных координат θ, ψ и обобщенных скоростей $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\boldsymbol{R}}$ (здесь под $\dot{\boldsymbol{R}}$ понимаются производные по времени от координат центра инерции твердого тела). Потенциальная энергия твердого тела зависит от обобщенных координат $\boldsymbol{R}, \varphi, \theta, \psi$. Таким образом, лагранжиан твердого тела может быть записан в виде

$$L = T\big(\dot{\boldsymbol{R}}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \theta, \psi\big) - U(\boldsymbol{R}, \varphi, \theta, \psi).$$

Задача 11.1. Выразите кинетическую энергию вращательного движения симметрического волчка через углы Эйлера.

□ Симметрическим волчком называется любое твердое тело, у которого два главных момента инерции равны между собой и отличаются от третьего. Пусть, например,

$$I = I_1 = I_2 \neq I_3.$$

С помощью формул (10.4) и (11.1) для кинетической энергии вращательного движения получаем выражение:

$$T_{\text{вр}} = \frac{I}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \frac{I_3}{2}\Omega_3^2 = \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2. \quad (11.2)$$

■

Задача 11.2. Найдите лагранжиан однородного тонкого стержня массы μ и длины $2l$, движущегося в поле тяжести Земли.

□ В качестве обобщенных координат выберем координаты X, Y, Z центра тяжести (инерции) стержня и углы Эйлера φ, θ, ψ. Из соображений симметрии очевидно, что два главных момента инерции совпадают, например, $I = I_1 = I_2$, а момент инерции $I_3 = 0$ (толщиной стержня пренебрегаем). С учетом этого полная кинетическая энергия будет равна:

$$T = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right).$$

Момент инерции

$$I = \frac{\mu}{2l}\int_{-l}^{l} z'^2 dz' = \frac{\mu l^2}{3}.$$

Следовательно, выражение для кинетической энергии можно переписать в виде

$$T = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \frac{\mu l^2}{6}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right).$$

Направим ось z вертикально вверх, перпендикулярно поверхности Земли. Тогда потенциальная энергия стержня $U = \mu g Z$.

Лагранжиан

$$L = T - U = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right) + \frac{\mu l^2}{6}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) - \mu g Z.$$

■

Задача 11.3. Тонкий диск массы μ и радиуса R скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости, угол наклона которой α (рис. 11.2). Найдите лагранжиан и закон движения диска.

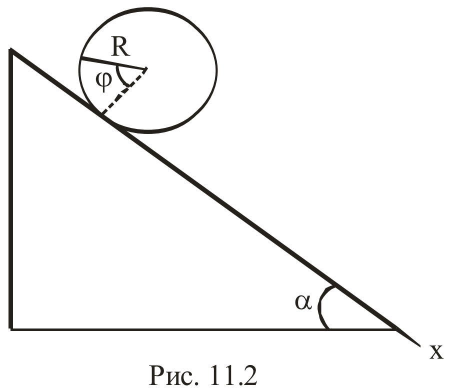


Рис. 11.2

□ Направим ось x вдоль наклонной плоскости и выберем в качестве обобщенной координаты координату центра инерции диска X. Тогда кинетическая энергия диска запишется в виде:

$$T = \frac{\mu\dot{X}^2}{2} + \frac{I_3\dot{\varphi}^2}{2}, \tag{11.3}$$

где I_3 — момент инерции диска относительно оси, проходящей через центр инерции и направленной перпендикулярно поверхности диска, а φ — угол поворота диска.

Вычислим момент инерции диска I_3:

$$I_3 = \int \sigma r^2 dS = \frac{\mu}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r^3 dr d\varphi = \frac{\mu R^2}{2},$$

где σ – поверхностная плотность.

Подставляя I_3 в формулу (11.3), найдем:

$$T = \frac{\mu\dot{X}^2}{2} + \frac{\mu R^2\dot{\varphi}^2}{4}. \tag{11.4}$$

Условие движения без проскальзывания приводит к связи

$$\dot{X} = R\dot{\varphi}.$$

С учетом условия связи из (11.4) получаем выражение для кинетической энергии диска:

$$T = \frac{3\mu\dot{X}^2}{4}.$$

Потенциальная энергия диска

$$U = -\mu g X \sin\alpha.$$

Лагранжиан

$$L = T - U = \frac{3\mu\dot{X}^2}{4} + \mu g X \sin\alpha,$$

а уравнение Лагранжа имеет вид:

$$\frac{3}{2}\mu\ddot{X} - \mu g \sin\alpha = 0.$$

Отсюда находим закон движения:

$$X = \frac{g}{3}t^2\sin\alpha + \dot{X}_0 t + X_0,$$

где $\dot{X}_0$ и X_0 – начальные скорость и координата центра инерции диска, соответственно. ■

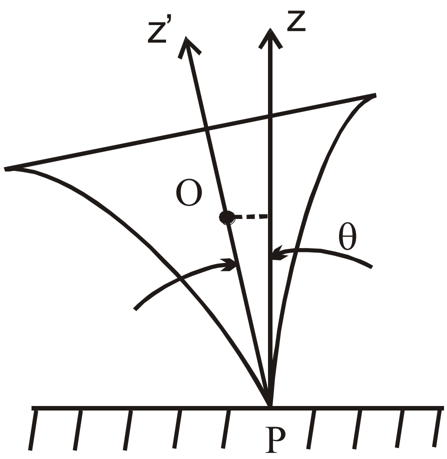


Рис. 11.3

Задача 11.4. Точка опоры симметрического волчка массы μ может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости (рис. 11.3). Найдите закон движения волчка в поле тяжести.

□ Пусть ось z' направлена по оси симметрии тела и пусть центр инерции тела (точка O на рисунке) лежит на расстоянии l от точки опоры P ($OP = l$). Ось z неподвижной системы координат направим вертикально вверх, а плоскость xy совместим с горизонтальной поверхностью. Пусть X, Y, Z – координаты центра инерции тела в неподвижной системе координат. Наличие точки опоры означает, что на волчок наложена связь $Z = l\cos\theta$. Отсюда следует также, что $\dot{Z} = -l\dot{\theta}\sin\theta$. Поэтому

$$T = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2.$$

Потенциальная энергия определяется расстоянием по вертикали от горизонтальной плоскости до центра масс тела, т.е.

$$U = \mu g Z = \mu g l \cos\theta.$$

Лагранжиан системы

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) +$$

$$+\frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 - \mu g l\cos\theta. \quad (11.5)$$

Эта функция не зависит от координат X, Y, φ, ψ, т.е. эти координаты – циклические. Соответствующие им сохраняющиеся обобщенные импульсы

$$P_X = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = \mu\dot{X}, \quad (11.6)$$

$$P_Y = \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} = \mu\dot{Y}, \quad (11.7)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)\cos\theta, \quad (11.8)$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right). \quad (11.9)$$

Первые два интеграла движения выражают законы сохранения проекций импульса на оси x, y. Третий и четвертый интегралы движения есть законы сохранения проекций момента импульса на оси z и z' соответственно, поскольку координаты φ и ψ являются углами поворота тела вокруг осей z и z'.

Лагранжиан (11.5) не зависит явно от времени, поэтому еще одним интегралом движения будет обобщенная энергия

$$E = \frac{\mu}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta\right) + \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) +$$

$$+\frac{I_3}{2}\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 + \mu g l\cos\theta. \quad (11.10)$$

Таким образом, мы имеем систему из пяти интегралов движения (11.6)–(11.10) для пяти неизвестных функций $X(t), Y(t), \varphi(t), \theta(t), \psi(t)$.

Из интегралов движения (11.6), (11.7) следует, что центр инерции тела движется в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью. С целью упрощения дальнейших выкладок исключим поступательное движение волчка, перейдя в систему отсчета, в которой $P_X = P_Y = 0$.

Из уравнения (11.9) следует, что третий член в правой части (11.10) есть постоянная величина $p_\psi^2/2I_3$.

Далее, с помощью (11.8) и (11.9) находим:

$$p_\varphi = I\dot{\varphi}\sin^2\theta + p_\psi\cos\theta\,. \qquad (11.11)$$

Выражая отсюда $\dot{\varphi}$ и подставляя в выражение для энергии (11.10), получим:

$$E_0 = \frac{\mu l^2}{2}\dot{\theta}^2\sin^2\theta + \frac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{2I\sin^2\theta} + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \mu g l\cos\theta,$$

где $E_0 = E - {p_\psi}^2\Big/_{2I_3}$.

Разделение переменных в этом уравнении дает:

$$dt = \pm\frac{\sqrt{\mu l^2\sin^2\theta + I}d\theta}{\sqrt{2E_0 - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{I\sin^2\theta} - 2\mu g l\cos\theta}}, \qquad (11.12)$$

откуда путем интегрирования находим:

$$t - t_0 = \int\limits_{\theta_0}^{\theta}\frac{\sqrt{\mu l^2\sin^2\theta + I}d\theta}{\pm\sqrt{2E_0 - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi\cos\theta\right)^2}{I\sin^2\theta} - 2\mu g l\cos\theta}}, \quad \theta_0 = \theta(t_0). \qquad (11.13)$$

Знак “+” (“–”) в формулах (11.12) и (11.13) берется на участках траектории с $\dot{\theta} > 0$ ($\dot{\theta} < 0$).

Разделяя переменные φ и t в уравнении (11.11) и используя (11.12), имеем:

$$d\varphi = \frac{\left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)}{I\sin^2\theta} \frac{\sqrt{\mu l^2 \sin^2\theta + I} d\theta}{\pm\sqrt{2E_0 - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)^2}{I\sin^2\theta} - 2\mu g l \cos\theta}}. \qquad (11.14)$$

Отсюда

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)}{I\sin^2\theta} \frac{\sqrt{\mu l^2 \sin^2\theta + I} d\theta}{\pm\sqrt{2E_0 - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)^2}{I\sin^2\theta} - 2\mu g l \cos\theta}}, \qquad (11.15)$$

где $\varphi_0 = \varphi(\, t_0)$.

Наконец, из уравнения (11.9) находим

$$\dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \cos\theta \dot{\varphi}. \qquad (11.16)$$

Разделение переменных в (11.16) с учетом (11.14) приводит к равенству

$$\psi - \psi_0 = \frac{p_\psi}{I_3}(t - t_0) -$$

$$- \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)\cos\theta}{I\sin^2\theta} \frac{\sqrt{\mu l^2 \sin^2\theta + I} d\theta}{\pm\sqrt{2E_0 - \frac{\left(p_\varphi - p_\psi \cos\theta\right)^2}{I\sin^2\theta} - 2\mu g l \cos\theta}}, \qquad (11.17)$$

где $\psi_0 = \psi(t_0)$.

Формулы (11.13), (11.15) и (11.17) определяют закон движения волчка в квадратурах. ■

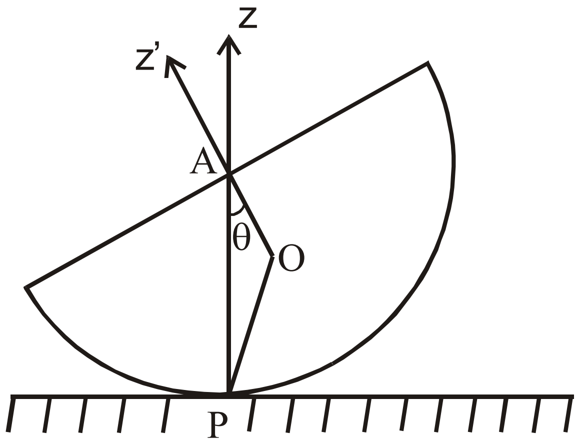


Рис. 11.4

Задача 11.5. Одна из половинок однородного шара массы μ находится на горизонтальной плоскости (рис. 11.4). Найдите частоту плоских малых колебаний в двух случаях: а) шероховатой плоскости; б) абсолютно гладкой плоскости.

□ Пусть R – радиус шара. Ось z неподвижной системы координат направим вертикально вверх. Плоскость xy совместим с горизонтальной поверхностью. Центр инерции (точка O) находится на оси симметрии полушара (оси z' жестко связанной с телом системы координат) на расстоянии $OA = a_3 = 3/8\,R$ от центра шара (см. задачу 10.3).

Момент инерции относительно оси вращения (см. задачу 10.3)

$$I = \frac{83}{320}\mu R^2. \tag{11.17}$$

Пусть θ – угол поворота полушара, P – точка соприкосновения полушара с плоскостью. Вектор PO обозначим через $\boldsymbol{c}$.

а) В случае шероховатой поверхности движение происходит без проскальзывания. При этом (поскольку скорость точки касания должна быть равна нулю) скорость центра инерции $\boldsymbol{V}$ связана с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ соотношением:

$$\boldsymbol{V} - (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{c}) = 0,$$

откуда

$$V^2 = \dot{\theta}^2 c^2.$$

Кинетическая энергия полушара

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{\mu c^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{83}{320}\mu R^2 \frac{\dot{\theta}^2}{2}.$$

Выражая c^2 через R и a_3 и полагая в силу малости колебаний $\theta \approx 0$, имеем:

$$c^2 = R^2 + a_3^2 - 2Ra_3\cos\theta \approx (R - a_3)^2 = \frac{25}{64}R^2. \qquad (11.18)$$

С учетом (11.18) кинетическая энергия принимает вид:

$$T = \frac{208}{640}\mu R^2\dot{\theta}^2. \qquad (11.19)$$

Потенциальная энергия определяется высотой центра инерции над плоскостью, т.е.

$$U = \mu g(R - a_3\cos\theta),$$

или, с учетом малости колебаний (раскладывая $\cos\theta$ до квадратичного члена),

$$U = \frac{5}{8}\mu gR + \frac{3}{16}\mu gR\theta^2. \qquad (11.20)$$

С помощью выражений (11.19) и (11.20) составляем функцию Лагранжа:

$$L = T - U = \frac{208}{640}\mu R^2\dot{\theta}^2 - \frac{3}{16}\mu gR\theta^2$$

(опущена константа $-5/8\,\mu gR$).

Записывая уравнение Лагранжа по переменной θ

$$\frac{208}{320}\mu R^2\ddot{\theta} + \frac{3}{8}\mu gR\theta = 0,$$

видим, что частота малых колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{15}{26}\frac{g}{R}}.$$

б) В случае абсолютно гладкой поверхности центр инерции смещается только по вертикали, следовательно, $V^2 = \dot{Z}^2$. Координата центра масс $Z = R - a_3\cos\theta$, откуда $\dot{Z} = a_3\dot{\theta}\sin\theta$. Полагая, в силу малости колебаний $\theta \approx 0$, имеем:

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{I\dot{\theta}^2}{2} = \frac{83}{640}\mu R^2\dot{\theta}^2. \qquad (11.21)$$

Потенциальная энергия по-прежнему определяется формулой (11.20), так что лагранжиан

$$L = \frac{83}{640}\mu R^2\dot{\theta}^2 - \frac{3}{16}\mu g R\theta^2,$$

а уравнение Лагранжа есть

$$\frac{83}{320}\mu R^2\ddot{\theta} + \frac{3}{8}\mu g R\theta = 0. \qquad (11.22)$$

Из (11.22) видно, что

$$\omega = \sqrt{\frac{120}{83}\frac{g}{R}}.$$

■

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

11.6. Выразите через углы Эйлера кинетическую энергию вращательного движения шарового волчка – твердого тела, у которого все главные моменты инерции равны.

11.7. Тонкий стержень массы μ скользит по вертикальной неподвижной нити, проходящей через отверстие, проделанное в его середине. Найдите лагранжиан.

11.8. Тонкий стержень массы m и длины l вращается вокруг своего конца с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Угол между стержнем и вектором $\boldsymbol{\Omega}$ равен α. Найдите его кинетическую энергию.

11.9. Физический маятник в виде тонкого длинного стержня длиной l и массой m шарнирно закреплен в своей верхней точке и может совершать колебания в плоскости. Действует сила тяжести. Найдите частоту малых колебаний такого маятника.

11.10. Найдите закон движения свободного симметрического волчка массы μ.

11.11. Симметричный волчок массой m с моментами инерции I_1 и I_3 шарнирно закреплен в точке на расстоянии a от центра масс и вращается в поле силы тяжести. Проекции момента импульса на вертикальную ось и на ось волчка равны M_z и $M_{z'}$, соответственно. Найдите энергию волчка.

11.12. Одна из половинок однородного сплошного полуцилиндра массы μ и радиуса R находится на горизонтальной плоскости. Найдите частоту малых колебаний в двух случаях: а) шероховатой плоскости; б) гладкой плоскости.

11.13. Твердое тело подвешено на нити, которая представляет собой упругий круглый цилиндр, подчиняющийся закону Гука (коэффициент пропорциональности k). Длина цилиндра — l, радиус — R и плотность — σ. Момент инерции твердого тела относительно нити равен I. Найдите частоту крутильных колебаний системы.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

11.6. $T = \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\theta\right).$

11.7. $L = \frac{\mu \dot{Z}^2}{2} + \frac{I}{2}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) - \mu g Z,$ $\quad Z -$ координата центра масс,

$\varphi, \theta\ -$ эйлеровы углы.

11.8. $\mathrm{T} = \frac{ml^2}{6}\Omega^2 \sin^2\alpha\,.$ **11.9.** $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}}.$

11.10. $\boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{P}/\mu\right)t + \boldsymbol{R_0},\qquad \varphi = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0, \theta = \theta_0, \qquad \psi = \dot{\psi}_0 t + \psi_0;$

$\boldsymbol{P}, \boldsymbol{R}_0, \varphi_0, \theta_0, \psi_0, \dot{\varphi}_0, \dot{\psi}_0 = \mathrm{const};$

ось z направлена вдоль вектора момента импульса $\boldsymbol{M}$.

11.11. $E = \frac{I_1 + ma^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{M_{z'}^2}{2I_3} + \frac{(M_z - M_{z'}\cos\theta)^2}{2(I_1 + ma^2)} + mga\cos\theta.$

11.12. а) $\omega = \sqrt{\frac{8}{R}\frac{g}{9\pi - 16}}$, б) $\omega = \sqrt{\frac{24\pi}{R}\frac{g}{9\pi^2 - 32}}$.

11.13. $\omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{I}{k} + \frac{\pi R^4 \sigma l}{6k}}}$; при $R \to 0$, $\omega \approx \sqrt{\frac{k}{I}}$.

§ 12. Уравнения Гамильтона

Рассмотрим систему с s степенями свободы. Функция

$$H(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) = H(q, p, t) = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L, \qquad (12.1)$$

в которой все обобщенные скорости выражены через обобщенные импульсы и обобщенные координаты с помощью уравнений $p_\alpha = \partial L / \partial \dot{q}_\alpha$, называется *функцией Гамильтона, или гамильтонианом.* Сравнивая выражение (12.1) с (4.3) (и учитывая определение обобщенного импульса (4.2)), видим, что гамильтониан представляет собой обобщенную энергию системы, которая выражена через обобщенные координаты q_α и обобщенные импульсы p_α.

Уравнениями Гамильтона или *каноническими уравнениями* называется система $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2s$ неизвестных функций $q_\alpha(t)$, $p_\alpha(t)$:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2, \dots, s). \qquad (12.2)$$

В уравнениях Гамильтона (12.2) независимыми переменными являются обобщенные координаты q_α и обобщенные импульсы p_α. Уравнения Гамильтона, как и уравнения Лагранжа, позволяют найти закон движения механической системы. Только в отличие от уравнений Лагранжа, где для нахождения закона движения механической системы имеется s дифференциальных уравнений второго порядка, с помощью уравнений Гамильтона получается система $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка. Переменные q_α и p_α $(\alpha = 1,2, \dots, s)$, для которых справедливые уравнения Гамильтона в виде (12.2), называются *каноническими переменными*.

Задача 12.1. Напишите гамильтониан частицы массы m, находящейся в потенциальном поле $U(\boldsymbol{r}, t)$, в а) декартовых, б) цилиндрических и в) сферических координатах.

□ а) Лагранжиан в декартовых координатах имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z, t).$$

Обобщенные импульсы:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

откуда $\dot{x} = p_x/m$, $\dot{y} = p_y/m$, $\dot{z} = p_z/m$.

Теперь можно записать гамильтониан:

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x, y, z, t).$$

б) В цилиндрических координатах лагранжиан

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z, t).$$

Для обобщенных импульсов получаем следующие выражения:

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi}, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Отсюда

$$\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}, \qquad \dot{z} = \frac{p_z}{m}.$$

С помощью лагранжиана и выражений для обобщенных импульсов находим гамильтониан:

$$H = p_\rho\dot{\rho} + p_\varphi\dot{\varphi} + p_z\dot{z} - L = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} + p_z^2\right) + U(\rho, \varphi, z, t).$$

в) В сферических координатах

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) - U(r,\theta,\varphi,t).$$

Обобщенные импульсы есть

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi},$$

откуда следует, что

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \qquad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}.$$

Гамильтониан

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + U(r,\theta,\varphi,t).$$

■

Задача 12.2. Найдите гамильтониан, канонические уравнения и закон движения частицы массы m в однородном поле тяжести.

□ Решим задачу в декартовых координатах. Ось z декартовой системы координат направим вертикально вверх. Потенциальную энергию примем равной нулю в точке $z = 0$. Тогда потенциальная энергия частицы $U = mgz$.

Согласно задаче 12.1 а) гамильтониан

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz.$$

Уравнения Гамильтона (канонические уравнения) есть

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m}, \\ \dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} = \dfrac{p_y}{m}, \\ \dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} = \dfrac{p_z}{m}, \\ \dot{p}_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 0, \\ \dot{p}_y = -\dfrac{\partial H}{\partial y} = 0, \\ \dot{p}_z = -\dfrac{\partial H}{\partial z} = -mg. \end{cases}$$

Их трех последних уравнений системы следует, что $p_x = p_x^0 = \mathrm{const}$, $p_y = p_y^0 = \mathrm{const}$, $p_z = -mgt + p_z^0$ ($p_z^0 = \mathrm{const}$). С учетом этого, можно проинтегрировать первые три уравнения системы, что и определит закон движения частицы:

$$\begin{cases} x = \dfrac{p_x^0}{m} t + x_0, \\ y = \dfrac{p_y^0}{m} t + y_0, \\ z = -\dfrac{gt^2}{2} + \dfrac{p_z^0}{m} t + z_0, \end{cases}$$

где x_0, y_0, z_0 – константы. ■

Задача 12.3. Найдите гамильтониан для частицы массы m и заряда q в электромагнитном поле.

□ Лагранжиан для частицы в электромагнитном поле записывается в виде (см. § 3):

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) - q\phi(\boldsymbol{r}, t).$$

Отсюда находим обобщенный импульс:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t).$$

Из этого выражения получаем:

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\right).$$

Гамильтониан системы:

$$H = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{r}} - L = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\right)^2 + q\phi(\boldsymbol{r},t). \qquad (12.3)$$

■

Задача 12.4. Найдите закон движения заряженной частицы в однородном и постоянном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ с помощью уравнений Гамильтона.

□ Выберем прямоугольную декартовую систему координат с осью z, направленной вдоль $\boldsymbol{\mathcal{H}}$. В задаче 3.4 было показано, что в однородном магнитном поле с компонентами

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = (0,0,\mathcal{H})$$

векторный потенциал может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{A} = (0, x\mathcal{H}, 0). \qquad (12.4)$$

При этом в силу отсутствия электрического поля можно положить скалярный потенциал $\phi = 0$.

Учитывая, что $\phi = 0$, представим формулу (12.3) в виде

$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{q}{mc}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{q^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2. \qquad (12.5)$$

Для выбранного векторного потенциала (12.4) скалярное произведение $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} = p_y A_y = p_y\mathcal{H}x$. Тогда (12.5) можно записать как

$$H = \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} - \frac{q}{mc}p_y\mathcal{H}x + \frac{q^2}{2mc^2}\mathcal{H}^2x^2,$$

или, выделяя полный квадрат,

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2m}(p_y - \frac{q}{c}\mathcal{H}x)^2.$$

Из уравнений Гамильтона

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \qquad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

следует, что $p_y = p_y^0 = \text{const}$ и $p_z = p_z^0 = \text{const}$.

Теперь запишем уравнения Гамильтона для x и p_x:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \tag{12.6}$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = \omega\left(p_y^0 - \frac{q}{c}\mathcal{H}x\right), \tag{12.7}$$

где введено обозначение $\omega = q\mathcal{H}/mc$ (эту величину называют циклотронной частотой).

Продифференцировав по времени уравнение (12.6), находим:

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m}.$$

Подставляя сюда вместо $\dot{p}_x$ выражение (12.7), имеем:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{\omega}{m} p_y^0.$$

Решение этого уравнения можно представить в виде

$$x = C\cos(\omega t + \alpha) + \frac{p_y^0}{\omega m}, \tag{12.8}$$

где C, α – константы (амплитуда и фаза соответственно).

Для определения зависимости $y(t)$ используем уравнения Гамильтона

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m}\left(p_y - \frac{q}{c}\mathcal{H}x\right) = \frac{p_y}{m} - \omega x. \tag{12.9}$$

Учитывая, что $p_y = p_y^0 = \text{const}$, и подставляя в (12.9) выражение (12.8), получим

$$\dot{y} = \frac{p_y^0}{m} - \omega C\cos(\omega t + \alpha) - \frac{p_y^0}{m} = -\omega C\cos(\omega t + \alpha).$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$y = -C\sin(\omega t + \alpha) + y_0, \qquad y_0 = \text{const}. \tag{12.10}$$

Наконец, уравнение Гамильтона для $\dot{z}$:

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}.$$

Откуда (с учетом того, что $p_z = p_z^0 = \text{const}$)

$$z = \frac{p_z^0}{m}t + z_0, \quad z_0 = \text{const}. \tag{12.11}$$

Формулы (12.8), (12.10) и (12.11) определяют закон движения частицы. ■

Задача 12.5. Найдите гамильтониан, канонические уравнения и закон движения частицы массы m и заряда q, движущейся по абсолютно гладкой поверхности цилиндра радиуса R в однородном и постоянном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленной вдоль оси цилиндра.

□ Выберем цилиндрическую систему координат, ось z которой направим вдоль оси цилиндра. Лагранжиан в цилиндрических координатах для частицы в магнитном поле, направленном вдоль оси z, получен в задаче 3.4 и дается выражением

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\dot{\varphi}.$$

С учетом уравнения связи (частица движется по поверхности цилиндра) $\rho = R$, лагранжиан примет вид

$$L = \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}R^2\dot{\varphi}. \tag{12.12}$$

Обобщенные импульсы будут

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} + \frac{q\mathcal{H}}{2c}R^2, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z},$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi - \frac{q\mathcal{H}}{2c}R^2}{mR^2}, \tag{12.13}$$

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m}. \tag{12.14}$$

Используя лагранжиан (12.12) и выражения для обобщенных скоростей через обобщенные импульсы (12.13)-(12.14), находим гамильтониан:

$$H = p_\varphi \dot{\varphi} + p_z \dot{z} - L = \frac{1}{2m}\left(\frac{\left(p_\varphi - \frac{q\mathcal{H}}{2c}R^2\right)^2}{R^2} + p_z^2\right).$$

Уравнения Гамильтона для $\dot{\varphi}$ и $\dot{z}$ совпадают с (12.13) и (12.14), соответственно. Для $\dot{p}_\varphi$ и $\dot{p}_z$ уравнения Гамильтона имеют вид:

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \tag{12.15}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0. \tag{12.16}$$

Из уравнений (12.15) и (12.16) следует, что

$$p_\varphi = p_\varphi^0 = \mathrm{const}, p_z = p_z^0 = \mathrm{const}.$$

Это позволяет проинтегрировать уравнения (12.13) и (12.14). Имеем:

$$z = \frac{p_z^0}{m}(t - t_0) + z_0, \qquad z_0 = z(t_0); \tag{12.17}$$

$$\varphi = \frac{p_\varphi^0 - \frac{q\mathcal{H}}{2c}R^2}{mR^2}(t - t_0) + \varphi_0, \qquad \varphi_0 = \varphi(t_0). \tag{12.18}$$

Формулы (12.17) и (12.18) определяют закон движения частицы. ■

Задача 12.6. Частица массы m брошена с поверхности земли со скоростью $\boldsymbol{v}_0$ под углом α к горизонту. На точку действует сила сопротивления воздуха, направленная против скорости и пропорциональная скорости точки, т.е. $\boldsymbol{F}_d = -k\boldsymbol{v}$. Найдите закон движения точки с помощью уравнений Гамильтона.

□ Выберем декартову систему координат таким образом, чтобы ее начало находилось в точке бросания, а скорость $\boldsymbol{v}_0$ лежала в плоскости yz. Ось z направим по вертикали вверх.

При сделанном выборе осей координат начальные условия (при $t = 0$) будут иметь следующий вид:

$$x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0;\; \dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = v_0 \cos\alpha, \dot{z}_0 = v_0 \sin\alpha. \quad (12.19)$$

Лагранжиан при наличии диссипативных сил, пропорциональных скорости (см. § 3),

$$L = e^{\frac{k}{m}t}\left(\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(\boldsymbol{r}, t)\right),$$

в прямоугольных декартовых координатах запишется в виде

$$L = e^{\frac{k}{m}t}\left(\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} - mgz\right). \quad (12.20)$$

Здесь учтено, что на частицу по оси z действует сила тяжести, поэтому потенциальная энергия $U = mgz$.

С помощью (12.20) найдем обобщенные импульсы:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{\frac{k}{m}t} m\dot{x}, \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = e^{\frac{k}{m}t} m\dot{y}, \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = e^{\frac{k}{m}t} m\dot{z}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-\frac{k}{m}t}\dfrac{p_x}{m}, \\ \dot{y} = e^{-\frac{k}{m}t}\dfrac{p_y}{m}, \\ \dot{z} = e^{-\frac{k}{m}t}\dfrac{p_z}{m}. \end{cases} \quad (12.21)$$

Используя (12.20) и (12.21) составим гамильтониан

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L = e^{-\frac{k}{m}t}\left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}\right) + e^{\frac{k}{m}t} mgz.$$

В рассматриваемом случае уравнения Гамильтона для $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ совпадут с уравнениями (12.21). Для обобщенных импульсов имеем:

$$\dot{p}_x = 0,\ \ \dot{p}_y = 0,\ \ \dot{p}_z = -mge^{\frac{k}{m}t},$$

откуда следует, что

$$p_x = p_x^0, \qquad p_y = p_y^0, \qquad p_z = \frac{m^2 g}{k}\left(1 - e^{\frac{k}{m}t}\right) + p_z^0,$$

где $p_x^0, p_y^0,\ p_z^0 = \text{const}$.

С учетом этого, система (12.21) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-\frac{k}{m}t}\dfrac{p_x^0}{m}, \\ \dot{y} = e^{-\frac{k}{m}t}\dfrac{p_y^0}{m}, \\ \dot{z} = e^{-\frac{k}{m}t}\left(\dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{\frac{k}{m}t}\right) + \dfrac{p_z^0}{m}\right). \end{cases} \tag{12.22}$$

Подставляя сюда $t = 0$ и используя начальные условия (12.19), выразим p_x^0, p_y^0, p_z^0 через проекции заданной в условии задачи скорости $\boldsymbol{v}_0$:

$$\begin{cases} p_x^0 = 0, \\ p_y^0 = mv_0 \cos\alpha\,, \\ p_z^0 = mv_0 \sin\alpha\,. \end{cases}$$

При этом система (12.22) запишется как

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = e^{-\frac{k}{m}t} v_0 \cos\alpha\,, \\ \dot{z} = \left(v_0 \sin\alpha + \dfrac{mg}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t} - \dfrac{mg}{k}. \end{cases} \tag{12.23}$$

Интегрируя уравнения (12.23), имеем:

$$\begin{cases} x = C_1, \\ y = -\dfrac{v_0 m}{k}\cos\alpha\, e^{-\frac{k}{m}t} + C_2, \\ z = -\dfrac{m}{k}\Big(v_0\sin\alpha + \dfrac{mg}{k}\Big)e^{-\frac{k}{m}t} - \dfrac{mg}{k}t + C_3, \end{cases} \tag{12.24}$$

где C_1, C_2, C_3 – константы.

С помощью начальных условий ($x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$) определяем, что

$$C_1 = 0, \qquad C_2 = \frac{v_0 m}{k}\cos\alpha\,, \qquad C_3 = \frac{m}{k}(v_0\sin\alpha + \frac{mg}{k}).$$

Подставляя найденные константы в (12.24), получим закон движения частицы:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \dfrac{v_0 m}{k}\cos\alpha(1 - e^{-\frac{k}{m}t}), \\ z = \dfrac{m}{k}\Big(v_0\sin\alpha + \dfrac{mg}{k}\Big)(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \dfrac{mg}{k}t. \end{cases}$$

■

Как было показано выше, гамильтониан получается из лагранжиана. Можно сделать и обратное преобразование: зная гамильтониан, построить лагранжиан.

Задача 12.7. Гамильтониан механической системы

$$H = \frac{p_x^2 t}{2} + p_x p_y + \frac{p_z^2}{2}.$$

Найдите лагранжиан.

□ По определению гамильтониан

$$H = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L.$$

Отсюда следует, что

$$L = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - H.$$

В рассматриваемом случае это выражение примет вид

$$L = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - \frac{p_x^2 t}{2} - p_x p_y - \frac{p_z^2}{2}. \qquad (12.25)$$

Однако функция (12.25) не является лагранжианом, поскольку зависит от обобщенных импульсов. Для того, чтобы исключить обобщенные импульсы из (12.25), запишем уравнения Гамильтона для $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Имеем:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x t + p_y;\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_x;\ \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = p_z.$$

Отсюда следует, что

$$p_x = \dot{y};\ p_y = \dot{x} - \dot{y}t;\ p_z = \dot{z}.$$

Подставляя найденные выражения для p_x, p_y, p_z в (12.25), получаем лагранжиан

$$L = \dot{x}\dot{y} - \frac{\dot{y}^2 t}{2} + \frac{\dot{z}^2}{2}.$$

■

Задачи для самостоятельного решения

12.8. Напишите гамильтониан частицы массы m, которая движется в поле тяжести по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом.

12.9. Напишите гамильтониан для одномерного гармонического осциллятора с массой m и частотой ω.

12.10. Напишите гамильтониан для математического маятника с массой m и длиной l (рис. 2.5).

12.11. Напишите гамильтониан для заряженного гармонического осциллятора (заряд q, масса m, частота ω), находящегося в постоянном и однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

12.12. Напишите гамильтониан для симметрического волчка в поле тяжести, точка опоры которого движется без трения в плоскости x, y.

12.13. Напишите гамильтониан для системы N взаимодействующих по закону Кулона заряженных частиц (массы m_i и заряды q_i), находящихся во внешнем электромагнитном поле с потенциалами $\boldsymbol{A}$ и ϕ.

12.14. Лагранжиан механической системы имеет вид:

$$L = a\dot{z}^2/2 - bz.$$

Найдите гамильтониан.

12.15. Лагранжиан механической системы имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{s}^2}{2} + mgs - \frac{k}{2}\left(2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + s^2} - a\right)^2; \; m, a, k, g = \text{ const.}$$

Найдите гамильтониан.

12.16. Лагранжиан механической системы имеет вид:

$$L = \frac{a^2\dot{\varphi}^2}{2}(m_1\cos^2\theta + m_2\sin^2\theta) - \frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1\sin\theta + m_2\cos\theta);$$

$$m_1, m_2, g, a = \text{ const.}$$

Найдите гамильтониан.

12.17. Лагранжиан механической системы имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{e^2R}{2(r^2 - R^2)}; \quad m, e, R = \text{const.}$$

Найдите гамильтониан.

12.18. Лагранжиан системы имеет вид

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{c^2}}; \quad m_0, c = \text{const}.$$

Найдите гамильтониан такой системы.

12.19. Составьте гамильтониан и уравнения Гамильтона для случая движения частицы массы m в центральном поле $U(r)$.

12.20. Найдите канонические уравнения для частицы массы m, движущейся в поле тяжести по гладкой сферической поверхности радиуса R (сферический маятник).

12.21. Запишите уравнения Гамильтона для частицы массы m, движущейся по поверхности цилиндра радиуса R в поле тяжести, в цилиндрических координатах.

12.22. Гамильтониан частицы заряда q и массы m, движущейся в однородном и постоянном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, имеет вид:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{q}{c}Hx\right)^2; \; c = \text{const}.$$

Найдите закон движения частицы.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

12.8. $H = \dfrac{p_x^2}{2m} - mgx\sin\alpha$. **12.9.** $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2 x^2}{2}$.

12.10. $H = \dfrac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi$.

12.11. $H = \dfrac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \dfrac{q}{2c}(\boldsymbol{\mathcal{H}} \times \boldsymbol{r})\right)^2 + \dfrac{m\omega^2 \boldsymbol{r}^2}{2}$.

12.12. $$H = \frac{1}{2m}(p_X^2 + p_Y^2) + \frac{ml^2\sin^2\theta p_\theta^2 + Ip_\theta^2}{2(ml^2\sin^2\theta + I)^2} + \frac{\left(p_\varphi - I_3 p_\psi \cos\theta\right)^2}{2I\sin^2\theta} +$$

$$+mgl\cos\theta;$$

где $I_1 = I_2 \neq I_3$ – главные моменты инерции, m – масса твердого тела, l – расстояние от центра инерции волчка до точки опоры, X, Y, Z – декартовы координаты центра масс, φ, θ, ψ – углы Эйлера.

12.13. $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q_i}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i, t)\right)^2 + \sum_{i\neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} + \sum_{i=1}^{N} q_i \phi(\boldsymbol{r_i}, t).$

12.14. $H = \frac{p^2}{2a} + bz.$

12.15. $H = \frac{p_s^2}{2m} - mgs + \frac{k}{2}\left(2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + s^2} - a\right)^2.$

12.16. $H = \frac{p_\varphi^2}{2a^2(m_1\cos^2\theta + m_2\sin^2\theta)} + \frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1\sin\theta + m_2\cos\theta);$

12.17. $H = \frac{p_r^2}{2m} - \frac{e^2R}{2(r^2 - R^2)}.$ **12.18.** $H = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 c^2 + A^2}.$

12.19. $H = \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + U(r);\quad \dot{r} = \frac{p_r}{m},\qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2},$

$$\dot{p}_\varphi = 0,\quad \dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{2mr^3} - \frac{dU}{dr}.$$

12.20. $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2},\quad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta},\quad \dot{p}_\varphi = 0,\ \dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2\cos\theta}{mR^2\sin^3\theta} - mgR\sin\theta.$

12.21. $H = \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz.$

12.22. $x = A\cos(\omega t + \alpha) + x_0,\ y = -A\sin(\omega t + \alpha) + y_0,\ z = \frac{p_z}{m}t + z_0.$

§ 13. Скобки Пуассона. Интегралы движения в формализме Гамильтона

Пусть даны две функции обобщенных координат, обобщенных импульсов и времени $f(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t)$ и

$g(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t)$*. *Скобка Пуассона* функций f и g определяется равенством

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} \right). \tag{13.1}$$

Задача 13.1. Найдите скобку Пуассона $\{f, g\}$ для функций $f = pq$, $g = \sqrt{p^2 + q^2}$.

□ По определению (13.1)

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} = \frac{q^2}{\sqrt{p^2 + q^2}} - \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{q^2 - p^2}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

■

Приведем основные свойства скобок Пуассона. Для любых функций f, g и h, зависящих от обобщенных координат, обобщенных импульсов и времени справедливы следующие равенства:

1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$;

2) $\{f, C\}$=0, если $C = \text{const}$;

3) $\{f, f\} = 0$;

4) $\{f + h, g\} = \{f, g\} + \{h, g\}$;

5) $\{fh, g\} = f\{h, g\} + h\{f, g\}$;

6) $\dfrac{\partial}{\partial t}\{f, g\} = \left\{\dfrac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \dfrac{\partial g}{\partial t}\right\}$;

7) $\{f, q_\alpha\} = \dfrac{\partial f}{\partial p_\alpha}$; $\{f, p_\alpha\} = -\dfrac{\partial f}{\partial q_\alpha}$;

8) $\{q_\alpha, q_\beta\} = 0$; $\{p_\alpha, p_\beta\} = 0$; $\{p_\alpha, q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$;

9) $\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0$ (*тождество Якоби*).

---

* Эти функции также могут зависеть и от каких-либо других параметров.

Вычисление скобок Пуассона и операции с ними удобно производить, используя свойства 1)-9).

Задача 13.2. Найдите скобку Пуассона $\{p_x + p_y, yp_z - zp_y\}$.

□ Воспользовавшись свойством 4) скобок Пуассона, получим:

$$\{p_x + p_y, yp_z - zp_y\} = \{p_x, yp_z - zp_y\} + \{p_y, yp_z - zp_y\}.$$

Используя свойство 1), поменяем порядок членов в скобках Пуассона в правой части данного равенства. Тогда

$$\{p_x + p_y, yp_z - zp_y\} = -\{yp_z - zp_y, p_x\} - \{yp_z - zp_y, p_y\}. \qquad (13.2)$$

Далее воспользуемся свойством 7), согласно которому

$$\{yp_z - zp_y, p_x\} = -\frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial x} = 0,$$

$$\{yp_z - zp_y, p_y\} = -\frac{\partial(yp_z - zp_y)}{\partial y} = -p_z.$$

Подставляя полученные значения в (13.2), окончательно находим, что

$$\{p_x + p_y, yp_z - zp_y\} = p_z. \blacksquare$$

Задача 13.3. Покажите, что уравнения Гамильтона можно записать в виде:

$$\dot{q}_\alpha = \{H, q_\alpha\}, \qquad \dot{p}_\alpha = \{H, p_\alpha\} \qquad (\alpha = 1,2, \dots, s).$$

□ Уравнения Гамильтона есть

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2, \dots, s).$$

С помощью свойства 7) скобок Пуассона преобразуем правые части уравнений Гамильтона к виду

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \{H, q_\alpha\}, \qquad -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} = \{H, p_\alpha\} \quad (\alpha = 1,2, \dots, s).$$

Подставляя вместо $\partial H/\partial p_\alpha$ и $-\partial H/\partial q_\alpha$ их выражения через скобки Пуассона, придем к искомым равенствам:

$$\dot{q}_\alpha = \{H, q_\alpha\}, \qquad \dot{p}_\alpha = \{H, p_\alpha\} \qquad (\alpha = 1,2, \dots, s).$$

■

Как и в формализме Лагранжа, в формализме Гамильтона большое значение для нахождения закона движения механической системы играют интегралы движения. В формализме Гамильтона интегралом движения называется функция обобщенных координат $\{q\}$, обобщенных импульсов $\{p\}$ и времени t, сохраняющая при движении механической системы постоянное значение. Таким образом, интеграл движения определяется соотношением вида

$$f(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) = C,$$

где s – число степеней свободы системы, а C является постоянной величиной, определяемой начальными условиями. Отличием здесь от интеграла движения в формализме Лагранжа является только то, что в формализме Гамильтона интеграл движения вместо обобщенных скоростей содержит обобщенные импульсы.

Пусть $f(q, p, t)$ – некоторая функция обобщенных координат $\{q\}$ и обобщенных импульсов $\{p\}$ механической системы, описываемой гамильтонианом H. Полную производную функции f по времени можно представить в виде

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}.$$

Тогда условие того, что функция $f(q, p, t)$ – интеграл движения, запишется как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0.$$

В частности, если f есть интеграл движения, который не зависит явно от времени, т.е. $f(q, p, t) = f(q, p)$, то его скобка Пуассона с функцией Гамильтона должна обращаться в нуль:

$$\{H, f\} = 0.$$

Задача 13.4. Пусть $f(q, p, t)$ — интеграл движения механической системы. Координата q_α не входит явным образом в гамильтониан системы, т.е. q_α — циклическая координата. Докажите, что интегралом движения системы является также $\partial^n f/\partial q_\alpha^n$ $(n = 1,2,3,\dots)$.

□ Поскольку $f(q,p,t)$ — интеграл движения, должно выполняться равенство

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0.$$

Дифференцирование обеих частей этого равенства по q_α, с учетом того, что $\partial^n H/\partial q_\alpha^n = 0$ (координата q_α — циклическая), дает:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^n f}{\partial q_\alpha^n} + \left\{H, \frac{\partial^n f}{\partial q_\alpha^n}\right\} = 0.$$

Отсюда следует, что $\partial^n f/\partial q_\alpha^n$ — интеграл движения. ■

Интегралы движения можно найти по гамильтониану системы, пользуясь следующими правилами:

1) если гамильтониан не зависит явно от времени, т.е. $\partial H/\partial t = 0$, то сохраняется обобщенная энергия $H(q,p) = \text{const}$;

2) если гамильтониан не зависит явно от координаты q_α (q_α — циклическая координата), т.е. $\partial H/\partial q_\alpha = 0$, то интегралом движения является обобщенный импульс p_α, соответствующий обобщенной координате q_α;

3) если гамильтониан зависит от обобщенной координаты q_k и соответствующего ей обобщенного импульса p_k (например, q_1 и p_1) лишь через функцию $f(q_k, p_k)$, т.е.,

$$H = H(f(q_k, p_k), q_1, q_2, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_s, t),$$

то функция $f(q_k, p_k)$ — интеграл движения.

В случае, если в гамильтониане выделяются в виде функции f несколько обобщенных координат и соответствующих им обобщенных импульсов, например, $q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_k, p_k$, т.е.

$$H = H(f(q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_k, p_k), q_{k+1}, \dots, q_s, p_{k+1}, \dots, p_s, t),$$

то интегралом движения будет функция $f(q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_k, p_k)$.

Для нахождения закона движения механической системы в формализме Гамильтона, как и в случае формализма Лагранжа, часто бывает удобным вначале найти интегралы движения. Найденные независимые интегралы движения необходимо дополнить уравнениями Гамильтона так, чтобы получить систему $2s$ независимых уравнений для нахождения $2s$ функций $q_\alpha(t), p_\alpha(t)$ $(\alpha = 1,2, \dots, s)$ и проинтегрировать полученную систему.

Задача 13.5. Гамильтониан одномерной механической системы имеет вид

$$H(q,p,t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} + \lambda(t)\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}\right)^4,$$

где $m > 0, \omega$,– константы, $\lambda(t)$ – функция, зависящая только от времени. Найдите закон движения системы.

□ Переменные q и p входят в гамильтониан только в виде функции

$$f(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

следовательно, $f(q,p)$ является интегралом движения, т.е.

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = C, \tag{13.3}$$

где $C = \mathrm{const}$.

Дополним уравнение (13.3) уравнением Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}\left(1 + 4\lambda(t)\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}\right)^3\right),$$

которое с учетом (13.3) можно записать в виде

$$\dot{q} = \frac{p}{m}(1 + 4\lambda(t)\mathrm{C}^3). \tag{13.4}$$

Уравнения (13.3) и (13.4) образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными q и p.

Из (13.4) выразим обобщенный импульс p, имеем:

$$p = \frac{m\dot{q}}{1 + 4\lambda(t)C^3}.$$

Подставляя найденное выражение для обобщенного импульса в (13.3), получаем

$$\frac{m\dot{q}^2}{2(1 + 4\lambda(t)C^3)^2} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} = C,$$

откуда

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \pm(1 + 4\lambda(t)C^3)\sqrt{\frac{2C}{m} - \omega^2 q^2}.$$

Знак “+” (“−”) берется на участках траектории, где $\dot{q} > 0$ ($\dot{q} < 0$). Разделяя переменные и интегрируя, найдем закон движения механической системы в квадратурах:

$$\int_{t_0}^{t} (1 + 4\lambda(t)C^3)\, dt = \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{\pm\sqrt{\frac{2C}{m} - \omega^2 q^2}}, \quad q_0 = q(t_0).$$

В частности, если параметр λ не зависит от времени, т.е. $\lambda(t) = \lambda$, то интегрируя, получим:

$$(1 + 4\lambda C^3)(t - t_0) = \pm\frac{1}{\omega}\left\{\arcsin\frac{\omega q}{\sqrt{\frac{2C}{m}}} - \arcsin\frac{\omega q_0}{\sqrt{\frac{2C}{m}}}\right\},$$

откуда

$$q = \pm\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2C}{m}}\sin[\omega(1 + 4\lambda \mathrm{C}^3)t + \alpha],$$

где

$$\alpha = \arcsin\frac{\omega q_0}{\sqrt{\frac{2C}{m}}} \mp \omega(1 + 4\lambda \mathrm{C}^3)t_0.$$

■

Задача 13.6. Частица массы m и заряда q движется в поле тяжести по абсолютно гладкой поверхности кругового конуса с углом раствора 2α; ось конуса направлена вертикально (рис. 1.5). На частицу также действует постоянное и однородное электрическое поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, направленной по вертикали (вдоль оси конуса). Постройте гамильтониан, найдите интегралы движения и закон движения частицы.

□ Для решения задачи удобно выбрать сферическую систему координат. Направим полярную ось сферической системы координат (ось z на рис. 1.5) по оси конуса вертикально вверх, а за начало отсчета примем вершину конуса. При этом условие связи запишется как

$$\theta = \alpha. \tag{13.5}$$

Лагранжиан частицы, находящейся в электромагнитном поле и поле потенциальных сил дается выражением (см. § 3)

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}) - q\phi - U(\boldsymbol{r}, t). \tag{13.6}$$

Кинетическая энергия в сферических координатах найдена в задаче 2.1 и равна

$$\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right).$$

С учетом уравнения связи (13.5), получаем

$$\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\dot{\varphi}^2). \tag{13.7}$$

Ноль потенциальной энергии силы тяжести выберем в вершине конуса (в начале сферической системы координат). Тогда потенциальная энергия силы тяжести

$$U(\boldsymbol{r}, t) = mgz = mgr\cos\alpha. \tag{13.8}$$

Поскольку магнитного поля нет, можно положить векторный потенциал

$$\boldsymbol{A} = 0. \tag{13.9}$$

Скалярный потенциал удобно выбрать в виде (см. задачу 3.7)

$$\phi = -\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{r}.$$

Поскольку по условию задачи напряженность $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ направлена вертикально, т.е. имеет только составляющую $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}$, (для определенности положим, что $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ сонаправлена с осью z), то

$$\phi = -\boldsymbol{\mathcal{E}} \cdot \boldsymbol{r} = -\mathcal{E} r \cos\alpha. \quad (13.10)$$

Подставляя (13.7)-(13.10) в функцию Лагранжа (13.6), получаем:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha\dot{\varphi}^2) - (mg - q\mathcal{E}) r \cos\alpha.$$

В качестве обобщенных координат в функции Лагранжа выступают r и φ. Найдем обобщенные импульсы:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad (13.11)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2\alpha\dot{\varphi}. \quad (13.12)$$

Учитывая (13.11) и (13.12), получим гамильтониан

$$H = p_r\dot{r} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\alpha}\right) + (mg - q\mathcal{E}) r\cos\alpha. \quad (13.13)$$

Гамильтониан (13.13) не зависит явно от времени и, кроме того, обобщенная координата φ является циклической (не входит в явном виде в гамильтониан). Поэтому интегралами движения будут обобщенная энергия

$$E = H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\alpha}\right) + (mg - q\mathcal{E}) r\cos\alpha, \quad (13.14)$$

и обобщенный импульс

$$p_\varphi = \text{const}. \quad (13.15)$$

В рассматриваемом случае (как легко проверить) (13.11) и (13.12) представляют собой уравнения Гамильтона для $\dot{r}$ и $\dot{\varphi}$ соответственно. Уравнения (13.11), (13.12), (13.14) и (13.15) образуют систему независимых уравнений для нахождения закона движения частицы. Выражая p_r из (13.14) и подставляя найденное значение в (13.11), получим:

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha} - (mg - q\mathcal{E})r\cos\alpha\right)}.$$

Знак “+” (“−”) берется на участках траектории, где $\dot{r} > 0$ ($\dot{r} < 0$). Отсюда

$$dt = \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha} - (mg - q\mathcal{E})r\cos\alpha\right)}}. \qquad (13.16)$$

Интегрируя (13.16) (с учетом того, что $E, p_\varphi = \mathrm{const}$), находим зависимость $r(t)$:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha} - (mg - q\mathcal{E})r\cos\alpha\right)}}, \quad r_0 = r(t_0). \qquad (13.17)$$

Для нахождения обобщенной координаты φ воспользуемся уравнением (13.12) и тем фактом, что $p_\varphi = \mathrm{const}$. Из (13.12) следует, что

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\alpha},$$

или

$$d\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\alpha}dt. \qquad (13.18)$$

Интегрируя (13.18), с помощью формулы для dt (13.16), получим

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\alpha}dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha} - (mg - q\mathcal{E})r\cos\alpha\right)}}, \qquad (13.19)$$

где $\varphi_0 = \varphi(t_0)$.

Формулы (13.17) и (13.19) определяют закон движения частицы в квадратурах. ■

Задача 13.7. Лагранжиан частицы массы m

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{f(\theta)}{r^2},$$

где $f(\theta)$ – произвольная функция, зависящая только от переменной θ. Постройте гамильтониан, найдите интегралы движения и закон движения частицы.

□ Для построения гамильтониана найдем обобщенные импульсы:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \tag{13.20}$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \tag{13.21}$$

Тогда гамильтониан

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + \frac{f(\theta)}{r^2}.$$

Перепишем эту функцию в виде:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{p_\theta^2}{2m} + f(\theta)\right). \tag{13.22}$$

Гамильтониан не зависит явно от времени, кроме того, переменные p_θ и θ входят в (13.22) только в виде функции

$$F(\theta, p_\theta) = \frac{p_\theta^2}{2m} + f(\theta).$$

В связи с этим, интегралами движения являются* обобщенная энергия

---

* Следует отметить, что анализ заданного в условии задачи лагранжиана непосредственно позволяет определить только один интеграл движения – обобщенную энергию, тогда как рассматриваемая частица характеризуется двумя обобщенными

$$E = H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{p_\theta^2}{2m} + f(\theta)\right)$$

и функция

$$\frac{p_\theta^2}{2m} + f(\theta) = C, \tag{13.23}$$

здесь C – константа.

С учетом (13.23), обобщенную энергию E можно записать в виде

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{C}{r^2}. \tag{13.24}$$

Для нахождения закона движения частицы уравнения (13.23) и (13.24) необходимо дополнить двумя уравнениями Гамильтона:

$$p_r = \frac{\partial H}{\partial \dot{r}}, \qquad p_\theta = \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}}.$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (13.20) и (13.21), которые мы уже записали при переходе от лагранжиана к гамильтониану. Таким образом, у нас имеются четыре уравнения (13.20), (13.21), (13.23) и (13.24) с четырьмя неизвестными r, θ, p_r, p_θ. Выражая p_r из (13.24) и подставляя его в (13.20), получим

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{C}{r^2}\right)}, \tag{13.25}$$

откуда

$$dt = \pm\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{C}{r^2}\right)}},$$

координатами. В то же время переход к гамильтониану дает возможность легко найти недостающий интеграл движения.

где знак "+" ("−") берется на участках траектории, на которых $\dot{r} > 0$ ($\dot{r} < 0$). Интегрируя это выражение, найдем в неявном виде зависимость $r(t)$:

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{C}{r^2}\right)}}, \quad r_0 = r(t_0). \tag{13.26}$$

Далее, выразим p_θ из (13.23) и подставим в (13.21), получим:

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} = \pm\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{2}{m}\big(C - f(\theta)\big)}. \tag{13.27}$$

Используя (13.25) и (13.27), найдем, что

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} = \frac{\pm\frac{1}{r^2}\sqrt{\frac{2}{m}\big(C - f(\theta)\big)}}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{C}{r^2}\right)}}.$$

Разделяя здесь переменные и интегрируя, имеем:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pm\sqrt{C - f(\theta)}} = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\pm\sqrt{Er^4 - Cr^2}}, \quad \theta_0 = \theta(t_0). \tag{13.28}$$

Здесь, как и обычно, знак "+" ("–") при интегрировании по θ берется на участках, где $\dot{\theta} > 0$ ($\dot{\theta} < 0$), а при интегрировании по r знак "+" ("–") выбирается при $\dot{r} > 0$ ($\dot{r} < 0$). Равенство (13.28) задает в неявном виде зависимость $r(\theta)$ и вместе с формулой (13.26) определяет закон движения частицы. ■

Важное свойство скобок Пуассона заключается в том, что если f и g – два интеграла движения, то величина $\{f, g\}$ также является интегралом движения. Однако следует заметить, что далеко не всегда таким способом удается получить новый интеграл движения. В некоторых случаях можно получить тривиальный результат – скобки Пуассона сведутся к постоянной. В других случаях полученный интеграл может оказаться просто функцией исходных интегралов f и g. Если же ни тот, ни другой случай не имеют места, то скобки Пуассона дают новый интеграл движения.

Задача 13.8. Частица массы m движется в поле тяжести. Известны два интеграла движения: проекция импульса $p_x = m\dot{x}$ и проекция момента импульса $M_z = xp_y - yp_x$ (ось z направлена вдоль силы тяжести). Найдите третий интеграл движения.

□ Для нахождения третьего интеграла движения вычислим скобку Пуассона

$$\{p_x, M_z\} = \left(\frac{\partial p_x}{\partial p_x}\frac{\partial M_z}{\partial x} - \frac{\partial p_x}{\partial x}\frac{\partial M_z}{\partial p_x}\right) + \left(\frac{\partial p_x}{\partial p_y}\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial p_x}{\partial y}\frac{\partial M_z}{\partial p_y}\right) = p_y.$$

В рассматриваемом случае скобка Пуассона дает новый интеграл движения $p_y = m\dot{y}$ – проекцию импульса на ось y. ■

<u>*Задачи для самостоятельного решения*</u>

13.9. Найдите скобки Пуассона ($\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \text{const}$):

а) $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\}$; б) $\{p_x, x\}$; в) $\{\boldsymbol{p}, r^2\}$; г) $\{\boldsymbol{r}, p^2\}$; д) $\{\boldsymbol{p}, (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\}$;

е) $\{\boldsymbol{r}, (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p})\}$; ж) $\{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}), (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r})\}$; з) $\{f, M_z\}$.

13.10. Докажите соотношения:

$$\text{а) } \{f, q_\alpha\} = \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}; \quad \text{б) } \{f, p_\alpha\} = -\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}.$$

13.11. Докажите тождество Якоби:

$$\big\{f, \{g, h\}\big\} + \big\{g, \{h, f\}\big\} + \big\{h, \{f, g\}\big\} = 0.$$

13.12. Система описывается гамильтонианом ($a, b = \text{const}$):

$$H = \frac{p_3^2}{2} + \frac{q_3^2}{2} + \frac{ap_1^2}{2}\left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{q_2^2}{2}\right) + b\left(\frac{p_2^2}{2} + \frac{q_2^2}{2}\right)\left(\frac{p_3^2}{2} + \frac{q_3^2}{2}\right).$$

Найдите закон движения системы.

13.13. Лагранжиан механической системы

$$L = \frac{\alpha}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \beta\frac{\cos\varphi}{\sin^2\theta},$$

$\alpha, \beta = \text{const}$. Найдите закон движения.

13.14. Покажите, что функция

$$f(x, p, t) = x - \frac{p}{m} t$$

является интегралом движения свободной частицы.

13.15. Частица массы m и заряда q движется в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленном вдоль оси z декартовой системы координат. Найдите скобку Пуассона $\{\dot{x}, \dot{y}\}$.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

13.9. а)0; б)1; в) $2\boldsymbol{r}$; г) $-2\boldsymbol{p}$; д)$\boldsymbol{a}$; е) $-\boldsymbol{a}$; ж) $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$; з)0.

13.12. $q_1 = p_1 a C_1 (t - t_0), \quad q_2 = \sqrt{2C_1} \sin\left(\frac{A_1}{\sqrt{2}}(t - t_1)\right),$

$q_3 = \sqrt{2C_2} \sin\big((bC_1 + 1)(t - t_2)\big),$

где $p_1, C_1, C_2, t_0, t_1, t_2 = \text{const}, \qquad A_1 = ap_1^2 + \sqrt{2} b C_2.$

13.13. $t - t_0 = \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pm\sqrt{\frac{2}{\alpha}\left(E - \frac{C}{\sin^2\theta}\right)}}, \quad \theta_0 = \theta(t_0);$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\pm\sqrt{C - \beta\cos\varphi}} = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\pm\sin^2\theta\sqrt{E - \frac{C}{\sin^2\theta}}}, \quad \varphi_0 = \varphi(t_0); \quad E, C = \text{const}.$$

13.15. $\{\dot{x}, \dot{y}\} = -\dfrac{q\mathcal{H}}{m^2 c}.$

§ 14. Канонические преобразования

Как уже упоминалось ранее, формальный вид уравнений Лагранжа не меняется при преобразовании обобщенных координат q_α ($\alpha = 1, 2, \dots, s$). При этом, разумеется, сохраняют свою форму и уравнения Гамильтона. Последние, однако, допускают гораздо более широкий класс преобразований. В связи с тем, что в формализме Гамильтона обобщенные импульсы p_α играют наравне с координатами q_α роль равноправных независимых переменных, уравнения Гамильтона допускают уже $2s$ преобразований от старых переменных (q_α, p_α) к новым (Q_α, P_α):

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t), \;\; P_\alpha = P_\alpha(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t). \qquad (14.1)$$

Новый гамильтониан (гамильтониан, полученный в результате преобразований от старых координат и импульсов к новым) обозначим посредством $H'(Q, P, t)$ (под Q и P будем понимать всю совокупность новых обобщенных координат и обобщенных импульсов соответственно).

Преобразования (14.1) называются *каноническими*, если они сохраняют формальный вид уравнений Гамильтона, т.е. если и в новых переменных (Q, P) выполняются соотношения

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial P_\alpha}, \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2, \dots, s).$$

Далеко не каждое преобразование вида (14.1) будет являться каноническим. Важный класс канонических преобразований составляют преобразования, которые могут быть реализованы с помощью так называемой *производящей функции* – функции, зависящей от старых и новых переменных и времени.

1) Если производящая функция F зависит от старых и новых координат и времени, т.е.

$$F = F(q, Q, t),$$

то каноническое преобразование, порождаемое этой функцией, имеет вид:

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, \qquad P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}, \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}. \qquad (14.2)$$

2) Если производящая функция Φ зависит от старых координат, новых импульсов и времени, т.е.

$$\Phi = \Phi(q, P, t),$$

то каноническое преобразование задается формулами:

$$p_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}, \qquad Q_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial P_\alpha}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \qquad (14.3)$$

Задача 14.1. Найдите каноническое преобразование, соответствующее производящей функции

$$F(q, Q, t) = \sum_{\alpha} q_\alpha Q_\alpha.$$

□ Используя формулы (14.2), получаем:

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \qquad P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha} = -q_\alpha, \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H.$$

Отсюда видно, что данная производящая функция переводит старые импульсы в новые координаты и, наоборот, старые координаты в новые импульсы. Такая возможность является следствием равноправия обобщенных координат и обобщенных импульсов в гамильтоновом формализме. ■

Задача 14.2. Найдите каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2} m\omega(t) q^2 \mathrm{ctg} Q.$$

Запишите в новых переменных Q, P уравнения движения гармонического осциллятора с частотой $\omega(t)$.

□ Поскольку производящая функция зависит от старых и новых обобщенных координат, с помощью уравнений (14.2) получаем:

$$p = \frac{\partial F}{\partial q} = m\omega(t) q \ \mathrm{ctg} Q, \tag{14.4}$$

$$P = -\frac{\partial F}{\partial Q} = \frac{1}{2} m\omega(t) q^2 \frac{1}{\sin^2 Q}, \tag{14.5}$$

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} = H + \frac{1}{2} m\dot{\omega}(t) q^2 \mathrm{ctg} Q. \tag{14.6}$$

Из соотношений (14.4) и (14.5) находим, что

$$p = \sqrt{2Pm\omega(t)} \cos Q, \tag{14.7}$$

$$q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega(t)}}\sin Q. \tag{14.8}$$

Гамильтониан гармонического осциллятора в старых координатах имеет вид:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(t)q^2}{2}.$$

Подставляя выражения (14.7) и (14.8), получаем гамильтониан в новых координатах:

$$H = P\omega(t).$$

Заменяя в (14.6) H и q их выражениями через новые координаты, найдем новый гамильтониан:

$$H' = P\omega(t) + \frac{1}{2}\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}P\sin(2Q).$$

Уравнения Гамильтона в новых переменных:

$$\dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P} = \omega(t) + \frac{1}{2}\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}\sin(2Q),$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} = -\frac{\dot{\omega}(t)}{\omega(t)}P\cos(2Q).$$

Рассмотрим частный случай: $\omega(t) = \mathrm{const}$. Канонические уравнения при этом будут иметь вид:

$$\dot{Q} = \omega\,, \dot{P} = 0\,,$$

откуда следует, что

$$Q = \omega t + Q_0, \qquad P = P_0,$$

где $Q_0, P_0 = \mathrm{const}$. Подставляя Q и P в выражение (14.8), получим:

$$q = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}}\sin(\omega t + Q_0).$$

■

Проверить, является ли преобразование каноническим, можно с помощью скобок Пуассона. Для того, чтобы преобразование было каноническим, новые переменные должны удовлетворять соотношениям:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \qquad \{P_\alpha, P_\beta\} = 0, \qquad \{P_\alpha, Q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}, \tag{14.9}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера.

Задача 14.3. Проверьте справедливость соотношений (14.9) для канонических преобразований из задачи 14.1.

□ В задаче 14.1 найдено, что $Q_\alpha = p_\alpha$, а $P_\alpha = -q_\alpha$. Принимая во внимание очевидные равенства:

$$\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_k} = 0, \qquad \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_k} = \delta_{\alpha k}, \qquad \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_k} = \delta_{\alpha k}, \qquad \frac{\partial p_\alpha}{\partial q_k} = 0,$$

получаем:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial Q_\beta}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_k}\right) = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial p_\beta}{\partial q_k} - \frac{\partial p_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_k}\right) = 0,$$

$$\{P_\alpha, P_\beta\} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial P_\beta}{\partial q_k} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial P_\beta}{\partial p_k}\right) = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial q_\beta}{\partial q_k} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial q_\beta}{\partial p_k}\right) = 0,$$

$$\{P_\alpha, Q_\beta\} = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial Q_\beta}{\partial q_k} - \frac{\partial P_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial Q_\beta}{\partial p_k}\right) = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial q_\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial p_\beta}{\partial p_k} - \frac{\partial q_\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial p_\beta}{\partial q_k}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{s}\delta_{\alpha k}\delta_{\beta k} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, видим, что соотношения (14.9) выполняются. ■

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

14.4. Найдите каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией:

$$\Phi(q,P,t) = qP - aPt + qa, \qquad a = \text{const}.$$

14.5. Найдите каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией:

$$F = \sqrt{aq^2 + bQ^2}, \;\; a,b = \text{const}.$$

14.6. Найдите каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией:

$$\Phi = \exp(aq^2 + bP^2), \;\; a,b = const.$$

14.7. Найдите каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией:

$$F = aq\sin(bQq) + ct, \;\; a,b,c = \text{const}.$$

14.8. Найдите каноническое преобразование, порождаемое производящей функцией:

$$F = \arcsin(Q/q) + bt, \;\; a,b = \text{const}, -1 < \frac{Q}{q} < 1.$$

14.9. Гамильтониан $H = {p^2}/{2m}$. Найдите каноническое преобразование и новый гамильтониан, если производящая функция

$$\Phi(q,P,t) = qP - \frac{1}{2m}P^2 t.$$

14.10. Найдите уравнения Гамильтона для свободной частицы с массой m в новых переменных, определяемых каноническим преобразованием, порождаемым производящей функцией:

$$\Phi(q,P,t) = qP + (bq - aP)t,$$

где a, b –константы.

14.11. Найдите уравнения Гамильтона для свободной частицы массы m в новых переменных, определяемых каноническим преобразованием, порождаемым производящей функцией:

$$\Phi = qP - aPt + mqa,$$

где a, b –константы.

14.12. Найдите уравнения Гамильтона для свободной частицы массы m в новых переменных, определяемых каноническим преобразованием, порождаемым производящей функцией:

$$\Phi = qP + mqa + bt^2,$$

где a, b –константы.

14.13. Найдите уравнения Гамильтона для частицы массы m, движущейся под действием упругой силы $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$, $k = \text{const}$, в новых переменных, определяемых каноническим преобразованием, порождаемым производящей функцией:

$$\Phi = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{P} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P})t + m(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}), \ \ \boldsymbol{a} = \text{const}.$$

14.14. Найдите уравнения Гамильтона для частицы с массой m, движущейся под действием упругой силы $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$, $k = \text{const}$, в новых переменных, определяемых каноническим преобразованием, порождаемым производящей функцией:

$$\Phi = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{P} + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{P})t, \ \ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \text{const}.$$

14.15. Найдите каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией

$$F(q, Q, t) = \frac{1}{2} m\omega \left(q - \frac{\mathcal{F}(t)}{m\omega^2}\right)^2 \text{ctg}Q,$$

и запишите уравнения движения в переменных P и Q для гармонического осциллятора (имеющего массу m и собственную частоту ω), на который действует внешняя сила $\mathcal{F}(t)$.

<u>Ответы к задачам для самостоятельного решения</u>

14.4. $Q = q - at, \ \ p = P + a, \ \ H' = H - aP$.

14.5. $P = -\dfrac{bQ}{\sqrt{aq^2 + bQ^2}}, \ \ p = \dfrac{aq}{\sqrt{aq^2 + bQ^2}}, \ \ H' = H.$

14.6. $Q = 2bP \exp(aq^2 + bP^2)\,, \ \ p = 2aq \exp(aq^2 + bP^2), \ \ H' = H.$

14.7. $P = -abq^2 \cos(bQq), \qquad p = a\sin(bQq) + abqQ\cos(bQq),$
$H' = H + c.$

14.8. $P = -\dfrac{1}{\sqrt{q^2 - Q^2}}, \qquad p = -\dfrac{Q}{|q|\sqrt{q^2 - Q^2}}, \;\; H' = H + b.$

14.9. $Q = q - \left({}^{P}\!/_{m}\right)t, \qquad p = P, \qquad H' = 0.$

14.10. $\dot{Q} = \dfrac{P + bt}{m} - a, \dot{P} = -b.$

14.11. $\dot{Q} = \dfrac{P}{m}, \dot{P} = 0.$

14.12. $\dot{Q} = \dfrac{P}{m} + a, \dot{P} = 0.$

14.13. $\dot{\boldsymbol{R}} = \dfrac{\boldsymbol{P}}{m}, \;\; \dot{\boldsymbol{P}} = -k(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{a}t).$

14.14. $\dot{\boldsymbol{R}} = \dfrac{\boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}t}{m} - \boldsymbol{a}, \;\; \dot{\boldsymbol{P}} = -k(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{a}t) - \boldsymbol{b}.$

14.15. $H' = P\varpi - \dfrac{\dot{\mathcal{F}}}{\varpi}\sqrt{\dfrac{2P}{m\varpi}}\cos Q, \quad \dot{Q} = \varpi - \dfrac{\dot{\mathcal{F}}}{\sqrt{2m\varpi^3 P}}\cos Q,$

$\dot{P} = -\dfrac{\dot{\mathcal{F}}}{\varpi}\sqrt{\dfrac{2P}{m\varpi}}\sin Q.$

§ 15. Уравнение Гамильтона-Якоби

Пусть некоторая производящая функция $S(q, t, C)$, зависящая от старых координат $q_1, q_2, \ldots, q_s$ и новых импульсов $C_1, C_2, \ldots, C_s$, переводит старый гамильтониан H в новый гамильтониан H', равный тождественно нулю. Согласно (14.3) функция S порождает следующее каноническое преобразование:

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, \tag{15.1}$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial C_\alpha}, \tag{15.2}$$

$$H' = H(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \qquad (15.3)$$

где Q_α играют роль новых координат, а $\alpha = 1,2, \dots, s$.

Учитывая, что $H' = 0$, уравнения Гамильтона для новых переменных C_α и Q_α запишутся следующим образом:

$$\dot{C}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q_\alpha} = 0, \;\; \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial C_\alpha} = 0.$$

Отсюда следует, что $C_\alpha = \text{const}$ и $Q_\alpha = \text{const}$.

Функцию S можно найти из уравнения (15.3), заменив в нем обобщенные импульсы $p_1, p_2, \dots, p_s$, фигурирующие в гамильтониане, на частные производные $\partial S/\partial q_1$, $\partial S/\partial q_2, \dots, \partial S/\partial q_s$, согласно (15.1). В результате получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0. \qquad (15.4)$$

Уравнение (15.4) называется уравнением *Гамильтона-Якоби*, а его решение

$$S = S(q_1, q_2, \dots, q_s, t, C_1, C_2, \dots, C_s) + A, \qquad (15.5)$$

содержащее $s + 1$ произвольных независимых констант $C_1, C_2, \dots, C_s, A$, одна из которых (A) входит аддитивным образом, называется *полным интегралом* уравнения Гамильтона-Якоби.

Зная явное выражение полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби, из s соотношений (15.2) можно найти координаты системы как функции времени и $2s$ произвольных постоянных C_α и Q_α, т.е. определить закон движения системы.

Таким образом, поиск закона движения механической системы методом Гамильтона-Якоби можно осуществить по следующему алгоритму:

1) найти гамильтониан системы, в котором все обобщенные импульсы выразить через функцию S, посредством соотношений (15.1);

2) с помощью найденного гамильтониана записать уравнение Гамильтона-Якоби (15.4);

3) найти полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби (15.5);

4) записать соотношения (15.2);

5) из соотношений (15.2) найти координаты системы как функции времени и $2s$ произвольных постоянных.

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в ряде случаев удается найти *методом разделения переменных*. Пусть координата q_α и соответствующая ей производная $\partial S/\partial q_\alpha$ входят в уравнение Гамильтона-Якоби в виде некоторой комбинации

$$f\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right),$$

не содержащей в явном виде других переменных (в неявном виде в функцию S входят все переменные). При этом уравнение Гамильтона-Якоби можно схематично записать, как

$$F\left(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha-1}}, \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha+1}} \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, \frac{\partial S}{\partial t}, f\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right)\right) = \\ = 0. \qquad (15.6)$$

Решение данного уравнения будем искать в виде

$$S = S'(q_1, q_2, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, t) + S_\alpha(q_\alpha).$$

Подставляя это решение в уравнение (15.6), получаем:

$$F\left(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_{\alpha-1}}, \frac{\partial S'}{\partial q_{\alpha+1}} \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_s}, \frac{\partial S'}{\partial t}, f\left(q_\alpha, \frac{dS_\alpha}{dq_\alpha}\right)\right) = \\ = 0. \qquad (15.7)$$

В этом уравнении переменная q_α входит только в функцию $f(q_\alpha, dS_\alpha/dq_\alpha)$, которая ни явно, ни неявно не содержит переменные $q_1, q_2, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s$. Поэтому при изменении q_α будет меняться только функция f. А поскольку уравнение (15.7) должно выполняться при любом значении q_α, то функция f может быть равна только некоторой константе, т.е.

$$f\left(q_\alpha, \frac{dS_\alpha}{dq_\alpha}\right) = C_1. \tag{15.8}$$

При этом уравнение (15.7) принимает вид:

$$F\left(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_{\alpha-1}}, \frac{\partial S'}{\partial q_{\alpha+1}} \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_s}, \frac{\partial S'}{\partial t}, C_1\right) = 0. \tag{15.9}$$

Уравнение (15.8) является уже обыкновенным дифференциальным уравнением, которое может быть решено в квадратурах, а уравнение (15.9) содержит на одну независимую переменную меньше по сравнению с исходным уравнением (15.6). Если таким способом можно последовательно отделить все s координат и время, то нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби целиком сводится к квадратурам.

Частным случаем разделения является случай циклической координаты. Циклическая координата не входит в явном виде в гамильтониан и, следовательно, в уравнение Гамильтона-Якоби. В этом случае

$$f\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha},$$

и уравнение (15.8) запишется в виде

$$\frac{dS_\alpha}{dq_\alpha} = C_1.$$

Отсюда с точностью до аддитивной константы $S_\alpha = C_1 q_\alpha$ и функция

$$S = S'(q_1, q_2, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, t) + C_1 q_\alpha.$$

Если гамильтониан не зависит явно от времени, то в роли “циклической координаты” выступает переменная t. При этом зависимость действия от времени сводится к слагаемому $-C_1 t$ (выбор знака “$-$” обусловлен тем, что константа C_1 в этом случае является обобщенной энергией системы).

Задача 15.1. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и закон движения свободной частицы массы m, движущейся вдоль прямой.

□ Направим ось x вдоль прямой, по которой движется частица. Для свободной частицы гамильтониан

$$H = \frac{p_x^2}{2m},$$

а уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Решение уравнения Гамильтона-Якоби будем искать в виде

$$S = -C_1 t + C_2 x + A, \tag{15.10}$$

где $C_1, C_2, A = \mathrm{const}$.

Подставим решение (15.10) в уравнение Гамильтона-Якоби. Получим:

$$-C_1 + \frac{C_2^2}{2m} = 0,$$

откуда

$$C_2 = \pm\sqrt{2mC_1},$$

и, следовательно,

$$S = -C_1 t \pm \sqrt{2mC_1}x + A.$$

Теперь запишем уравнение (15.2):

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial C_1} = -t \pm \sqrt{\frac{m}{2C_1}}x, \quad Q_1 = \mathrm{const}.$$

Отсюда

$$x = \pm\sqrt{\frac{2C_1}{m}}(t + Q_1). \tag{15.11}$$

Формула (15.11) представляет закон движения частицы. Ее можно переписать и в более привычном виде. Введем обозначение $Q_1 = -t_0$, где t_0 –

новая константа. Кроме того, учтем, что по определению обобщенный импульс

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \pm\sqrt{2mC_1}. \tag{15.12}$$

Знак “+” (“−”) выбирается на участке, где $p_x > 0$ ($p_x < 0$). Поскольку, согласно (15.12), импульс сохраняется, то знаки “+” и “–”, по сути дела, выбираются в зависимости от знака (направления) начальной скорости частицы. С учетом этого перепишем (15.11) в виде

$$x = \frac{p_x}{m}(t - t_0).$$

Видим, что константа t_0 играет роль начального момента времени. ■

Задача 15.2. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, траекторию и закон движения частицы массы m в поле тяжести.

□ Направим ось z вертикально вверх. Тогда гамильтониан

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz,$$

а уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\} + mgz = 0.$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби будем искать в виде

$$S = -C_1 t + C_2 x + C_3 y + f(z),\ \ C_1, C_2, C_3 = \text{const}. \tag{15.13}$$

Подставляя (15.13) в уравнение Гамильтона-Якоби, имеем:

$$-C_1 + \frac{1}{2m}\left\{C_2^2 + C_3^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2\right\} + mgz = 0,$$

откуда

$$f = \pm\int \sqrt{2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz}\, dz =$$

$$= \mp \frac{1}{3m^2 g}\left(2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz\right)^{3/2} + A\,,$$

где A – константа. Следовательно,

$$S = -C_1 t + C_2 x + C_3 y \mp \frac{1}{3m^2 g}\left(2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz\right)^{3/2} + A. \qquad (15.14)$$

Для определения знака в (15.14) найдем обобщенный импульс p_z. Согласно (15.1),

$$p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = \pm\sqrt{2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz}.$$

С другой стороны, $p_z = m\dot{z}$. Поэтому знак p_z определяется знаком $\dot{z}$. Следовательно, в (15.14) знак “−” (“+”) выбирается на участках, где $\dot{z} > 0$ ($\dot{z} < 0$).

Подставляя функцию (15.14) в уравнения (15.2), находим:

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial C_1} = -t \mp \frac{1}{mg}\sqrt{2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz}, \qquad (15.15)$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial C_2} = x \pm \frac{C_2}{m^2 g}\sqrt{2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz}, \qquad (15.16)$$

$$Q_3 = \frac{\partial S}{\partial C_3} = y \pm \frac{C_3}{m^2 g}\sqrt{2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz}, \qquad (15.17)$$

где Q_1, Q_2, Q_3 – произвольные постоянные. Из уравнений (15.16) и (15.17) видно, что

$$\frac{x - Q_2}{C_2} = \frac{y - Q_3}{C_3}.$$

Это означает, что траектории точки лежит в плоскости, параллельной оси z. Если совместить с этой плоскостью плоскость xz, то $y = 0$. Тогда следует положить $C_3 = 0$. При этом из (15.16) получим уравнение параболы с осью, параллельной оси z, а именно

$$(x - Q_2)^2 = \frac{C_2^2}{m^4 g^2}\left(2mC_1 - C_2^2 - 2m^2 gz\right).$$

Уравнение (15.15) определяет функцию $z(t)$. Положив $Q_1 = -t_0$, из этого уравнения имеем:

$$(t - t_0)^2 = \frac{2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz}{m^2 g^2},$$

т.е. координата z изменяется пропорционально $(t - t_0)^2$, константа t_0 играет роль начального момента времени. ■

Задача 15.3. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и закон движения частицы массы m и заряда q в поле электрического диполя.

□ Лагранжиан заряженной частицы, находящейся в электрическом поле диполя, найден в задаче 3.6 и равен

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta\right) - \frac{qp}{r^2}\cos\theta,$$

где p – дипольный момент, а r, θ, φ – сферические координаты (полярная ось направлена вдоль диполя, а начало отсчета совмещено с диполем). С помощью лагранжиана найдем обобщенные импульсы:

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \qquad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta, \qquad (15.18)$$

и затем гамильтониан

$$H = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + \frac{qp}{r^2}\cos\theta.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\} + \frac{qp}{r^2}\cos\theta = 0.$$

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби ищем в виде

$$S = -C_1 t + C_2\varphi + f(r, \theta) \qquad (C_1, C_2 = \text{const}).$$

Подставляя S в уравнение Гамильтона-Якоби, находим:

$$-C_1 + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{C_2^2}{r^2\sin^2\theta}\right\} + \frac{qp}{r^2}\cos\theta = 0. \qquad (15.19)$$

Представим функцию f в виде суммы функции, зависящей только от r, и функции, зависящей только от θ, т.е.

$$f(r,\theta) = R(r) + \Theta(\theta).$$

Подставим данное представление функции f в уравнение (15.19), умножим обе части уравнения на $2mr^2$ и перенесем все члены, зависящие от θ, в правую часть. В результате получим:

$$-2mC_1r^2 + r^2\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = -\left\{\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{C_2^2}{\sin^2\theta}\right\} - 2mqp\cos\theta. \quad (15.20)$$

Правая часть уравнения (15.20) является функцией только переменной θ, а левая – только r. Поэтому равенство (15.20) может выполняться только при условии, что левая и правая части равны одной и той же постоянной. Обозначив эту постоянную посредством $-C_3$, получаем два уравнения:

$$-2mC_1r^2 + r^2\left(\frac{dR}{dr}\right)^2 = -C_3,$$

$$-\left\{\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{C_2^2}{\sin^2\theta}\right\} - 2mqp\cos\theta = -C_3.$$

Из этих уравнений следует, что

$$R = \pm\int\sqrt{2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}}dr, \quad \Theta = \pm\int\sqrt{\left(C_3 - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta} - 2mqp\cos\theta\right)}d\theta.$$

Тогда полный интеграл*

$$S = -C_1t + C_2\varphi \pm$$

$$\pm\int\sqrt{2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}}dr \pm \int\sqrt{\left(C_3 - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta} - 2mqp\cos\theta\right)}d\theta. \quad (15.21)$$

* Аддитивная константа в S неявно присутствует в интегралах.

Для определения знаков, которые необходимо выбирать в полученном выражении для S, учтем, что обобщенные импульсы есть производные от функции действия по соответствующим обобщенным координатам, т.е.

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \pm\sqrt{2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}},$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \pm\sqrt{\left(C_3 - \frac{C_2^2}{sin^2\theta} - 2mqpcos\theta\right)}.$$

С другой стороны, согласно (15.18) знаки p_r и p_θ определяются знаками соответствующих обобщенных скоростей $\dot{r}$ и $\dot{\theta}$. Поэтому знак “+” в (15.21) перед первым (вторым) интегралом выбирается на участках, где $\dot{r} > 0$ ($\dot{\theta} > 0$), а знак “−” – на участках $\dot{r} < 0$ ($\dot{\theta} < 0$).

Пользуясь найденным полным интегралом, составим уравнения (15.2):

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial C_1} = -t \pm \int \frac{mdr}{\sqrt{2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}}},$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial C_2} = \varphi \mp C_2 \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\left(C_3 - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta} - 2mqp\cos\theta\right)^{1/2}},$$

$$Q_3 = \frac{\partial S}{\partial C_3} = \mp\frac{1}{2}\int \frac{dr}{r^2\sqrt{2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}}} \pm \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{\left(C_3 - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta} - 2mqp\cos\theta\right)^{1/2}}.$$

Полученные равенства определяют в квадратурах закон движения частицы. Первый интеграл может быть легко вычислен, что позволяет найти зависимость $r(t)$ в явном виде:

$$r^2 = \frac{2C_1}{m}(Q_1 + t)^2 + \frac{C_3}{2mC_1}.$$

■

Задачи для самостоятельного решения

15.4. Запишите уравнение Гамильтона-Якоби для точки массы m, обладающей потенциальной энергией U, в а) декартовой, б) цилиндрической и в) сферической системах координат.

15.5. Напишите уравнение Гамильтона-Якоби для частицы массы m, лагранжиан которой

$$L = \frac{ma^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \omega^2 \sin^2\theta\right) - mga\cos\theta,$$

где $a, \omega = \text{const}$.

15.6. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для тела массы m, движущегося по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом.

15.7. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для математического маятника и закон его движения в квадратуре. Длина математического маятника l, а масса m (рис. 2.5).

15.8. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и закон движения одномерного гармонического осциллятора (имеющего массу m и собственную частоту ω).

15.9. Найдите в цилиндрических координатах полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби, закон движения и траекторию частицы массы m и заряда q, движущейся в постоянном однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$.

15.10. Найдите в декартовых координатах полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для частицы массы m и заряда q, движущейся во взаимно перпендикулярных постоянных и однородных электрическом и магнитном полях с напряженностями $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ соответственно.

15.11. Найдите закон движения в квадратурах в сферических координатах для частицы массы m, движущейся в центральном поле $U(r)$, методом Гамильтона-Якоби.

15.12. Найдите полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби и закон движения частицы массы m и заряда q, движущейся в поле электромагнитной волны с векторным потенциалом $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\cos\omega t$ $(\boldsymbol{a}, \omega = \text{const})$.

15.4. а) $\dfrac{\partial S}{\partial t}+\dfrac{1}{2m}\left\{\left(\dfrac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+U(x,y,z)=0,$

б) $\dfrac{\partial S}{\partial t}+\dfrac{1}{2m}\left\{\left(\dfrac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2+\dfrac{1}{\rho^2}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+U(\rho,\varphi,z)=0,$

в) $\dfrac{\partial S}{\partial t}+\dfrac{1}{2m}\left\{\left(\dfrac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}+U(r,\theta,\varphi)=0.$

15.5. $\dfrac{\partial S}{\partial t}+\dfrac{1}{2ma^2}\left(\dfrac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2-\dfrac{ma^2\omega^2}{2}\sin^2\theta+mga\cos\theta=0.$

15.6. $S=-C_1t\pm\dfrac{2}{3mg\sin\alpha}(C_1+mgx\sin\alpha)^{3/2},\quad C_1=\text{const}.$

15.7. $S=-C_1t\pm\displaystyle\int\sqrt{2ml^2(C_1+mgl\cos\varphi)}\,d\varphi,\qquad C_1=\text{const}.$

$$t-t_0=\pm\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{2ml^2}{C_1+mgl\cos\varphi}}\,d\varphi;\ \ C_1,t_0=\text{const}.$$

15.8. $S=-C_1t\pm\displaystyle\int\sqrt{(2mC_1-mkq^2)}\,dq,$

$$q=\sqrt{\frac{2C_1}{k}}\sin(\omega(t+Q_1));\ \ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}},\qquad C_1,Q_1=\text{const}.$$

15.9. $\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\mathcal{H}\rho\boldsymbol{e}_\varphi,$ (ось z направлена вдоль $\boldsymbol{H}$)

$$S=-C_1t+C_2\varphi+C_3z\pm\int\sqrt{2mC_1-C_3^2-\left(\frac{C_2}{\rho}-\frac{q\mathcal{H}\rho}{2c}\right)^2}\,d\rho;$$

$$Q_1=-t\pm\int\frac{m\,d\rho}{\sqrt{2mC_1-C_3^2-\left(\frac{C_2}{\rho}-\frac{q\mathcal{H}\rho}{2c}\right)^2}},$$

$$Q_2 = \varphi \mp \int \frac{\left(\frac{C_2}{\rho} - \frac{q\mathcal{H}\rho}{2c}\right) d\rho}{\rho\sqrt{2mC_1 - C_3^2 - \left(\frac{C_2}{\rho} - \frac{q\mathcal{H}\rho}{2c}\right)^2}},$$

$$Q_3 = z \mp \int \frac{C_3 d\rho}{\sqrt{2mC_1 - C_3^2 - \left(\frac{C_2}{\rho} - \frac{q\mathcal{H}\rho}{2c}\right)^2}}.$$

$Q_1, Q_2, Q_3, C_1, C_2, C_3 = \mathrm{const}.$

Из выражений для Q_1 и Q_3: $z = z_0 + \dfrac{C_3}{m}(t - t_0).$

15.10. $S = -C_1 t + C_2 x \pm \int \sqrt{2m(C_1 + q\mathcal{E}y) - C_3^2 - \left(C_2 - \frac{q}{c}\mathcal{H}y\right)^2}\, dy + C_3 z,$

$C_1, C_2, C_3 = \mathrm{const}.$

15.11. $Q_1 = -t \pm \displaystyle\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(C_1 - \frac{C_2}{2mr^2} - U(r)\right)}},$

$$Q_2 = \pm \int \frac{d\theta}{2\sqrt{C_2 - \frac{C_3^2}{\sin^2\theta}}} \mp \int \frac{1}{mr^2} \frac{dr}{2\sqrt{\frac{2}{m}\left(C_1 - \frac{C_2}{2mr^2} - U(r)\right)}},$$

$Q_3 = -\varphi \pm \displaystyle\int \frac{C_3}{\sin^2\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{C_2 - \frac{C_3^2}{\sin^2\theta}}};$ $\quad Q_1, Q_2, Q_3, C_1, C_2, C_3 = \mathrm{const}.$

15.12. $S = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r} - \dfrac{1}{2m}\displaystyle\int \left(\boldsymbol{C} - \frac{q}{c}\boldsymbol{a}\cos\omega t\right)^2 dt\,;\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r_0} + \dfrac{1}{m}\left(\boldsymbol{C}t - \dfrac{q}{\omega c}\boldsymbol{a}\sin\omega t\right),$

$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{r_0} = \mathrm{const}.$

§ 16. Адиабатические инварианты. Переменные действие-угол

Рассмотрим механическую систему, совершающую одномерное финитное движение. Пусть данная система характеризуется каким-то параметром λ, определяющим свойства самой системы или внешнего поля, в котором она находится. Предположим, что параметр λ меняется *адиабатически медленно*, т.е. незначительно за время периода T движения системы, так что выполняется условие

$$T\frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda.$$

Энергия E такой системы, вообще говоря, не сохраняется. Но в силу медленности изменения λ существует такая комбинация E и λ, которая в среднем остается неизменной при движении системы. Эта величина, называемая *адиабатическим инвариантом* (I), может быть вычислена по формуле:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p dq. \qquad (16.1)$$

В (16.1) интеграл берется по полному изменению обобщенной координаты q за время периода при заданных E и λ.

Задача 16.1. Частица массы m движется в прямоугольной потенциальной яме ширины a. Найдите, как изменяется энергия частицы при медленном изменении a.

□ Без ограничения общности можем считать, что потенциальная энергия частицы в потенциальной яме равна нулю, а обобщенный импульс частицы

$$p = \pm\sqrt{2mE},$$

где E – полная энергия частицы при фиксированном значении a. С помощью формулы (16.1) находим:

$$I = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^a \sqrt{2mE}dq - \int_a^0 \sqrt{2mE}dq\right) = \frac{1}{\pi}\sqrt{2mE}a.$$

Отсюда следует, что

$$Ea^2 = \text{const}.$$

■

Интегралу (16.1) может быть приписан наглядный геометрический смысл, если воспользоваться понятием о *фазовом пространстве*. В случае системы с одной степенью свободы, под фазовым пространством понимается двумерное пространство с введенной декартовой системой координат, по осям которой отложены значения обобщенной координаты q и обобщенного импульса p. Каждая точка этого пространства отвечает определенному состоянию системы. При движении системы изображающая ее фазовая точка описывает в фазовом пространстве соответствующую линию, называемую *фазовой траекторией*. Если система совершает периодическое движение, то ее фазовая траектория представляет собой замкнутую кривую в фазовой плоскости q, p. Фигурирующий в (16.1) интеграл

$$\oint p dq,$$

взятый вдоль этой кривой, есть заключенная внутри нее площадь.

Задача 16.2. Определите изменение амплитуды линейных колебаний математического маятника при медленном изменении длины его подвеса.

□ Гамильтониан линейных колебаний математического маятника

$$H(p_\varphi, \varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + \frac{mgl\varphi^2}{2}, \tag{16.2}$$

где φ – угол отклонения маятника от вертикали, p_φ – обобщенный импульс, соответствующий координате φ.

Фазовая траектория при некотором постоянном значении l определяется законом сохранения энергии

$$H(p_\varphi, \varphi) = E,$$

с учетом которого (16.2) можно переписать в виде

$$\frac{p_\varphi^2}{2ml^2E} + \frac{\varphi^2}{\frac{2E}{mgl}} = 1. \tag{16.3}$$

Уравнение (16.3) представляет собой уравнение эллипса с полуосями $\sqrt{2ml^2E}$ и $\sqrt{2E/_{mgl}}$. Площадь эллипса есть $2\pi E\sqrt{l/_g}$, откуда

$$I = E\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{16.4}$$

Пусть φ_0 есть амплитуда колебаний маятника при заданной длине l. Тогда полную энергию маятника, предполагая колебания малыми, можно записать в виде

$$E = \frac{mgl}{2}\varphi_0^2.$$

При этом из (16.4) получаем:

$$l^{3/4}\varphi_0 = \text{const}. \tag{16.5}$$

Это означает, что при адиабатически медленном изменении длины l амплитуда линейных колебаний маятника будет изменяться таким образом, чтобы выполнялось равенство (16.5). ■

С помощью определенной равенством (16.1) величины I можно дать новую формулировку уравнениям движения системы (с постоянными параметрами), совершающей периодическое движение, в частности, получить частоты, характеризующие это движение. Пусть механическая система с одной степенью свободы совершает периодическое движение, а ее гамильтониан не зависит явно от времени. Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби (15.4) для данной системы можно представить в виде

$$S = -E_0 t + W(q, E_0). \tag{16.6}$$

В (16.6) константа E_0 играет роль обобщенной энергии системы*, а $W(q, E_0)$ называется *укороченным действием.* Укороченное действие $W(q, E_0)$ можно

---

* Ранее, в § 15, данную константы мы обозначали C_1. В этом параграфе, для большей физической наглядности, используем привычное обозначение для энергии. При этом с математической точки зрения E_0 в (16.6) играет роль обычной константы, от которой должен зависеть (помимо аддитивной константы) полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби.

представить в виде функции $W(q, I)$, зависящей от обобщенной координаты q и определяемой равенством (16.1) величины I. Действительно, обобщенный импульс

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{dW(q, E_0)}{dq} \tag{16.7}$$

зависит от q и E_0. С учетом этого, согласно (16.1), $I = I(E_0)$. Отсюда можно выразить E_0 через I, и, следовательно $W = W(q, I)$.

Используем укороченное действие $W(q, I)$ в качестве производящей функции, в которой q фигурирует в качестве старой координаты, а I примем за новый импульс. Каноническое преобразование, задаваемое функцией $W(q, I)$, определяется равенствами:

$$p = \frac{\partial W(q, I)}{\partial q}, \qquad w = \frac{\partial W(q, I)}{\partial I}, \tag{16.8}$$

где p старый импульс, а w играет роль новой координаты. Величину I называют *переменной действия*, а w – *угловой переменной*. Новый гамильтониан

$$H' = H(I) + \frac{\partial W(q, I)}{\partial t} = H(I).$$

Уравнения Гамильтона в переменных действие-угол будут иметь вид:

$$\dot{I} = 0, \qquad \dot{w} = \frac{dH(I)}{dI},$$

откуда следует, что

$$I = \text{const}, \qquad w = \frac{dH(I)}{dI} t + w_0,$$

где w_0 – некоторая константа.

Величина

$$\omega = \frac{dH(I)}{dI} \tag{16.9}$$

является частотой периодического движения системы.

Задача 16.3. Найдите переменные действие-угол и частоту вращения свободного твердого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции тела относительно оси вращения равен $\mathcal{J}$.

□ Кинетическая энергия твердого тела

$$T = \frac{1}{2}\mathcal{J}\dot{\varphi}^2,$$

где φ угол поворота тела. По условию задачи потенциальная энергия $U = 0$. Лагранжиан

$$L = T - U = \frac{1}{2}\mathcal{J}\dot{\varphi}^2,$$

откуда обобщенный импульс

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \mathcal{J}\dot{\varphi},$$

и, следовательно, гамильтониан, совпадающий с полной энергий E_0 твердого тела,

$$H = E_0 = p_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{p_\varphi^2}{2\mathcal{J}}. \tag{16.10}$$

Поскольку переменная φ – циклическая, обобщенный импульс $p_\varphi = \text{const}$.

Переменная действие, согласно определению (16.1),

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi d\varphi = \frac{p_\varphi}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = p_\varphi. \tag{16.11}$$

Для нахождения укороченного действия воспользуемся формулой (16.7), которая в рассматриваемом случае примет вид

$$p_\varphi = \frac{dW}{d\varphi},$$

откуда (с точностью до аддитивной постоянной)

$$W = \int p_\varphi \, d\varphi = p_\varphi \varphi,$$

или, с учетом (16.11),

$$W = I\varphi.$$

В соответствии с (16.8), угловая переменная

$$w = \frac{\partial W}{\partial I} = \varphi.$$

Частоту ω определяем по формуле (16.9). С учетом того, что $p_\varphi = I$, (16.10) можно записать как

$$H(I) = \frac{I^2}{2\mathcal{J}},$$

а, значит,

$$\omega = \frac{dH(I)}{dI} = \frac{I}{\mathcal{J}}.$$

■

Пусть теперь имеется механическая система с s степенями свободы. По-прежнему предполагается, что система совершает финитное (по всем координатам) движение. Будем и далее полагать, что гамильтониан не зависит от времени и ограничимся случаем, когда переменные в уравнении Гамильтона-Якоби разделяются. Переменные действия определяются равенствами

$$I_\alpha = \frac{1}{2\pi}\oint p_\alpha dq_\alpha\,, \qquad \alpha = 1,2,\dots,s, \tag{16.12}$$

где интеграл берется по полному циклу периодического движения. Принимая величины $I_1, I_2, \dots, I_s$ за новые импульсы, можно укороченное действие записать в виде функции

$$W = W(q_1, q_2, \dots, q_s, I_1, I_2, \dots, I_s).$$

Соотношения

$$p_\alpha = \frac{\partial W}{\partial q_\alpha}, \qquad w_\alpha = \frac{\partial W}{\partial I_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2,\dots,s)$$

в неявном виде задают каноническое преобразование от переменных q_α, p_α к переменным действие-угол I_α, w_α. Частоты движения

$$\omega_\alpha = \frac{\partial H(I_1, I_2, \ldots, I_s)}{\partial I_\alpha}, \quad \alpha = 1,2, \ldots, s, \tag{16.13}$$

где $H(I_1, I_2, \ldots, I_s)$ – гамильтониан, выраженный через $I_1, I_2, \ldots, I_s$.

Задача 16.4. Найдите переменные действия и частоты финитного движения частицы массы m в поле

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad \alpha > 0.$$

□ По условию задачи движение частицы происходит в центральном поле. Лагранжиан для движения в центральном поле определяется формулой (6.1), которая в рассматриваемом случае принимает вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r}.$$

Обобщенные импульсы

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi},$$

и, следовательно, гамильтониан

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{\alpha}{r}.$$

Гамильтониан не зависит явно от времени, поэтому сохраняется обобщенная энергия

$$E_0 = -|E_0| = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) - \frac{\alpha}{r}. \tag{16.14}$$

Здесь учтено, что для совершения финитного движения в заданном в задаче потенциале, должно быть $E_0 < 0$. Кроме того, координата φ является циклической, поэтому сохраняется также импульс p_φ, который при движении в центральном поле совпадает с моментом импульса M (см. § 6): $p_\varphi = M = \text{const}$. С учетом этого (16.14) можно записать как

$$-|E_0| = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{M^2}{r^2}\right) - \frac{\alpha}{r}.$$

Отсюда

$$p_r = \pm\sqrt{-2m|E_0| + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}. \qquad (16.15)$$

Найдем теперь переменные действия. Переменная I_φ легко вычисляется в силу постоянства p_φ. Действительно, согласно (16.12),

$$I_\varphi = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi d\varphi = \frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\pi = M.$$

Переменная I_r, с учетом (16.15), равна

$$I_r = \frac{1}{2\pi}\oint p_r dr = \pm\frac{1}{2\pi}\oint \sqrt{-2m|E_0| + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}\,dr.$$

В силу периодичности движения данный интеграл можно представить в виде удвоенного интеграла от $r_{\min}$ до $r_{\max}$, т.е.

$$I_r = \frac{1}{\pi}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{-2m|E_0| + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M^2}{r^2}}\,dr, \qquad (16.16)$$

где r_{min} и $r_{\max}$, определяемые уравнением (6.7), равны:

$$r_{\min} = \frac{\alpha}{2|E_0|} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E_0^2} - \frac{M^2}{2m|E_0|}}, \quad r_{\max} = \frac{\alpha}{2|E_0|} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4E_0^2} - \frac{M^2}{2m|E_0|}}.$$

С учетом этого интеграл (16.16)

$$I_r = -M + \alpha\sqrt{\frac{m}{2|E_0|}} = -I_\varphi + \alpha\sqrt{\frac{m}{2|E_0|}}. \qquad (16.17)$$

Частоты ω_r, ω_φ вычисляем по формуле (16.13). Для этого сначала представим гамильтониан как функцию переменных действия I_φ и I_r. Из (16.17) следует, что

$$|E_0| = \frac{m\alpha^2}{2\left(I_r + I_\varphi\right)^2}.$$

Поскольку $H = -|E_0|$, то

$$H\left(I_r, I_\varphi\right) = -\frac{m\alpha^2}{2\left(I_r + I_\varphi\right)^2}.$$

Тогда

$$\omega_r = \omega_\varphi = \frac{\partial H\left(I_r, I_\varphi\right)}{\partial I_r} = \frac{\partial H\left(I_r, I_\varphi\right)}{\partial I_\varphi} = \frac{m\alpha^2}{\left(I_r + I_\varphi\right)^3}.$$

■

Задачи для самостоятельного решения

16.5. Шарик, находящийся в лифте, подскакивает над упругой плитой. Как изменяется максимальная высота подъема шарика h, если лифт движется с адиабатически медленно изменяющимся по закону $a(t)$ ускорением?

16.6. Частица движется внутри параллелепипеда с упругими стенками. Как изменяется энергия E частицы, если размеры параллелепипеда (a, b, c – длина, ширина и высота) адиабатически медленно изменяются?

16.7. Частица движется внутри сферы с упругими стенками, радиус R которой адиабатически медленно изменяется. Как изменяется при этом энергия E частицы?

16.8. Найдите переменные действия и частоты колебаний неизотропного пространственного осциллятора, гамильтониан которого

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + \frac{1}{2}\left(k_1 x^2 + k_2 y^2 + k_3 z^2\right),$$

$$k_1, k_2, k_3 = \text{const}.$$

Ответы к задачам для самостоятельного решения

16.5. $h^3(g \pm a) = \mathrm{const}$. Знак "+" или "–" выбирается в зависимости от направления ускорения лифта.

16.6. $E = \dfrac{\pi^2}{2m}\left(\dfrac{I_1^2}{a^2} + \dfrac{I_2^2}{b^2} + \dfrac{I_3^2}{c^2}\right)$; $I_1, I_2, I_3 = \mathrm{const}$.

16.7. $ER^2 = \mathrm{const}$.

16.8. $I_1 = \dfrac{C_1}{2\sqrt{mk_1}}, \qquad I_2 = \dfrac{C_2}{2\sqrt{mk_2}}, \qquad I_3 = \dfrac{C_3}{2\sqrt{mk_3}},$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}; \quad C_1, C_2, C_3 = \mathrm{const}.$$

Приложение 1. Действительные, возможные и виртуальные перемещения. Идеальные связи

Рассмотрим материальную точку, на которую наложена голономная связь

$$f(\boldsymbol{r}, t) = 0, \tag{П.1}$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор точки.

Действительным перемещением $d\boldsymbol{r}$ точки называется бесконечно малое ее перемещение в соответствии с уравнением движения и уравнением связи, то есть, действительное перемещение — это реальное бесконечно малое перемещение точки под действием всех действующих сил и допускаемое уравнением связи. Такое перемещение происходит за время dt.

Возможное перемещение точки — это любое перемещение точки, допускаемое только уравнением связи. В отличие от действительного перемещения возможное перемещение может не удовлетворять уравнению движения. В случае, если возможное перемещение удовлетворяет уравнению движения, то оно совпадает с действительным перемещением. Действительное перемещение при заданных начальных условиях и силах у точки только одно, в то время как возможных перемещений может быть бесконечно много. Действительное перемещение всегда является одним из возможных.

Под *виртуальным перемещением* $\delta\boldsymbol{r}$ точки понимают воображаемое бесконечно малое перемещение точки, допускаемое связью в данный фиксированный момент времени. Для виртуального перемещения не требуется времени для его совершения. При таком перемещении связь как бы “застывает”, то есть ее изменение со временем мысленно прекращается. Очевидно, что в случае стационарной связи (когда время в уравнение (П.1) в явном виде не входит) совокупность виртуальных перемещений совпадает с возможными перемещениями.

Если связью для точки является, например, движущаяся поверхность, то все возможные перемещения будут представлять собой векторные суммы перемещения вместе с поверхностью и перемещения по поверхности. В то же время все виртуальные перемещения $\delta\boldsymbol{r}$ в момент времени t расположатся на поверхности в положении, которое она занимает в рассматриваемый момент времени.

Вычисляя дифференциал левой части уравнения (П. 1) при фиксированном времени и приравнивая его нулю (поскольку в силу равенства нулю функции f дифференциал любого порядка от этой функции равен нулю), получим

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot \delta \boldsymbol{r} = 0. \qquad (\text{П. }2)$$

Здесь приращение $\delta \boldsymbol{r}$ радиуса-вектора точки происходит при фиксированном времени. Уравнение (П. 2) представляет собой дифференциальное уравнение, которому подчинены виртуальные перемещения точки.

Легко обобщить рассмотренные определения на систему N материальных точек, подчиненных n голономным связям

$$f_k(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0, \quad k = 1,2, \dots, n.$$

Так, виртуальными перемещениями $\delta \boldsymbol{r}_i$ $(i = 1,2, \dots, N)$ точек системы будут мысленные перемещения, которые могли бы совершать точки при наложенных на них связях в рассматриваемый момент времени, а дифференциальные уравнения для виртуальных перемещений имеют вид

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f_k}{\partial \boldsymbol{r}_i} \cdot \delta \boldsymbol{r}_i \right) = 0, \quad k = 1,2, \dots, n,$$

или в проекциях на оси декартовой системы координат

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_k}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \delta z_i \right) = 0, \quad k = 1,2, \dots, n. \qquad (\text{П. }3)$$

Если на систему N материальных точек не наложены никакие связи, а действуют только заранее заданные силы, то согласно второму закону

Ньютона между массами точек системы m_i, их ускорениями $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ и приложенными к ним силами $\boldsymbol{F}_i$ имеют место соотношения*

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i, \qquad i = 1,2,\dots,N. \tag{П.4}$$

Заранее заданные силы $\boldsymbol{F}_i$ называются *активными силами*. Активные силы обычно задаются как функции времени, положения и скоростей точек системы.

При наличии связей законы движения точек системы, определяемые равенствами (П.4), могут оказаться несовместимыми со связями. Поэтому считают, что материально осуществленные связи действуют на материальные точки системы с некоторыми дополнительными силами $\boldsymbol{R}_i$ ($i = 1,2,\dots,N$). Эти силы носят название *реакций связей***. Силы $\boldsymbol{R}_i$ таковы, что ускорения, определяемые из уравнений

$$m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i, \qquad i = 1,2,\dots,N,$$

уже допускаются связями. По сути дела, $\boldsymbol{R}_i$ – это силы, с которыми тела, осуществляющие связи (стержни, нити, поверхности и т.п.), действуют на точки системы. Но, в отличие от активных сил, силы реакции связей не заданы изначально, а подлежат определению.

Основная задача динамики несвободной механической системы с голономными связями состоит в следующем: необходимо отыскать закон движения механической системы и силы реакции связей по заданным активным силам и заданным уравнениям голономных связей. Эта задача сводится к совместному решению уравнений движения и уравнений связей (считаем, что механическая система содержит N материальных точек и на нее наложено n голономных связей)

$$\begin{aligned} &m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{R}_i, \qquad i = 1,2,\dots,N;\\ &f_k(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0, \quad k = 1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{П.5}$$

---

* Если на какую-то точку i действует сразу несколько сил, то под $\boldsymbol{F}_i$ понимается равнодействующая этих сил.

** При наличии нескольких связей, действующих на точку с номером i, $\boldsymbol{R}_i$ есть равнодействующая всех реакций связей.

Предполагается также, что заданы начальные положения и начальные скорости точек системы, совместимые со связями.

Система (П.5) представляет собой систему $3N + n$ скалярных уравнений, содержащих $6N$ неизвестных функций – проекций векторов $\boldsymbol{r}_i$ и $\boldsymbol{R}_i$ на координатные оси. Если $n = 3N$, то уравнения связей полностью определяют движение системы, поэтому данный случай особого интереса не представляет. С другой стороны, если $n < 3N$, то сформулированная выше задача является неопределенной, так как число подлежащих определению величин больше имеющихся уравнений. Для решения задачи в этом случае, необходимо иметь какие-то дополнительные $6N - (3N + n) = 3N - n$ независимых соотношений между искомыми величинами. Эти соотношения можно получить, если ограничиться важным классом *идеальных связей*.

Связи называются идеальными, если сумма работ реакций этих связей на любых виртуальных перемещениях всегда равна нулю, то есть если

$$\sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{R}_i \cdot \delta \boldsymbol{r}_i) = 0. \qquad (\text{П}.6)$$

Очевидно, что под это определение попадают все связи без трения. Так, например, абсолютно гладкая поверхность или абсолютно гладкая линия являются идеальными связями для частицы. Все виртуальные перемещения точки с такими связями направлены по касательным к поверхности или линии, а силы реакции – по нормалям к ним. Поэтому все скалярные произведения в (П.6) будут равны нулю. В то же время и некоторые связи с трением также являются идеальными связями. К примеру, шероховатая поверхность для тел (катков), катящихся по ней без проскальзывания. В этом случае соприкосновение происходит в одной точке или по одной линии. Виртуальные перемещения в точках соприкосновения в каждый момент времени равны нулю, так как равны нулю скорости в точках соприкосновения. Закрепленные точки системы по отдельности являются связями идеальными, так как их виртуальные перемещения равны нулю. Приведенные примеры, безусловно, не исчерпывают весь класс идеальных связей, но показывают весьма большую его общность.

Условие идеальности связей $(\Pi.6)$ позволяет получить недостающие соотношения для нахождения решения задачи $(\Pi.5)$. Чтобы это показать запишем уравнение $(\Pi.6)$ в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(R_{ix}\delta x_i + R_{iy}\delta y_i + R_{iz}\delta z_i\right) = 0, \qquad (\Pi.7)$$

где R_{ix}, R_{iy}, R_{iz} – проекции $\boldsymbol{R}_i$ на оси системы координат. Среди $3N$ виртуальных перемещений $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ в силу условия $(\Pi.3)$ имеется n зависимых перемещений и $s = 3N - n$ независимых (s – число степеней свободы). Поэтом в равенстве $(\Pi.7)$ можно выразить с помощью $(\Pi.3)$ n зависимых величин $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ через s независимых и приравнять нулю коэффициенты при этих независимых величинах. В результате получим недостающие $s = 3N - n$ соотношений, благодаря которым основная задача динамики несвободной системы с голономными связями становится определенной, поскольку число уравнений и число неизвестных функций в этом случае совпадают. Именно с этим обстоятельством связана важность класса идеальных связей.

Приложение 2. Дифференциальные операции в криволинейных ортогональных координатах

С помощью коэффициентов Ламе можно записать выражения для дифференциальных операторов в ортогональных криволинейных координатах (q_1, q_2, q_3). В частности, для скалярной функции $F(q_1, q_2, q_3)$ и векторной функции $\boldsymbol{A}(q_1, q_2, q_3)$:

$$\mathrm{grad}F = \frac{1}{h_1}\frac{\partial F}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial F}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial F}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3,$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 A_3)\right],$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{e}_1 & h_2\boldsymbol{e}_2 & h_3\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} = \frac{\boldsymbol{e}_1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial q_3}\right] +$$

$$+\frac{\boldsymbol{e}_2}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial q_3}-\frac{\partial(h_3 A_3)}{\partial q_1}\right]+\frac{\boldsymbol{e}_3}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2 A_2)}{\partial q_1}-\frac{\partial(h_1 A_1)}{\partial q_2}\right].$$

В декартовых координатах (x, y, z)*:*

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1,$$

$$\mathrm{grad}F = \frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{e}_z,$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z.$$

В цилиндрических координатах (ρ, φ, z)*:*

$$h_1 = h_r = 1,\ \ h_2 = h_\varphi = \rho,\ \ h_3 = h_z = 1,$$

$$\mathrm{grad}F = \frac{\partial F}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{e}_z,$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial\left(\rho A_\varphi\right)}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho +$$

$$+\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\left(\rho A_\varphi\right)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_z.$$

В сферических координатах (r, θ, φ)*:*

$$h_1 = h_r = 1,\ \ h_2 = h_\theta = r,\ \ h_3 = h_\varphi = r\sin\theta,$$

$$\mathrm{grad}F = \frac{\partial F}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\, A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta\, A_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(\sin\theta\, A_\varphi\right)}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\boldsymbol{e}_r +$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\boldsymbol{e}_\varphi.$$

Литература

1. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1972.

2. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматлит, 2002.

3. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М.: Наука, 1975.

4. *Казаков К.А.* Введение в теоретическую и квантовую механику. М.: Изд-во МГУ, 2008.

5. *Коткин Г.Л., Сербо В.Г.* Сборник задач по классической механике. М.: РХД, 2001.

6. *Коткин Г.Л., Сербо В.Г., Черных А.И.* Лекции по аналитической механике. М.: НИЦ “РХД”, 2010.

7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. М.: Физматлит, 2001.

8. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Ижевск: НИЦ “РХД”, 1999.

9. *Никитин Н.Н.* Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1990.

10. *Ольховский И.И.* Курс теоретической механики для физиков. М.: Лань, 2009.

11. *Ольховский И.И., Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С.* Задачи по теоретической механике для физиков. М.: Изд-во МГУ, 1977.

12. *Павленко Ю.Г.* Лекции по теоретической механике. М.: Физматлит, 2002.

13. *Павленко Ю.Г.* Задачи по теоретической механике. М.: Физматлит, 2003.

15. *Пименов А.Б.* Задачи по теоретической механике. М.: Физический факультет МГУ, 2015.

16. *Пименов А.Б.* Методика решения задач по теоретической механике. М.: Физический факультет МГУ, 2016.

17. *Пятницкий Е.С., Трухан Н.М., Ханукаев Ю.И., Яковенко Г.Н.* Сборник задач по аналитической механике. М.: Физматлит, 2002.

18. *Татаринов Я.В.* Лекции по классической динамике. М.: Изд-во МГУ, 1984.

19. *Уиттекер Э.* Аналитическая динамика. Ижевск: НИЦ “РХД”, 1999.

20. *Форш П.А.* Задачи по теоретической механике для химиков. М.: Химический факультет МГУ, 2008.

21. *Яковенко Г.Н.* Краткий курс аналитической динамики. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004.