МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Л.А. Головань, Д.М. Жигунов, Е.А. Константинова, П.А. Форш

СБОРНИК ТЕСТОВ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Москва, 2016

Оглавление

Предисловие

В учебном пособии собраны тестовые задания по всем основным разделам курса теоретической механики, изучаемого студентами химических факультетов ВУЗов. Курс «Теоретическая механика», как правило, «открывает» раздел теоретической физики (остальные курсы теоретической физики следуют за ним). Поэтому именно в этом курсе студенты впервые сталкиваются с подходом, используемым в теоретической физике, который заметно отличается от применяемого в общей физике. Зачастую изучение теоретической механики вызывает у учащихся заметные сложности, что приводит не только к плохому освоению курса, но и «отбивает» желание и возможность постижения других курсов теоретической физики. Особенно это ярко проявляется у студентов нефизических специальностей, поскольку здесь и времени на изучение курса меньше, и мотивация не столь ярко выражена. К сожалению, и учебных пособий, ориентированных именно на студентов нефизических специальностей очень мало. Огромное количество прекрасных пособий по теоретической механике содержит значительно больше материала и оперирует более сложным математическим аппаратом, чем того требует программа курса «Теоретическая механика» химических факультетов классических университетов. В связи с этим, для того чтобы студенты смогли сделать свои «первые шаги» и почувствовать свои силы в изучении теоретической механики и был разработан представляемый сборник тестовых задач по теоретической механике.

Представленные в сборнике тестовые задания являются весьма простыми и призваны закрепить теоретические сведения и выработать навык их использования для исследований движения простейших механических систем. Все задачи снабжены вариантами ответов. В некоторых вопросах варианты ответа представляют собой определение того или иного понятия, и выбор правильного ответа способствует заучиванию основных теоретических положений. В случае тестового вопроса в виде задачи предполагается, что учащийся должен сначала решить, а потом определить какой из представленных вариантов ответа является правильным. То, что задания довольно простые и снабжены вариантами ответа, позволяет их эффективно использовать и для экспресс-анализа усвоения учащимися материала непосредственно на занятиях. Конечно, данный сборник тестов ни в коем случае не заменяет классические задачники и учебники по теоретической механике, а может лишь рассматриваться как дополнительное средство в освоении материала.

Несмотря на то, что собранные в сборнике задачи являются весьма простыми, они, тем не менее, несколько различаются между собой по уровню сложности. Для того чтобы отличать уровень представленных в сборнике задач, более сложные задачи снабжены одной или двумя звездочками. Количество звездочек пропорционально сложности задачи.

Надеемся, что представляемый сборник будет полезен для студентов, изучающих теоретическую механику, и сможет использоваться преподавателями в образовательном процессе.

Авторы

Краткие теоретические сведения

Пусть дана механическая система (из N материальных точек) с s степенями свободы, на которую наложено n голономных идеальных связей. Под *идеальными связями* будем понимать связи без трения. Голономность связей предполагает, что каждая из них может быть аналитически представлена в виде:

$$f_k(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0, \quad k = 1,2 \dots n,$$

где $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N$ – радиус-векторы точек системы. Отметим, что число степеней свободы такой системы $s = 3N - n$. Под *обобщенными координатами* будем понимать любые независимые величины, однозначно определяющие положение нашей механической системы. Для рассматриваемого случая таких координат будет s штук. Обозначим их посредством $q_1, q_2, \dots, q_s$. Производные от обобщенных координат по времени $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ называются *обобщенными скоростями*.

Кроме того будем считать, что на точки системы действуют только потенциальные силы. Потенциальную силу $\boldsymbol{F}_i$, действующую на i -ую точку системы, можно представить в виде

$$\boldsymbol{F}_i = -grad_{\boldsymbol{r}_i} U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t) \equiv -\frac{\partial U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t)}{\partial \boldsymbol{r}_i}.$$

Функция $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t)$ называется потенциалом сил или потенциальной энергией. Выражая радиус-векторы частиц через обобщенные координаты, потенциальную энергию можно представить как функцию обобщенных координат и времени. Далее, для краткости, где это не может привести к недоразумениям, набор переменных $q_1, q_2, \dots, q_s$ будем обозначать посредством q, а набор обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s$ посредством $\dot{q}$. Так, например, потенциальная энергия $U(q_1, q_2, \dots, q_s, t) \equiv U(q, t)$.

Движение рассматриваемой механической системы описывается *уравнениями Лагранжа*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1,2, \dots, s, \tag{1}$$

в которых функция

$$L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - U(q, t), \tag{2}$$

где $T(q, \dot{q}, t)$ есть кинетическая энергия системы. Функция $L(q, \dot{q}, t)$ называется *функцией Лагранжа* системы. Кинетическая энергия в выражении (2) есть

$$T(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2},$$

где m_i - масса i -ой частицы, $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ - ее скорость, выраженная через обобщенные координаты q_α и обобщенные скорости $\dot{q}_\alpha$.

В случае если на каждую частицу системы помимо потенциальных сил действует сила сопротивления вида $F_d^i = -k_i \dot{\boldsymbol{r}}_i$ (k_i - коэффициент пропорциональности) и при этом выполняется соотношение

$$\frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \cdots = \frac{k_i}{m_i} \equiv \frac{k}{m},$$

функцию Лагранжа можно записать как

$$L = e^{\frac{k}{m}t}(T - U),$$

где кинетическая и потенциальная энергии, как и ранее, выражены через обобщенные координаты q_α и, в случае кинетической энергии, обобщенные скорости $\dot{q}_\alpha$. Уравнения движения системы по-прежнему будут определяться уравнениями (1).

Если имеется система N заряженных частиц (e_i, m_i – электрический заряд и масса i -ой частицы соответственно) и кроме потенциальных сил (с потенциалом U) на систему действуют еще электромагнитные силы, то уравнениями движения частиц системы являются уравнения (1), в которых функция Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\boldsymbol{r}}_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{c} (\boldsymbol{A}_i, \dot{\boldsymbol{r}}_i) - \sum_{i=1}^{N} q_i \phi_i - U\,, \qquad (3)$$

где c – скорость света, а $\boldsymbol{A}_i$ и ϕ_i - скалярный и векторный потенциалы частицы соответственно, которые связаны с напряженностями электрического $\boldsymbol{\mathcal{E}}_i$ и магнитного $\boldsymbol{\mathcal{H}}_i$ полей, действующих на частицу, соотношениями

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_i = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}_i}{\partial t} - grad_{r_i} \phi_i,$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}_i = rot_{\boldsymbol{r}_i}\boldsymbol{A}_i$$

Здесь индекс $\boldsymbol{r}_i$ в обозначениях градиента и ротора указывает на то, что производные берутся по координатам i -ой частицы. В частности, для одной частицы функция (3) примет вид

$$L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) - q\phi - U$$

Функции обобщенных координат и обобщенных скоростей, сохраняющие при движении механической системы постоянные значения, называются *интегралами движения*. Среди интегралов движения есть такие, постоянство которых связано со свойствами пространства и времени, а именно их однородностью и изотропией. Эти интегралы движения именуются *законами сохранения*.

Если функция Лагранжа системы явно от времени не зависит, т.е. ${\partial L}/{\partial t} = 0$, то сохраняется *обобщенная энергия* E, которая определяется выражением

$$E = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha - L. \qquad (4)$$

В простейшем случае, когда $L = T - U$, а радиус-векторы точек системы как функции обобщенных координат явно от времени не зависят, обобщенная энергия совпадает с полной энергией системы, т. е.

$$E = T + U$$

Производные функции Лагранжа по обобщенным скоростям

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

называются *обобщенными импульсами*. Обобщенный импульс p_α сохраняется, если функция Лагранжа явно от координаты q_α не зависит. Координата q_α, от которой функция Лагранжа явно не зависит, называется *циклической координатой.*

Под твердым телом в механике понимается система материальных точек, изменением расстояния между которыми можно пренебречь в условиях рассматриваемой задачи. Твердое тело обладает шестью степенями свободы. Для однозначного определения положения твердого тела относительно инерциальной системы отсчета K (с осями x, y, z) введем систему K' (с осями x', y', z') жестко связанную с твердым телом. Начало отсчета системы K' удобно выбрать в центре инерции твердого тела. Произвольное перемещение твердого тела можно представить в виде параллельного переноса тела в пространстве и поворота вокруг центра инерции. В качестве обобщенных координат, задающих положение твердого тела, выберем радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ центра инерции (для описания поступательного движения) и три угла, характеризующих ориентацию осей x', y', z' по отношению к осям x, y, z (для описания вращательного движения). Пусть масса твердого тела равна μ, скорость его центра инерции – $\boldsymbol{V}$, а угловая скорость вращения твердого тела - $\boldsymbol{\Omega}$. Тогда кинетическая энергия твердого тела

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha\Omega_\beta,$$

где $I_{\alpha\beta}$ - *тензор моментов инерции* или просто *тензор инерции* тела. Индексы α, β нумеруют оси декартовой системы координат K'. Тензор инерции тела можно записать в виде:

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sum m(y'^2 + z'^2) & -\sum mx'y' & -\sum mx'z' \\ -\sum my'x' & \sum m(x'^2 + z'^2) & -\sum my'z' \\ -\sum mz'x' & -\sum mz'y' & \sum m(x'^2 + y'^2) \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где суммирование ведется по всем материальным точкам системы. Из представления (5) видно, что тензор инерции является *аддитивной* величиной – моменты инерции тела равны суммам моментов инерции его частей. Если твердое тело можно рассматривать как сплошное, то в (5) сумма заменяется интегралом по объему тела:

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \int \rho(y'^2 + z'^2)dV & -\int \rho x'y'dV & -\int \rho x'z'dV \\ -\int \rho y'x'dV & \int \rho(x'^2 + z'^2)dV & -\int \rho y'z'\,dV \\ -\int \rho z'x'dV & -\int \rho z'y'dV & \int \rho(x'^2 + y'^2)dV \end{pmatrix}, \qquad (5')$$

где ρ - плотность тела. Тензор инерции симметричен, т.е.

$$I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}.$$

Тензор инерции может быть приведен к диагональному виду путем соответствующего выбора направлений осей x', y', z' относительно тела. Эти направления называют *главными осями инерции*, а соответствующие значения компонент тензора – *главными моментами инерции*. Обозначим главные моменты инерции посредством

$$I_{11} = I_{x'x'} \equiv I_1,\ I_{22} = I_{y'y'} \equiv I_2,\ I_{33} = I_{z'z'} \equiv I_3.$$

Тензор инерции при этом будет иметь вид

$$I_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

а кинетическая энергия твердого тела запишется следующим образом:

$$T = \frac{\mu V^2}{2} + \frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2 + I_2\Omega_2^2 + I_3\Omega_3^2\right). \tag{6}$$

Формулы (5) и $(5')$ позволяют найти тензор инерции $I_{\alpha\beta}$, вычисленный относительно системы координат с началом в центре инерции твердого тела. Пусть $I_{\alpha\beta}^A$ – тензор инерции, определенный по отношению к системе координат с началом в точке A. Будем считать, что точка A находится на расстоянии $\boldsymbol{a}$ от центра инерции тела. Связь между тензорами $I_{\alpha\beta}^A$ и $I_{\alpha\beta}$ устанавливается соотношением

$$I_{\alpha\beta}^A = I_{\alpha\beta} + \mu\left(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta\right),$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, \text{при } \alpha = \beta, \\ 0, \text{при } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Как уже отмечалось, для описания вращательного движения твердого тела необходимо задать три угла, которые характеризуют ориентацию осей x', y', z' системы K', жестко связанной с твердым телом, по отношению к осям x, y, z неподвижной системы K. Обычно в качестве трех таких углов используют эйлеровы углы φ, θ, ψ (см. рисунок). Для определения этих углов совместим начало системы K с началом системы K' (это можно сделать, поскольку в данном случае нас не интересует поступательное движение тела). Линия ON – линия пересечения плоскостей $x'y'$ и xy, называется линией узлов. Ее положительное направление выбирается таким образом, чтобы орты осей z, z' и ON образовывали правую тройку векторов. Угол φ образован осью x и линией узлов, угол ψ - линией узлов и осью x', и угол θ есть угол между осями z и z'.

Изменение угла φ соответствует вращению тела вокруг оси z; изменение угла θ соответствует вращению тела вокруг линии узлов ON; и изменение угла ψ соответствует вращению тела вокруг оси z'. Направление каждого из поворотов связано с направлением оси, вокруг которой он осуществляется, правилом правого винта.

Для того, чтобы набор углов Эйлера (φ, θ, ψ), определяющий каждый реальный поворот, был однозначным, принимают, что значения углов φ и ψ могут изменяться в пределах от 0 до 2π, а значение угла θ ограничивают интервалом от 0 до π.

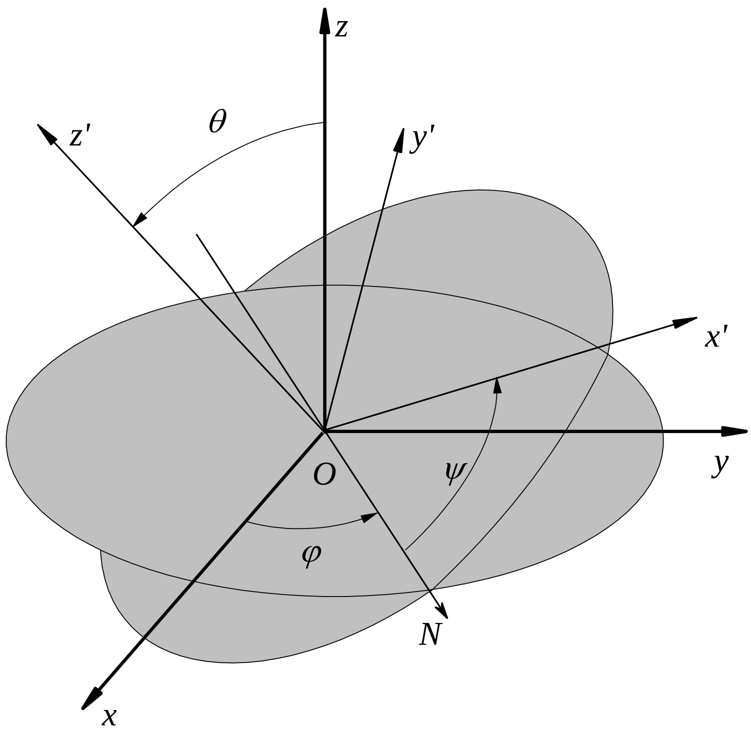

Рис. Углы Эйлера.

Проекции вектора угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ на оси подвижной системы координат (x', y', z') определяются через эйлеровы углы следующими выражениями:

$$\Omega_1 = \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,$$
$$\Omega_2 = \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi,$$
$$\Omega_3 = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}.$$

С помощью этих выражений можно представить кинетическую энергию твердого тела (6) в виде функции от обобщенных координат θ, ψ и обобщенных скоростей $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\boldsymbol{R}}$. Потенциальная энергия твердого тела зависит от обобщенных координат $\boldsymbol{R}, \varphi, \theta, \psi$. Таким образом, функция Лагранжа твердого тела может быть представлена как функция переменных $\boldsymbol{R}, \varphi, \theta, \psi, \dot{\boldsymbol{R}}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$:

$$L\left(\boldsymbol{R}, \varphi, \theta, \psi, \dot{\boldsymbol{R}}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}\right) = T\left(\dot{\boldsymbol{R}}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \theta, \psi\right) - U(\boldsymbol{R}, \varphi, \theta, \psi),$$

т.е. координаты центра инерции и углы Эйлера являются обобщенными координатами при рассмотрении движения твердого тела. Уравнения (1) представляют собой уравнения движения твердого тела.

Уравнения Лагранжа (1) – это система s дифференциальных уравнений второго порядка. Эту систему можно свести к системе $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка. В механике это делается введением *функции Гамильтона*, которая является функцией обобщенных координат и обобщенных импульсов, и определяется выражением

$$H(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, p_2, \dots, p_s, t) \equiv H(q, p, t) = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L, \qquad (7)$$

в котором все обобщенные скорости выражены через обобщенные импульсы и обобщенные координаты с помощью уравнений $p_\alpha = {\partial L}/{\partial \dot{q}_\alpha}$. Сравнивая выражения (7) и (4) можно видеть, что функция Гамильтона представляет собой обобщенную энергию системы.

Уравнениями Гамильтона или *каноническими уравнениями* называется следующая система $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка для $2s$ неизвестных функций $q_\alpha(t), p_\alpha(t)$:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \qquad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2, \dots, s). \qquad (8)$$

Уравнения (8) полностью эквивалентны уравнениям Лагранжа (1). Однако уравнения Гамильтона по сравнению с уравнениями Лагранжа имеют более симметричную форму и являются инвариантными по отношению к *каноническим преобразованиям*.

В связи с тем, что в гамильтоновом методе обобщенные импульсы p_α играют наравне с координатами q_α роль равноправных независимых переменных, уравнения Гамильтона допускают уже $2s$ преобразований от старых переменных (q_α, p_α) к новым (Q_α, P_α):

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t), \;\; P_\alpha = P_\alpha(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t). \qquad (9)$$

Новую функцию Гамильтона обозначим посредством $H'(Q, P, t)$. Преобразования (9) называются *каноническими*, если они сохраняют формальный вид уравнений Гамильтона, т.е. если и в новых переменных (Q, P) выполняются соотношения

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial P_\alpha}, \qquad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2, \dots, s).$$

Далеко не каждое преобразование вида (9) будет являться каноническим. Важный класс канонических преобразований составляют преобразования, которые могут быть реализованы с помощью так называемой *производящей функции* – функции, зависящей от старых и новых переменных и времени.

Если производящая функция F зависит от старых и новых обобщенных координат и времени, т.е.

$$F = F(q, Q, t),$$

то каноническое преобразование, порождаемое этой функцией, имеет вид:

$$p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha}, \qquad P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha}, \qquad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Если производящая функция зависит от старых обобщенных координат и новых обобщенных импульсов, т.е.

$$\Phi = \Phi(q, P, t),$$

то каноническое преобразование задается формулами:

$$p_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha}, \qquad Q_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial P_\alpha}, \qquad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Скобкой Пуассона функций $f(q, p)$ и $g(q, p)$ называют выражение

$$\{f, g\} = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right).$$

Для того, чтобы преобразование было каноническим, новые переменные должны удовлетворять соотношениям:

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \qquad \{P_\alpha, P_\beta\} = 0, \qquad \{P_\alpha, Q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера.

Пусть механическая система с s степенями свободы описывается функцией Лагранжа $L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$ и $q(t) = \{q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t)\}$ есть закон движения данной системы. Тогда величина

$$S(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = \int_{t_0}^{t} L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t) dt,$$

рассматриваемая как функция значений координат q при фиксированных начальных их значениях $q^0 = q(t_0)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0, \qquad (10)$$

где $H\left(q, {}^{\partial S}/_{\partial q}, t\right)$ - функция Гамильтона, в которой обобщенные импульсы выражены через функцию S, посредством соотношений

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha} \qquad (\alpha = 1,2, \dots, s).$$

Уравнение (10) называется уравнением *Гамильтона-Якоби*, а функция $S(q, t)$ - *действием* системы.

Полным интегралом уравнения Гамильтона-Якоби называется решение этого уравнения

$$S = S(q_1, q_2, \dots, q_s, t, C_1, C_2, \dots, C_s) + A,$$

зависящее от s произвольных независимых констант $C_1, C_2, \dots, C_s$, помимо аддитивной постоянной A.

Рассмотрим функцию $S(q,t,C)$ как производящую функцию канонического преобразования, зависящую от старых координат $q_1, q_2, \dots, q_s$ и новых импульсов $C_1, C_2, \dots, C_s$. Каноническое преобразование, порождаемое этой функцией, будет иметь вид:

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}, \qquad Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial C_\alpha}, \qquad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{11}$$

где Q_α играют роль новых координат. Новая функция Гамильтона $H' = 0$, поскольку функция действия S удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби. Учитывая, что $H' = 0$, уравнения Гамильтона для новых переменных C_α и Q_α запишутся следующим образом:

$$\dot{C}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q_\alpha} = 0, \;\; \dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial C_\alpha} = 0.$$

Отсюда следует, что $C_\alpha = const$ и $Q_\alpha = const$. Следовательно, из s соотношений (см. (11))

$$Q_\alpha = \frac{\partial S}{\partial C_\alpha} \tag{12}$$

можно найти координаты системы как функции времени и $2s$ произвольных постоянных C_α и Q_α.

Таким образом, чтобы найти закон движения механической системы методом Гамильтона-Якоби надо:

1) найти функцию Гамильтона системы;

2) с помощью найденной функции Гамильтона записать уравнение Гамильтона-Якоби (10);

3) найти полный интеграл (с точностью до аддитивной константы) этого уравнения $S(q_1, q_2, \dots, q_s, t, C_1, C_2, \dots, C_s)$, содержащий произвольные постоянные $C_1, C_2, \dots, C_s$ в числе, равном числу степеней свободы системы;

4) продифференцировать найденную в пункте 3) функцию $S(q_1, q_2, \dots, q_s, t, C_1, C_2, \dots, C_s)$ по произвольным постоянным C_α и приравнять результаты дифференцирования новым произвольным постоянным Q_α, т.е. записать соотношения (12);

5) из соотношений (12) найти координаты системы как функции времени и $2s$ произвольных постоянных.

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби в ряде случаев удается найти методом *разделения переменных*. Пусть координата q_α и соответствующая ей производная ${\partial S}/{\partial q_\alpha}$ входят в уравнение Гамильтона-Якоби в виде некоторой комбинации

$$f\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right),$$

не содержащей в явном виде других переменных (в неявном виде в функцию S входят все переменные). При этом уравнение Гамильтона-Якоби можно схематично представить, как

$$F\left(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha-1}}, \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha+1}} \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, \frac{\partial S}{\partial t}, f\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right)\right) = 0. \quad (13)$$

Решение данного уравнения будем искать в виде

$$S = S'(q_1, q_2, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, t) + S_\alpha(q_\alpha).$$

Подставляя это решение в уравнение (13), получаем:

$$F\left(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_{\alpha-1}}, \frac{\partial S'}{\partial q_{\alpha+1}} \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_s}, \frac{\partial S'}{\partial t}, f\left(q_\alpha, \frac{dS_\alpha}{dq_\alpha}\right)\right) = 0. (14)$$

В этом уравнении переменная q_α входит только в функцию $f\left(q_\alpha, {dS_\alpha}/{dq_\alpha}\right)$, которая ни явно, ни неявно не содержит переменные $q_1, q_2, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s$. Поэтому при изменении q_α будет меняться только функция f. А поскольку уравнение (14) должно выполняться при любом значении q_α, то функция f может быть равна только некоторой константе, т.е.

$$f\left(q_\alpha, \frac{dS_\alpha}{dq_\alpha}\right) = C_1. \quad (15)$$

При этом уравнение (14) принимает вид:

$$F\left(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_{\alpha-1}}, \frac{\partial S'}{\partial q_{\alpha+1}} \dots, \frac{\partial S'}{\partial q_s}, \frac{\partial S'}{\partial t}, C_1\right) = 0. \quad (16)$$

Уравнение (15) является уже обыкновенным дифференциальным уравнением, которое может быть решено в квадратурах, а уравнение (16) содержит на одну независимую переменную меньше по сравнению с исходным уравнением (13). Если таким способом можно последовательно отделить все s координат и время, то нахождение полного интеграла уравнения Гамильтона-Якоби целиком сводится к квадратурам.

Частным случаем разделения переменных является случай циклической координаты. Циклическая координата не входит в явном виде в функцию Гамильтона и, следовательно, в уравнение Гамильтона-Якоби. В этом случае

$$f\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial S}{\partial q_\alpha},$$

и уравнение (15) запишется в виде

$$\frac{dS_\alpha}{dq_\alpha} = C_1.$$

Отсюда $S_\alpha = C_1 q_\alpha$ и функция

$$S = S'(q_1, q_2, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, t) + C_1 q_\alpha.$$

Если функция Гамильтона не зависит явно от времени, то в роли "циклической координаты" выступает переменная t. При этом зависимость действия от времени сводится к слагаемому $-C_1 t$ (выбор знака "-" обусловлен тем, что константа C_1 в этом случае является обобщенной энергией системы).

Используемые обозначения

В приведенных ниже задачах, если специально не оговорено иное, использованы следующие обозначения:

L – функция Лагранжа;

H – функция Гамильтона;

U – потенциальная энергия;

$U_{эфф}$ – “эффективная” потенциальная энергия;

F – сила;

v – скорость;

t – время;

ω – частота;

m – масса;

g – ускорение свободного падения;

c – скорость света;

$\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор частицы;

q_α – обобщенные координаты ($\alpha = 1, 2, \dots, s$, где s – число степеней свободы системы);

(x, y, z) – прямоугольные декартовы координаты; (ρ, φ, z) – цилиндрические координаты; (r, θ, φ) – сферические координаты.

p_α – обобщенные импульсы ($\alpha = 1, 2, \dots, s$, где s –число степеней свободы системы);

(p_x, p_y, p_z) – обобщенные импульсы по прямоугольным декартовым координатам x, y, z соответственно; (p_ρ, p_φ, p_z) – обобщенные импульсы по цилиндрическим координатам ρ, φ, z соответсвенно, $(p_r, p_\theta, p_\varphi)$ – обобщенные импульсы по сферическим координатам r, θ, φ соответственно*.

Точки над переменной обозначают производные по времени, векторные величины выделены **полужирным** шрифтом.

* Одинаковые обозначения φ и p_φ в сферической и цилиндрической системах координат, а также z и p_z в прямоугольной декартовой и цилиндрической системах координат не должно приводить к недоразумениям, поскольку из контекста задачи будет ясно, какая система используется.

§ 1. Обобщенные координаты

1.1. Обобщенными координатами называются:

1) любые независимые величины, однозначно определяющие положение механической системы
2) любые независимые величины, однозначно определяющие положение центра масс механической системы
3) любые независимые величины в количестве N для системы из N материальных точек
4) любые независимые величины в количестве $3N$ для системы из N материальных точек

1.2. Для однозначного определения положения материальной точки в пространстве необходимо задать следующее количество независимых координат:

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

1.3. Для однозначного описания положения в пространстве механической системы, состоящей из N свободных материальных точек необходимо задать следующее количество независимых координат:

1) N
2) $2N$
3) $3N$
4) $4N$

1.4. Под связями, наложенными на механическую систему, понимается следующее:

1) ограничения, накладываемые на ускорения точек механической системы, которые должны выполняться при любом ее движении
2) ограничения, накладываемые на скорости точек механической системы, которые должны выполняться при любом ее движении
3) ограничения, накладываемые на взаимное расположение точек механической системы
4) любые условия, ограничивающие свободу перемещения точек механической системы

1.5. Связь, наложенную на механическую систему, можно в общем случае математически описать в виде:

1) уравнений или неравенств, в которые входят только координаты всех или части точек системы
2) уравнений или неравенств, в которые входят координаты всех или части точек системы и время
3) уравнений или неравенств, в которые входят скорости всех или части точек системы и время
4) уравнений или неравенств, в которые входят координаты и скорости всех или части точек системы и время

1.6. Голономной называется такая связь, аналитическое выражение которой представляется в общем случае в виде:

1) $f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N) = 0$, где $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N$ – радиус-векторы точек системы
2) $f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0$, где $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N$ – радиус-векторы точек системы
3) $f(\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \dots, \dot{\boldsymbol{r}}_N, t) = 0$, где $\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \dots, \dot{\boldsymbol{r}}_N$ – скорости точек системы
4) $f(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \dots, \dot{\boldsymbol{r}}_N, t) = 0$, где $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \dots, \boldsymbol{r}_N$ – радиус-векторы точек системы, а $\dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \dots, \dot{\boldsymbol{r}}_N$ – их скорости

1.7. Примером голономной связи является:

1) $\ddot{z} + at^2\dot{x} = 0$, где $a = const$
2) $x^2 + y^2 = R^2$, где $R = const$
3) $(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) = 0$, где x_1, y_1 и x_2, y_2 – прямоугольные декартовы координаты точек системы
4) все вышеперечисленные

1.8. Какие переменные могут входить в уравнение голономной связи для некоторой системы материальных точек:

1) только обобщенные координаты
2) только обобщенные координаты и обобщенные скорости
3) только обобщенные координаты и время
4) обобщенные координаты, обобщенные скорости и время

1.9. Уравнение голономной связи для материальной точки, движущейся по гладкой поверхности сферы радиуса R, в сферических координатах можно записать следующим образом:

1) $r = R$
2) $r = R^2$
3) $r = 1 - R$
4) $r = \frac{1}{1-R}$

1.10. Уравнение голономной связи для материальной точки, движущейся по гладкой поверхности сферы радиуса R, в прямоугольных декартовых координатах можно записать следующим образом:
1) $\frac{xy}{z} = R$
2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
3) $x^2 + y^2 = R^2$
4) $x + y + z = R$

1.11.* Уравнение голономной связи для материальной точки, движущейся по гладкой поверхности сферы радиуса R, в цилиндрических координатах можно записать следующим образом:
1) $\rho z = R^2$
2) $\rho^2 - z^2 = R^2$
3) $\rho^2 + z^2 = R^2$
4) $\rho = R$

1.12. Уравнение голономной связи для материальной точки, движущейся по гладкой поверхности цилиндра радиуса R, в цилиндрических координатах можно записать следующим образом:
1) $\rho = R$
2) $\rho = Rcos\varphi$
3) $\rho = Rsin\varphi$
4) $\rho = 0$

1.13.* Уравнение голономной связи для материальной точки, движущейся по гладкой поверхности цилиндра радиуса R, в прямоугольных декартовых координатах можно записать следующим образом:
1) $\frac{x}{y} = \frac{R}{z}$
2) $x + y = R$
3) $x^2 + y^2 = R^2$
4) $z = 0$

1.14.* Уравнение голономной связи для материальной точки, движущейся по гладкой поверхности цилиндра радиуса R, в сферических координатах можно записать следующим образом:

1) $r = R$
2) $rsin\theta = Rcos\varphi$
3) $rsin\theta = R$
4) $rcos\theta = 0$

1.15.* Уравнение голономной связи для материальной точки, движущейся по гладкой поверхности кругового конуса с углом раствора 2α (рис. 1.1), в сферических координатах можно записать следующим образом:

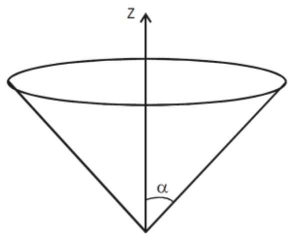

Рис. 1.1

1) $\theta = 2\alpha$
2) $\theta = \frac{\alpha}{2}$
3) $\theta = \alpha$
4) $\theta = \pi - 2\alpha$

1.16.* Уравнение голономной связи для материальной точки, движущейся по гладкой поверхности кругового конуса с углом раствора 2α (см. рис. 1.1), в цилиндрических координатах можно записать следующим образом:

1) $tg\alpha = \frac{z}{\rho}$
2) $\rho^2 + z^2 = R^2$
3) $\rho + z = R$
4) $tg\alpha = \frac{\rho}{z}$

1.17.* Уравнение голономной связи для материальной точки, движущейся по гладкой поверхности кругового конуса с углом раствора 2α (см. рис. 1.1), в прямоугольных декартовых координатах можно записать следующим образом:

1) $ztg\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$
2) $zcos\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$
3) $zctg\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$
4) $zsin\alpha = \sqrt{x^2 + y^2}$

1.18. Числом степеней свободы системы с голономными связями называется:

1) число возможных направлений движения системы
2) число обобщенных координат системы
3) число входящих в систему материальных точек
4) число декартовых координат, необходимых для однозначного определения положения механической системы

1.19. Для системы N материальных точек в пространстве, на которую наложено n голономных связей, число степеней свободы s равно:

1) $s = 3n - N$
2) $s = N - 3n$
3) $s = 3N - n$
4) $s = 3(N - n)$

1.20. Число степеней свободы твердого тела равно:

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6

1.21. Число степеней свободы тонкого стержня равно:

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6

1.22. Число степеней свободы материальной точки, движущейся по параболе, равно:

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

1.23. Число степеней свободы двухатомной молекулы равно:

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6

1.24. Число степеней свободы N - атомной молекулы равно:

1) N
2) $2N$
3) $3N$
4) ∞

1.25. Число степеней свободы жидкости равно:

1) 3
2) 4
3) 5
4) ∞

1.26.* Число степеней свободы системы, изображенной на рисунке 1.2 (сплошной цилиндр катится без проскальзывания внутри полого цилиндра), равно:

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

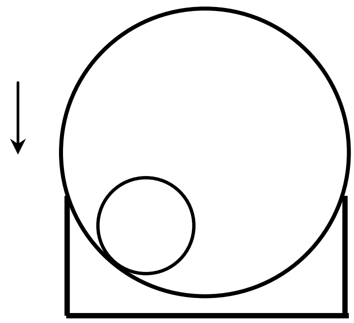

Рис. 1.2

1.27.* Число степеней свободы двух грузов, подвешенных на пружинах, которые между собой также соединены пружиной (рис. 1.3), равно (движение грузов происходит в плоскости):

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

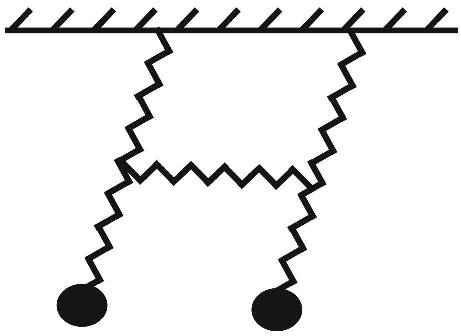

Рис. 1.3

1.28. Число степеней свободы куба, способного свободно перемещаться по гладкой горизонтальной поверхности, равно:

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

1.29. Число степеней свободы шара, способного свободно перекатываться без проскальзывания по горизонтальной поверхности, равно:
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

1.30. Число степеней свободы твердого тела, подвешенного шарнирно к точке опоры, равно:
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

1.31. Число степеней свободы двойного плоского математического маятника (рис. 1.4) равно:
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

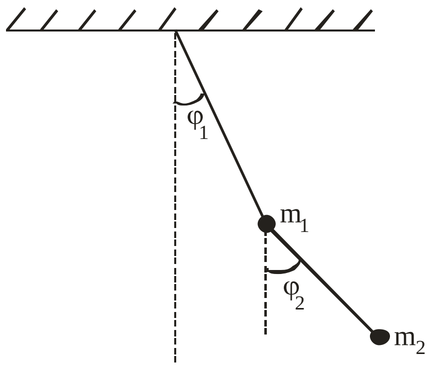

Рис. 1.4

1.32. Число степеней свободы плоского математического маятника, длина подвеса которого изменяется по закону $l(t)$, равно:
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

1.33.* Материальная точка может двигаться по жесткой спице колеса под действием пружины, закрепленной на ободе (рис. 1.5). Колесо может вращаться в своей плоскости вокруг неподвижного центра. Число степеней свободы такой системы равно:

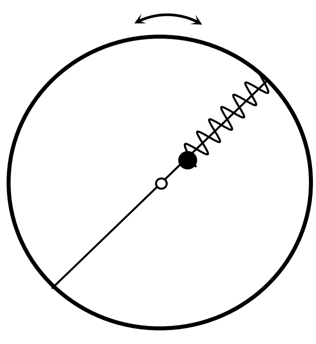

Рис. 1.5

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

1.34. Связь декартовых и полярных координат выражается следующим образом:
1) $x = rsin\varphi, y = rcos\varphi$
2) $x = rcos\varphi, y = rsin\varphi$
3) $x = \frac{r}{sin\varphi}, y = \frac{r}{cos\varphi}$
4) $x = \frac{r}{cos\varphi}, y = \frac{r}{sin\varphi}$

1.35. Связь декартовых и цилиндрических координат выражается следующим образом:
1) $x = \rho cos\varphi, y = \rho sin\varphi, z = z$
2) $x = \rho sin\varphi, y = \rho cos\varphi, z = z$
3) $x = \rho cos\varphi, y = y, z = \rho sin\varphi$
4) $x = \rho sin\varphi, y = y, z = z$

1.36. Связь декартовых и сферических координат выражается следующим образом:
1) $x = rsin\varphi, y = rsin\theta, z = rcos\varphi$
2) $x = rsin\theta, y = rsin\varphi, z = rcos\theta$
3) $x = rsin\varphi cos\theta, y = rsin\theta sin\varphi, z = rsin\theta$
4) $x = rsin\theta cos\varphi, y = rsin\theta sin\varphi, z = rcos\theta$

1.37. Полярный радиус r и полярный угол φ изменяются в полярной системе координат в общем случае в следующих пределах:
1) $0 < r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$
2) $0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$
3) $-\infty < r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$
4) $0 \leq r < +\infty, 0 < \varphi < 2\pi$

1.38. Переменные ρ, φ, z цилиндрической системы координат изменяются в общем случае в следующих пределах:
1) $0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty$
2) $0 < \rho < +\infty, 0 < \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty$
3) $0 < \rho < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq z < +\infty$

4) $0 \le \rho < +\infty, 0 < \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty$

1.39. Переменные r, θ, φ сферической системы координат изменяются в общем случае в следующих пределах:

1) $0 \le r < +\infty, 0 \le \theta < \pi, 0 \le \varphi < 2\pi$
2) $-\infty < r < +\infty, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \varphi < 2\pi$
3) $0 < r < +\infty, 0 \le \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi$
4) $0 \le r < +\infty, 0 \le \theta < 2\pi, 0 \le \varphi < 2\pi$

1.40. Квадрат скорости материальной точки в декартовых координатах выражается следующим образом:

1) $v^2 = \dot{x} + \dot{y} + \dot{z}$
2) $v^2 = x^2 + y^2 + z^2$
3) $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$
4) $v^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2$

1.41. Квадрат скорости материальной точки в полярных координатах выражается следующим образом:

1) $v^2 = \dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2$
2) $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$
3) $v^2 = \dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$
4) $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$

1.42. Квадрат скорости материальной точки в цилиндрических координатах выражается следующим образом:

1) $v^2 = \dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$
2) $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$
3) $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2$
4) $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 + \dot{z}^2$

1.43. Квадрат скорости материальной точки в сферических координатах выражается следующим образом:

1) $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$
2) $v^2 = \dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2$
3) $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2$
4) $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2$

1.44. Радиус-вектор материальной точки в декартовых координатах выражается следующим образом ($\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z$ – орты прямоугольной декартовой системы координат):

1) $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x$
2) $\boldsymbol{r} = y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$
3) $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + z\boldsymbol{e}_z$
4) $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$

1.45. Радиус-вектор материальной точки в полярных координатах выражается следующим образом ($\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi$ – орты полярной системы координат):

1) $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$
2) $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r + \varphi\boldsymbol{e}_\varphi$
3) $\boldsymbol{r} = \varphi\boldsymbol{e}_r + r\boldsymbol{e}_\varphi$
4) $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_\varphi$

1.46. Радиус-вектор материальной точки в цилиндрических координатах выражается следующим образом ($\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат):

1) $\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho$
2) $\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + z\boldsymbol{e}_z$
3) $\boldsymbol{r} = \varphi\boldsymbol{e}_\varphi + z\boldsymbol{e}_z$
4) $\boldsymbol{r} = \rho\boldsymbol{e}_\rho + \varphi\boldsymbol{e}_\varphi + z\boldsymbol{e}_z$

1.47. Радиус-вектор материальной точки в сферических координатах выражается следующим образом ($\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ – орты сферической системы координат):

1) $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$
2) $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r + \varphi\boldsymbol{e}_\varphi$
3) $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r + \theta\boldsymbol{e}_\theta$
4) $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r + \varphi\boldsymbol{e}_\varphi + \theta\boldsymbol{e}_\theta$

1.48. Проекция скорости $\boldsymbol{v}_r$ в полярной системе координат равна:

1) $\boldsymbol{v}_r = \varphi\dot{r}$
2) $\boldsymbol{v}_r = \dot{r}$
3) $\boldsymbol{v}_r = r\dot{\varphi}$
4) $\boldsymbol{v}_r = \dot{\varphi}$

1.49. Проекция скорости $\boldsymbol{v}_\varphi$ в полярной системе координат равна:

1) $\boldsymbol{v}_\varphi = \varphi\dot{r}$
2) $\boldsymbol{v}_\varphi = \dot{r}$
3) $\boldsymbol{v}_\varphi = r\dot{\varphi}$
4) $\boldsymbol{v}_\varphi = \dot{\varphi}\dot{r}$

1.50. Проекция скорости $\boldsymbol{v}_\rho$ в цилиндрической системе координат равна:

1) $\boldsymbol{v}_\rho = \rho$
2) $\boldsymbol{v}_\rho = \dot{\rho}$
3) $\boldsymbol{v}_\rho = \rho\dot{\varphi}$
4) $\boldsymbol{v}_\rho = \rho\dot{\rho}$

1.51. Проекция скорости $\boldsymbol{v}_\varphi$ в цилиндрической системе координат равна:

1) $\boldsymbol{v}_\varphi = \varphi$
2) $\boldsymbol{v}_\varphi = \dot{\varphi}$
3) $\boldsymbol{v}_\varphi = \rho\dot{\varphi}$
4) $\boldsymbol{v}_\varphi = \dot{\rho}\dot{\varphi}$

1.52. Проекция скорости $\boldsymbol{v}_z$ в цилиндрической системе координат равна:

1) $\boldsymbol{v}_z = z$
2) $\boldsymbol{v}_z = \dot{z}$
3) $\boldsymbol{v}_\varphi = \rho\dot{z}$
4) $\boldsymbol{v}_\varphi = \dot{\rho}\dot{z}$

1.53. Проекция скорости $\boldsymbol{v}_r$ в сферической системе координат равна:

1) $\boldsymbol{v}_r = \dot{r}$
2) $\boldsymbol{v}_r = \dot{r} sin\theta$
3) $\boldsymbol{v}_r = \dot{r}\dot{\theta}$
4) $\boldsymbol{v}_r = \dot{r}\dot{\varphi}$

1.54. Проекция скорости $\boldsymbol{v}_\theta$ в сферической системе координат равна:

1) $\boldsymbol{v}_\theta = \dot{\theta}$
2) $\boldsymbol{v}_\theta = \dot{r} sin\theta$
3) $\boldsymbol{v}_\theta = r\dot{\theta}$
4) $\boldsymbol{v}_\theta = \dot{r}\dot{\theta}$

1.55. Проекция скорости $\boldsymbol{v}_{\varphi}$ в сферической системе координат равна:

1) $\boldsymbol{v}_{\varphi} = \dot{\varphi}$
2) $\boldsymbol{v}_{\varphi} = sin\theta\dot{\varphi}$
3) $\boldsymbol{v}_{\varphi} = rsin\theta\dot{\varphi}$
4) $\boldsymbol{v}_{\varphi} = \dot{r}sin\theta\dot{\varphi}$

§ 2. Уравнения Лагранжа в независимых координатах

2.1. Материальная точка движется в потенциальном поле с потенциальной энергией U. На точку наложены идеальные голономные связи. Кинетическая энергия точки равна T. Функция Лагранжа точки:

1) $L = T + U$
2) $L = T - U$
3) $L = T/U$
4) $L = \frac{T+U}{T-U}$

2.2. Функция Лагранжа L имеет размерность:

1) мощности
2) силы
3) энергии
4) является безразмерной величиной

2.3. Свойство ковариантности уравнений Лагранжа относительно замены переменных заключается в том, что:

1) вид уравнений Лагранжа изменяется при переходе к новым обобщенным координатам
2) вид уравнений Лагранжа может как изменяться, так и не изменяться при переходе к новым обобщенным координатам
3) в уравнения Лагранжа не входят реакции связей
4) вид уравнений Лагранжа не изменяется при переходе к новым обобщенным координатам

2.4. На механическую систему, находящуюся в потенциальном поле наложены идеальные голономные связи. Уравнение Лагранжа системы по обобщенной координате q есть (L – функция Лагранжа системы):

1) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$
2) $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q} = 0$
3) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial q} = 0$
4) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

2.5. Механическая система с идеальными голономными связями имеет три степени свободы. В общем случае необходимое число уравнений Лагранжа для описания движения системы равно:
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

2.6. Механическая система состоит из двух материальных точек, связанных невесомым нерастяжимым стержнем. Какое количество уравнений Лагранжа необходимо для описания движения системы?
1) 2
2) 3
3) 4
4) 5

2.7. Какое количество уравнений Лагранжа необходимо для описания движения математического маятника?
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

2.8. Длина математического маятника изменяется по закону $l = at$, где $a = const$. Какое количество уравнений Лагранжа необходимо для описания движения математического маятника?
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

2.9. Точка подвеса математического маятника движется в горизонтальном направлении по закону $x = at$, где $a = const$. Какое количество уравнений Лагранжа необходимо для описания движения математического маятника?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

2.10. Какое количество уравнений Лагранжа необходимо для описания движения двойного математического маятника (рис. 1.4)?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

2.11. Какое количество уравнений Лагранжа необходимо для описания движения двух математических маятников, связанных друг с другом горизонтальной пружиной?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

2.12. Какое количество уравнений Лагранжа необходимо для описания движения сферического маятника (материальной точки, закрепленной на невесомом нерастяжимом стержне, способном совершать движения в пространстве)?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

2.13. Какое количество уравнений Лагранжа необходимо для описания движения двух материальных точек по поверхности конуса?

1) 1
2) 2
3) 3

4) 4

2.14. Какое количество уравнений Лагранжа необходимо для описания движения по плоскости двух материальных точек, связанных друг с другом невесомым нерастяжимым стержнем?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

2.15. Точка подвеса математического маятника равномерно движется в вертикальной плоскости по окружности. Какое количество уравнений Лагранжа необходимо для описания движения системы?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

2.16. Функция Лагранжа L свободной частицы с массой m в прямоугольных декартовых координатах имеет вид:

1) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$
2) $L = \frac{m}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$
3) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$
4) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2$

2.17. Функция Лагранжа L свободной частицы с массой m в цилиндрической системе координат имеет вид:

1) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 + \rho^2\dot{z}^2)$
2) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + z^2)$
3) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$
4) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$

2.18. Функция Лагранжа L свободной частицы с массой m в сферической системе координат имеет вид:

1) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)$

2) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right)$
3) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$
4) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$

2.19. Частица с массой m движется вдоль оси z в однородном поле тяжести. Функция Лагранжа частицы имеет вид:
1) $L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mg\dot{z}$
2) $L = \frac{m\dot{z}^2}{2} + mg\dot{z}$
3) $L = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz$
4) $L = \frac{m\dot{z}^2}{2}$

2.20.* Частицы с массами m_1 и m_2 движутся вдоль оси z в однородном поле тяжести. Гравитационным взаимодействием между частицами можно пренебречь. Функция Лагранжа системы имеет вид (z_1 – координата частицы массы m_1, z_2 – координата частицы массы m_2):
1) $L = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} - \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2} - m_1gz_1 - m_2gz_2$
2) $L = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2} - m_1gz_1$
3) $L = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2} - m_2gz_2$
4) $L = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2} - m_1gz_1 - m_2gz_2$

2.21.* Частицы с массами m_1 и m_2, связанные пружиной жесткости k, движутся в плоскости xy. Гравитационным взаимодействием между частицами можно пренебречь. Функция Лагранжа системы может быть представлена в виде (x_1, y_1 – координаты частицы массы m_1, x_2, y_2 – координаты частицы массы m_2):
1) $L = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_1\dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_2\dot{y}_2^2}{2} - \frac{k}{2}((x_1 + y_1)^2 - (x_2 + y_2)^2)$
2) $L = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_1\dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_2\dot{y}_2^2}{2} - \frac{k}{2}((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)$
3) $L = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_1\dot{y}_1^2}{2} - \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} - \frac{m_2\dot{y}_2^2}{2} - \frac{k}{2}((x_1 + y_1)^2 - (x_2 + y_2)^2)$
4) $L = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_1\dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_2\dot{y}_2^2}{2} - k\big((x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\big)$

2.22. Частица с массой m движется вдоль оси x под действием упругой силы $F = -kx, k = const$. Функция Лагранжа частицы имеет вид:

1) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$

2) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$

3) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + kx$

4) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - kx$

2.23. Функция Лагранжа математического маятника может быть представлена в виде (обозначения приведены на рис. 2.1):

1) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi$

2) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}}{2} + mgl\cos\varphi$

3) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mg$

4) $L = \frac{m\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi$

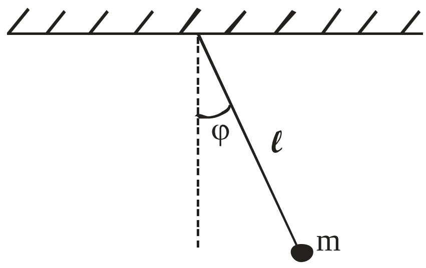

Рис. 2.1

2.24.* Функция Лагранжа сферического маятника (материальной точки, закрепленной на невесомом нерастяжимом стержне длиной R, способном совершать движения в пространстве) может быть представлена в сферических координатах в виде:

1) $L = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 - \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + mgR\cos\theta$

2) $L = \frac{mR^2\dot{\theta}^2}{2} + mgR\cos\theta$

3) $L = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + mgR\cos\theta$

4) $L = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + mgR$

2.25.* Функция Лагранжа частицы с массой m, движущейся по гладкой поверхности конуса с углом раствора 2α, может быть представлена в сферических координатах в виде:

1) $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2)$

2) $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 - r^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2)$

3) $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2)$

4) $L = \frac{m}{2}(\dot{r} + r\sin^2\alpha\,\dot{\varphi})$

2.26.* Функция Лагранжа частицы с массой m, движущейся по гладкой поверхности конуса с углом раствора 2α в однородном поле тяжести, может быть представлена в сферических координатах в виде:

1) $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha\, \dot{\varphi}^2) - mgr\cos\alpha$
2) $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 - r^2 \sin^2 \alpha\, \dot{\varphi}^2) - mgr\cos\alpha$
3) $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2) - mgr\cos\alpha$
4) $L = \frac{m}{2}(\dot{r} + r \sin^2 \alpha\, \dot{\varphi}) - mgr\cos\alpha$

2.27.* Функция Лагранжа частицы с массой m, движущейся по гладкой поверхности кругового цилиндра радиуса R, может быть представлена в цилиндрических координатах в виде:

1) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{z}^2)$
2) $L = \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$
3) $L = \frac{m\dot{\varphi}^2}{2}$
4) $L = \frac{mR^2\dot{z}^2}{2}$

2.28.* Функция Лагранжа частицы с массой m, движущейся по гладкой поверхности кругового цилиндра радиуса R в однородном поле тяжести, может быть представлена в цилиндрических координатах в виде:

1) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{z}^2) + mgz$
2) $L = \frac{m}{2}(\dot{\varphi}^2 - R^2\dot{z}^2) + mgz$
3) $L = \frac{m\dot{\varphi}^2}{2} + mgz$
4) $L = \frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

2.29.* Две материальные точки массами m_1 и m_2 соединены легкой нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок. Если направить ось y вертикально, то функция Лагранжа такой системы может быть записана следующим образом:

1) $L = \frac{\dot{y}^2}{2}(m_1 + m_2) + y(m_1 - m_2)g$
2) $L = \frac{\dot{y}^2}{2}(m_1 - m_2) + y(m_1 - m_2)g$
3) $L = \frac{\dot{y}^2}{2}(m_1 + m_2) + y(m_1 + m_2)g$

4) $L = \frac{\dot{y}^2}{2}(m_1 - m_2) + y(m_1 + m_2)g$

2.30.* Точка подвеса плоского математического маятника движется вертикально вниз с ускорением a. Функция Лагранжа такого маятника может быть выражена следующим образом (обозначения приведены на рис. 2.1):

1) $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + m(g + a)lcos\varphi$

2) $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - m(g + a)lcos\varphi$

3) $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + m(g - a)lcos\varphi$

4) $L = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mglcos\varphi$

2.31.** Функция Лагранжа материальной точки массой m способной двигаться без трения по прямой и прикрепленной к пружине (жесткость k, длина в нерастянутом состоянии l_0), другой конец которой закреплен в точке A на расстоянии l от прямой (рис. 2.2) может быть выражена в виде:

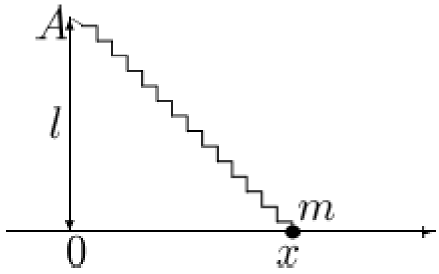

Рис. 2.2

1) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{2}(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0)^2$

2) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}(\sqrt{l^2 + x^2} + l_0)^2$

3) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{2}(\sqrt{l^2 + x^2} + l_0)^2$

4) $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}(\sqrt{l^2 + x^2} - l_0)^2$

2.32.* Уравнение Лагранжа для математического маятника имеет вид (обозначения приведены на рис. 2.1):

1) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\cos\varphi = 0$

2) $\ddot{\varphi} - \frac{g}{l}\cos\varphi = 0$

3) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$

4) $\ddot{\varphi} - \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$

2.33. Уравнение Лагранжа для свободной частицы в прямоугольной декартовой системе координат по обобщенной координате z имеет вид:

1) $\dot{z} = 0$

2) $\ddot{z} = 0$
3) $\dot{z}^2 = 0$
4) $\ddot{z} - \dot{z} = 0$

2.34.* Уравнение Лагранжа для свободной частицы в цилиндрической системе координат по обобщенной координате z имеет вид:
1) $\ddot{z} = 0$
2) $\rho^2\ddot{z} = 0$
3) $\rho^2\ddot{z} + 2\rho\dot{\rho}\dot{z} = 0$
4) $\ddot{z} - \dot{z} = 0$

2.35.* Уравнение Лагранжа для свободной частицы в цилиндрической системе координат по обобщенной координате ρ имеет вид:
1) $\ddot{\rho} = 0$
2) $\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = 0$
3) $\ddot{\rho} + \rho\dot{\varphi}^2 = 0$
4) $\ddot{\varphi} - \rho\dot{\rho}^2 = 0$

2.36.* Уравнение Лагранжа для свободной частицы в цилиндрической системе координат по обобщенной координате φ имеет вид:
1) $\ddot{\varphi} = 0$
2) $\rho\ddot{\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi} = 0$
3) $\ddot{\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi} = 0$
4) $\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = 0$

2.37.* Уравнение Лагранжа для свободной частицы в сферической системе координат по обобщенной координате r имеет вид:
1) $\ddot{r} + 2r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 - 2r\dot{\theta}^2 = 0$
2) $\ddot{r} = 0$
3) $\ddot{r} - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2 = 0$
4) $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$

2.38.* Уравнение Лагранжа для свободной частицы в сферической системе координат по обобщенной координате θ имеет вид:
1) $r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0$
2) $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0$
3) $r\ddot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 = 0$

4) $\ddot{\theta} = 0$

2.39.* Уравнение Лагранжа для свободной частицы в сферической системе координат по обобщенной координате φ имеет вид:

1) $r\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\,\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta} = 0$
2) $r\sin\theta\,\ddot{\varphi} + \sin\theta\,\dot{r}\dot{\varphi} + r\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta} = 0$
3) $\ddot{\varphi} = 0$
4) $r\sin\theta\,\dot{\varphi} + 2\sin\theta\,\dot{r}\ddot{\varphi} - r\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta} = 0$

2.40. Уравнение Лагранжа для частицы с массой m, движущейся вдоль оси x под действием упругой силы $F = -kx, k = const$, имеет вид:

1) $m\ddot{x} + kx = 0$
2) $m\ddot{x} - kx = 0$
3) $\ddot{x} = 0$
4) $\frac{k}{m}\ddot{x} + x = 0$

2.41.* Частицы с массами m_1 и m_2 движутся вдоль оси z в однородном поле тяжести. Гравитационным взаимодействием между частицами можно пренебречь. Уравнения Лагранжа системы имеют вид (z_1 – координата частицы массы m_1, z_2 – координата частицы массы m_2):

1) $m_1\dot{z}_1 + m_1 g = 0, m_2\dot{z}_2 + m_2 g = 0$
2) $m_1 z_1 + m_1 g = 0, m_2 z_2 + m_2 g = 0$
3) $m_1\ddot{z}_1 + m_1 g = 0, m_2\ddot{z}_2 + m_2 g = 0$
4) $m_1\ddot{z}_1 = 0, m_2\ddot{z}_2 = 0$

2.42.* Частицы с массами m_1 и m_2, связанные пружиной жесткости k, движутся в плоскости xy. Гравитационным взаимодействием между частицами можно пренебречь. Уравнения Лагранжа системы записываются в виде (x_1, y_1 – координаты частицы массы m_1, x_2, y_2 – координаты частицы массы m_2):

1) $m_1\ddot{x}_1 + kx_1 = 0, m_2\ddot{x}_2 + kx_2 = 0$
   $m_1\ddot{y}_1 + ky_1 = 0, m_2\ddot{y}_2 + ky_2 = 0$
2) $m_1\ddot{x}_1 - k(y_1 - x_2) = 0, m_2\ddot{x}_2 - k(y_2 - x_1) = 0$
   $m_1\ddot{y}_1 - k(x_1 - y_2) = 0, m_2\ddot{y}_2 - k(x_2 - y_1) = 0$
3) $m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = 0, m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$
   $m_1\ddot{y}_1 + k(y_1 - y_2) = 0, m_2\ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) = 0$
4) $m_1\ddot{x}_1 = 0, m_2\ddot{x}_2 = 0$

$$m_1\ddot{y}_1 = 0, m_2\ddot{y}_2 = 0$$

2.43.** На механическую систему из N материальных точек наложены голономные идеальные связи, а действующие внешние силы являются потенциальными. Радиус-векторы $\boldsymbol{r}_i$ материальных точек системы не зависят явно от времени. Функция Лагранжа системы имеет вид ($U(q_1, q_2, \dots, q_s)$ – потенциальная энергия системы):

1) $L = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - U(q_1, q_2, \dots, q_s)$

2) $L = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta + U(q_1, q_2, \dots, q_s)$

3) $L = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta - U(q_1, q_2, \dots, q_s)$

4) $L = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{N} m_i \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\alpha}, \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_\beta}\right) q_\alpha q_\beta - U(q_1, q_2, \dots, q_s)$

2.44.* Функция Лагранжа частицы с массой m есть:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

Уравнения Лагранжа для частицы имеют вид:

1) $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0, r^2\ddot{\varphi} = 0$
2) $\ddot{r} = 0, r^2\ddot{\varphi} = 0$
3) $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0, r^2\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi} = 0$
4) $\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = 0, r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = 0$

2.45.Функция Лагранжа частицы с массой m есть:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \alpha xy, \qquad \alpha = const$$

Уравнения Лагранжа для частицы имеют вид:

1) $m\ddot{x} - \alpha y = 0, m\ddot{y} - \alpha x = 0$
2) $m\ddot{x} = 0, m\ddot{y} = 0$
3) $m\ddot{x} + \alpha y = 0, m\ddot{y} + \alpha x = 0$
4) $m\ddot{x} + \alpha x = 0, m\ddot{y} + \alpha y = 0$

2.46.Функция Лагранжа частицы с массой m есть:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \alpha xy, \qquad \alpha = const$$

Уравнения Лагранжа для частицы имеют вид:

1) $m\ddot{x} = 0, m\ddot{y} = 0, m\ddot{z} = 0$
2) $m\ddot{x} + \alpha y = 0, m\ddot{y} + \alpha x = 0, m\ddot{z} = 0$
3) $m\ddot{x} + \alpha y = 0, m\ddot{y} + \alpha x = 0, m\ddot{z} + \alpha xy = 0$
4) $m\ddot{x} + \alpha x = 0, m\ddot{y} + \alpha y = 0, \ m\ddot{z} = 0$

2.47.* Функция Лагранжа частицы с массой m есть:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \alpha r^2\varphi, \qquad \alpha = const$$

Уравнения Лагранжа для частицы имеют вид:

1) $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + 2\alpha r\varphi = 0, m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) + \alpha r = 0$
2) $m(\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2) + 2\alpha\varphi = 0, m(r^2\ddot{\varphi} - 2r\dot{r}\dot{\varphi}) + \alpha r = 0$
3) $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \alpha r = 0, m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) + \alpha\varphi = 0$
4) $m(\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2) + \alpha r = 0, m(r^2\ddot{\varphi} + 2r\dot{r}\dot{\varphi}) + \alpha r^2\varphi = 0$

2.48.* Функция Лагранжа частицы с массой m есть:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \alpha r\varphi, \qquad \alpha = const$$

Уравнения Лагранжа для частицы имеют вид:

1) $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) - \alpha\varphi = 0, m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) - \alpha = 0$
2) $m(\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2) - \alpha\varphi = 0, m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) + \alpha r = 0$
3) $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \alpha\varphi = 0, m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) + \alpha = 0$
4) $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \alpha\varphi = 0, m(r\ddot{\varphi} - \dot{r}\dot{\varphi}) + \alpha r\varphi = 0$

2.49.* Функция Лагранжа частицы с массой m есть:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \alpha r, \qquad \alpha = const$$

Уравнения Лагранжа для частицы имеют вид:

1) $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = 0, m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0$
2) $m(\ddot{r} + r\dot{\varphi}^2) - \alpha = 0, mr\ddot{\varphi} + \alpha = 0$
3) $m\ddot{r} + \alpha = 0, m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) + \alpha = 0$
4) $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) + \alpha = 0, m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0$

2.50.* Функция Лагранжа частицы есть:

$$L = \frac{\alpha}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + \beta\cos\theta, \qquad \alpha, \beta = const$$

Уравнение Лагранжа для частицы по координате θ имеет вид:

1) $\alpha\ddot{\theta}+\beta\sin\theta=0$
2) $\alpha\left(\ddot{\theta}-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\dot{\varphi}^2\right)+\beta\sin\theta=0$
3) $\alpha\left(\ddot{\theta}-\frac{1}{2}\sin(2\theta)\dot{\varphi}^2\right)=0$
4) $\alpha\left(\ddot{\theta}-\sin\theta\,\dot{\varphi}^2\right)+\beta\sin\theta=0$

2.51.* Функция Лагранжа частицы есть:

$$L=\frac{\alpha}{2}\left(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)+\beta\cos\theta\,,\qquad \alpha,\beta=const$$

Уравнение Лагранжа для частицы по координате φ имеет вид:

1) $\alpha\left(\sin^2\theta\,\ddot{\varphi}+\sin(2\theta)\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right)+\beta\cos\theta=0$
2) $\alpha\left(\sin^2\theta\,\ddot{\varphi}+\sin(2\theta)\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right)+\beta\sin\theta=0$
3) $\alpha\left(\sin^2\theta\,\ddot{\varphi}+\sin(2\theta)\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right)=0$
4) $\alpha\left(\ddot{\varphi}+\sin(2\theta)\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right)=0$

2.52.* Функция Лагранжа частицы с массой m есть:

$$L=\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}-\alpha\boldsymbol{r}^2,\qquad \alpha=const$$

Уравнение Лагранжа для частицы имеет вид:

1) $m\ddot{\boldsymbol{r}}-\alpha\boldsymbol{r}=0$
2) $m\ddot{\boldsymbol{r}}+2\alpha\boldsymbol{r}=0$
3) $m\ddot{\boldsymbol{r}}=0$
4) $m\ddot{\boldsymbol{r}}-\alpha\boldsymbol{r}^2=0$

2.53.* Функция Лагранжа релятивистской частицы с массой покоя m_0 в декартовых координатах есть:

$$L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}{c^2}}$$

Какой вид функция Лагранжа будет иметь в цилиндрических координатах?

1) $L=-m_0c^2\sqrt{1-(\dot{\rho}^2+\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)/c^2}$
2) $L=-m_0c^2\sqrt{1-(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)/c^2}$
3) $L=-m_0c^2\sqrt{1-(\dot{\rho}^2+\dot{z}^2)/c^2}$
4) $L=-m_0c^2\sqrt{(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)/c^2}$

2.54.* Функция Лагранжа релятивистской частицы с массой покоя m_0 в декартовых координатах есть:

$$L = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{c^2}}$$

Какой вид функция Лагранжа будет иметь в сферических координатах?

1) $L = -m_0c^2\sqrt{1 - \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)/c^2}$

2) $L = -m_0c^2\sqrt{1 - \left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)/c^2}$

3) $L = -m_0c^2\sqrt{1 - \left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)/c^2}$

4) $L = -m_0c^2\sqrt{\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)/c^2}$

2.55.* Функция Лагранжа релятивистской частицы с массой покоя m_0 в поле тяготения в декартовых координатах есть:

$$L = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{c^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \alpha = const$$

Какой вид функция Лагранжа будет иметь в цилиндрических координатах?

1) $L = -m_0c^2\sqrt{1 - (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)/c^2} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{\rho^2 + \varphi^2 + z^2}}$

2) $L = -m_0c^2\sqrt{1 - (\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2)/c^2} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$

3) $L = -m_0c^2\sqrt{1 - (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)/c^2} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$

4) $L = -m_0c^2\sqrt{(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)/c^2} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$

2.56.* Функция Лагранжа релятивистской частицы с массой покоя m_0 в поле тяготения в декартовых координатах есть:

$$L = -m_0c^2\sqrt{1 - \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{c^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \alpha = const$$

Какой вид функция Лагранжа будет иметь в сферических координатах?

1) $L = -m_0c^2\sqrt{1-\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)/c^2} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{r^2+\theta^2+\varphi^2}}$

2) $L = -m_0c^2\sqrt{1-\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)/c^2} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{r^2+\theta^2}}$

3) $L = -m_0c^2\sqrt{1-\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)/c^2} + \dfrac{\alpha}{\sqrt{\theta^2+\varphi^2}}$

4) $L = -m_0c^2\sqrt{1-\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)/c^2} + \dfrac{\alpha}{r}$

2.57. Уравнения Лагранжа не изменяются, если вместо функции $L(q,\dot{q},t)$, где под q понимается совокупность обобщенных координат, а под $\dot{q}$ – обобщенных скоростей механической системы, взять функцию:

1) $L_1(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{df(q,t)}{dt}$
2) $L_1(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial f(q,t)}{\partial q}$
3) $L_1(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + f(q,t)$
4) $L_1(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{\partial^2 f(q,t)}{\partial q\partial t}$

здесь $f(q,t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция координат и времени.

2.58.* Функция Лагранжа частицы с массой m:

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mat,\ \ l,a = const$$

Какая из приведенных ниже функций Лагранжа эквивалентна данной функции (приводит к тому же самому уравнению Лагранжа)?

1) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mat\dot{\varphi}$
2) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2}$
3) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mat\varphi$
4) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mat\varphi\dot{\varphi}$

2.59.* Функция Лагранжа частицы с массой m:

$$L = \frac{m}{2}\left(a^2\dot{\varphi}^2 + 2abt\cos\varphi\,\dot{\varphi}\right),\ \ a,b = const$$

Какая из приведенных ниже функций Лагранжа эквивалентна данной функции (приводит к тому же самому уравнению Лагранжа)?

1) $L=\frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2-2ab\sin\varphi\,\dot{\varphi})$
2) $L=\frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2-2ab\sin\varphi)$
3) $L=\frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2+2abt\sin\varphi)$
4) $L=\frac{m}{2}(a\dot{\varphi}-2ab\sin\varphi)$

2.60.* Функция Лагранжа частицы с массой m есть:

$$L=\frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2+a^2t^2+2abt\cos\varphi\,\dot{\varphi}),\quad a,b=const$$

Какая из приведенных ниже функций Лагранжа эквивалентна данной функции (приводит к тому же самому уравнению Лагранжа)?

1) $L=\frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2+a^2t^2-2ab\sin\varphi\,\dot{\varphi})$
2) $L=\frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2+a^2t^2-2ab\sin\varphi\,t^2)$
3) $L=\frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2+2ab\cos\varphi\,\dot{\varphi})$
4) $L=\frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2-2ab\sin\varphi)$

2.61.* Функция Лагранжа частицы с массой m есть:

$$L=\frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2+2ab\cos\varphi\,\dot{\varphi})+mag\cos\varphi\,,\quad a,b=const$$

Какая из приведенных ниже функций Лагранжа эквивалентна данной функции (приводит к тому же самому уравнению Лагранжа)?

1) $L=\frac{m}{2}(a^2\dot{\varphi}^2+2ab\cos\varphi\,\dot{\varphi})$
2) $L=\frac{m}{2}a^2\dot{\varphi}^2$
3) $L=\frac{m}{2}a^2\dot{\varphi}^2+mag\cos\varphi$
4) $L=\frac{m}{2}a^2\dot{\varphi}^2-mag\cos\varphi$

2.62.* Функция Лагранжа частицы есть:

$$L=\frac{a\dot{\varphi}^2}{2}+bsin\omega t\sin\varphi\,\dot{\varphi}+c\omega^2\sin^2\omega t+d\cos\varphi\,,\quad a,b,c,d,\omega=const$$

Какая из приведенных ниже функций Лагранжа эквивалентна данной функции (приводит к тому же самому уравнению Лагранжа)?

1) $L=\frac{a\dot{\varphi}^2}{2}+bsin\omega t\sin\varphi+d\cos\varphi$
2) $L=\frac{a\dot{\varphi}^2}{2}+bsin\omega t\sin\varphi\,\dot{\varphi}$
3) $L=\frac{a\dot{\varphi}^2}{2}-b\omega cos\omega t\cos\varphi\,\dot{\varphi}+d\cos\varphi$

4) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} + b\omega cos\omega t \cos\varphi + d\cos\varphi$

2.63.* Функция Лагранжа частицы есть:

$$L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} + bsin\omega t\varphi\dot{\varphi} + c\omega^2\sin^2\omega t + d\cos\varphi\,, \quad a, b, c, d, \omega = const$$

Какая из приведенных ниже функций Лагранжа эквивалентна данной функции (приводит к тому же самому уравнению Лагранжа)?

1) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{b\omega}{2}\varphi^2\cos\omega t + d\cos\varphi$

2) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{b\omega}{2}\varphi^2\cos\omega t + d\sin\varphi$

3) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{b\omega}{2}\sin\varphi\cos\omega t + d\cos\varphi$

4) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{b\omega}{2}\sin\varphi + c\omega^2\sin^2\omega t + d\cos\varphi$

2.64.* Функция Лагранжа частицы есть:

$$L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} - bcos\omega t\, sin\,\varphi\,\dot{\varphi} + c\omega^2 + d\cos\varphi\,, \quad a, b, c, d, \omega = const$$

Какая из приведенных ниже функций Лагранжа эквивалентна данной функции (приводит к тому же самому уравнению Лагранжа)?

1) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} + b\omega\,\varphi^2 sin\,\omega t + d\cos\varphi$

2) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} + b\omega\, sin\,\omega t\, cos\,\varphi + d\cos\varphi$

3) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} + b\omega\, sin\,\omega t\, cos\,\varphi + c\omega^2$

4) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} + b\omega\, sin\,\omega t\, sin\,\varphi + c\omega^2 + d\cos\varphi$

2.65.* Функция Лагранжа частицы есть:

$$L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} - bcos\omega t\varphi\dot{\varphi} + c\sin^2\omega t + d\cos\varphi\,, \quad a, b, c, d, \omega = const$$

Какая из приведенных ниже функций Лагранжа эквивалентна данной функции (приводит к тому же самому уравнению Лагранжа)?

1) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{b\omega}{2}\varphi^2 sin\,\omega t + d\cos\varphi$

2) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{b\omega}{2}\varphi^2\cos\omega t + d\sin\varphi$

3) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{b\omega}{2}\sin\varphi\cos\omega t + d\cos\varphi$

4) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{b\omega}{2}\sin\varphi + c\sin^2\omega t + d\cos\varphi$

2.66.* Функция Лагранжа частицы есть:

$$L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} - bsin\omega t\, cos\,\varphi\,\dot{\varphi} + c\omega^2 + d\cos\varphi\,, \quad a, b, c, d, \omega = const$$

Какая из приведенных ниже функций Лагранжа эквивалентна данной функции (приводит к тому же самому уравнению Лагранжа)?

1) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} + b\omega\,\varphi^2 \cos\omega t + d\cos\varphi$
2) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} + b\omega\cos\omega t\, sin\,\varphi + d\cos\varphi$
3) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} + b\omega\cos\omega t\, sin\,\varphi + c\omega^2$
4) $L = \frac{a\dot{\varphi}^2}{2} + b\omega\cos\omega t\, cos\,\varphi + c\omega^2 + d\cos\varphi$

2.67.* Функция Лагранжа частицы:

$$L = \alpha\frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \beta|\boldsymbol{r}|,$$

где $\alpha, \beta = const.$ Уравнение Лагранжа, описывающее движение частицы имеет вид:

1) $\alpha\ddot{\boldsymbol{r}} = 0$
2) $\alpha\ddot{\boldsymbol{r}} + \beta\boldsymbol{r} = 0$
3) $\alpha\ddot{\boldsymbol{r}} - \beta\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = 0$
4) $\alpha\ddot{\boldsymbol{r}} - \beta|\dot{\boldsymbol{r}}| = 0$

2.68.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = t\left(a + \frac{b}{2}\dot{x}^2\right), \quad a, b = const$$

Уравнение Лагранжа для данной системы есть:

1) $\ddot{x} = 0$
2) $\frac{tb}{a+\frac{b}{2}\dot{x}^2}\ddot{x} + \dot{x} = 0$
3) $t\ddot{x} + \dot{x} = 0$
4) $b\ddot{x} + a\dot{x} = 0$

2.69.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = t\sqrt{a + b\dot{x}^2}, \quad a, b = const$$

Уравнение Лагранжа для данной системы есть:

1) $\frac{at}{a+b\dot{x}^2}\ddot{x} + \dot{x} = 0$
2) $\frac{tb}{\sqrt{a+b\dot{x}^2}}\ddot{x} = 0$

3) $\frac{tb}{\sqrt{a+b\dot{x}^2}}\ddot{x}+\frac{b}{\sqrt{a+b\dot{x}^2}}\dot{x}=0$

4) $t\ddot{x}+\dot{x}+\frac{bt\dot{x}}{\sqrt{a+b\dot{x}^2}}=0$

2.70.* Функция Лагранжа частицы есть:

$$L=\frac{a\dot{\varphi}^2}{2}-b sin\omega t\, cos\,\varphi\,\dot{\varphi}+c\omega^2+d\cos\varphi\,,\quad a,b,c,d,\omega=const$$

Уравнение Лагранжа для частицы имеет вид:

1) $a\ddot{\varphi}+(b\omega\cos\omega t-d)\sin\varphi=0$

2) $a\ddot{\varphi}+d\sin\varphi=0$

3) $a\ddot{\varphi}-b\omega\cos\omega t\sin\varphi-d\sin\varphi=0$

4) $a\ddot{\varphi}-b\omega\cos\omega t\cos\varphi+d\sin\varphi=0$

2.71.* Уравнение Лагранжа для математического маятника массы m и длины l, точка подвеса которого колеблется по вертикали по закону $a\,sin\,\omega t\;(a,\omega=const)$, имеет вид ($\varphi$ – угол отклонения маятника от вертикали, рис. 2.1):

1) $\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\left(1+\frac{\omega^2 a}{g}sin\,\omega t\right)sin\varphi=0$

2) $\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0$

3) $\ddot{\varphi}+\frac{\omega^2 a}{g}sin\,\omega t\,sin\varphi=0$

4) $\ddot{\varphi}+\frac{\omega^2 a}{g}sin\,\omega t\,\dot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0$

§ 3. Уравнения Лагранжа при наличии диссипативных и электромагнитных сил

3.1. На частицу массы m, находящуюся в поле с потенциальной энергией $U(\boldsymbol{r})$, действует сила сопротивления $\boldsymbol{F}=-k\dot{\boldsymbol{r}}$ (k – коэффициент пропорциональности). Функцию Лагранжа частицы можно представить в виде:

1) $L=e^{\frac{k}{m}t}\left(\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}+U(\boldsymbol{r})\right)$

2) $L=e^{-\frac{k}{m}t}\left(\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}+U(\boldsymbol{r})\right)$

3) $L=e^{\frac{k}{m}t}\left(\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}-U(\boldsymbol{r})\right)$

4) $L=e^{-\frac{k}{m}t}\left(\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2}-U(\boldsymbol{r})\right)$

3.2. Укажите функцию Лагранжа для грузика массы m, прикрепленного к пружине жесткостью k, на который действует сила сопротивления $\boldsymbol{F}$, пропорциональная его скорости $F = -\alpha\dot{x}$, ($\alpha = const$, x – смещение грузика от положения равновесия):

1) $L = e^{-\frac{\alpha}{m}t}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right)$

2) $L = e^{-\frac{\alpha}{m}t}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right)$

3) $L = e^{\frac{\alpha}{m}t}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right)$

4) $L = e^{\frac{\alpha}{m}t}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\right)$

3.3. Укажите функцию Лагранжа для плоского математического маятника (масса m, длина подвеса l), движущегося в вязкой среде (сила сопротивления $F = -\alpha\dot{\varphi}$, $\alpha = const$), где φ – угол отклонения маятника от вертикали, в поле силы тяжести (рис. 2.1):

1) $L = e^{\frac{\alpha}{ml}t}\left(\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi\right)$

2) $L = e^{\frac{\alpha l^2}{m}t}\left(\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi\right)$

3) $L = e^{-\frac{\alpha}{ml}t}\left(\frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi\right)$

4) $L = e^{-\frac{\alpha}{m}t}\left(\frac{m\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi\right)$

3.4. Укажите функцию Лагранжа для точки массы m, движущейся по вертикали в поле силы тяжести при учете сопротивления воздуха в вязкой среде (сила сопротивления $F = -\alpha\dot{z}$, $\alpha = const$), где z – высота над Землей:

1) $L = e^{\frac{\alpha}{m}t}\left(\frac{m\dot{z}^2}{2} + mgz\right)$

2) $L = e^{-\frac{\alpha}{m}t}\left(\frac{m\dot{z}^2}{2} + mgz\right)$

3) $L = e^{-\frac{\alpha}{m}t}\left(\frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz\right)$

4) $L = e^{\frac{\alpha}{m}t}\left(\frac{m\dot{z}^2}{2} - mgz\right)$

3.5.* Уравнение движения материальной точки массы m имеет вид:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \beta\dot{\boldsymbol{r}} + \omega^2\boldsymbol{r} = 0\ (\beta, \omega = const).$$

Функция Лагранжа такой частицы может быть представлена в виде:

1) $L = e^{-\beta t}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} + m\omega^2\boldsymbol{r}\right)$
2) $L = e^{\beta t}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{m\omega^2\boldsymbol{r}^2}{2}\right)$
3) $L = e^{\beta t}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} - m\omega^2\boldsymbol{r}\right)$
4) $L = e^{-\beta t}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{m\omega^2\boldsymbol{r}^2}{2}\right)$

3.6.* Функция Лагранжа системы имеет вид ($\beta, m = const$):

$$L = e^{\beta t}\left(\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(\boldsymbol{r})\right)$$

Уравнение Лагранжа для такой системы:
1) $m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\beta m\dot{\boldsymbol{r}} - \mathrm{grad}\, U(\boldsymbol{r})$
2) $m\ddot{\boldsymbol{r}} = (-\beta\dot{\boldsymbol{r}} + \mathrm{grad}\, U(\boldsymbol{r}))\, e^{\beta t}$
3) $m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\beta\dot{\boldsymbol{r}} + \mathrm{grad}\, U(\boldsymbol{r})$
4) $m\ddot{\boldsymbol{r}} = (-\beta\dot{\boldsymbol{r}} - \mathrm{grad}\, U(\boldsymbol{r}))\, e^{-\beta t}$

3.7.* На материальную точку массы m, движущуюся в вязкой среде (сила сопротивления $\boldsymbol{F}_r = -\beta\dot{\boldsymbol{r}}$, $\beta = const$) действует сила $\boldsymbol{F} = -\alpha\boldsymbol{r}$ ($\alpha = const$). Укажите функцию Лагранжа, соответствующую этой системе:
1) $L = e^{-\frac{\beta}{m}t}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} + \alpha\boldsymbol{r}\right)$
2) $L = e^{\frac{\beta}{m}t}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\alpha\boldsymbol{r}^2}{2}\right)$
3) $L = e^{\beta t}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} - \alpha\boldsymbol{r}\right)$
4) $L = e^{-\frac{\beta}{m}t}\left(\frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{\alpha\boldsymbol{r}^2}{2}\right)$

3.8.** Функция Лагранжа имеет вид ($\beta, m, \omega = const$):

$$L = e^{\beta t}\frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$$

Произведя преобразование:

$$x = e^{-\frac{\beta}{2}t} s$$

запишите функцию Лагранжа для переменной s:
1) $L = \frac{m}{2}(\dot{s}^2 - \omega^2 s^2)$
2) $L = e^{\frac{\beta}{2m}t}\frac{m}{2}(\dot{s}^2 - \omega^2 s^2)$
3) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{s}^2 - \left(\omega^2 - \frac{\beta^2}{4}\right)s^2\right)$

4) $L = e^{-\frac{\beta}{2m}t}(\dot{s}^2 + \omega^2 s^2)$

3.9.** Функция Лагранжа имеет вид ($\beta, m, \omega = const$):

$$L = e^{\beta t}\frac{m}{2}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$$

Произведя преобразование:

$$x = e^{-\frac{\beta}{2}t}s$$

запишите уравнение Лагранжа для переменной s:

1) $\dot{s}^2 - \omega^2 s^2 = 0$
2) $\ddot{s} + \left(\omega^2 - \frac{\beta^2}{4}\right)s = 0$
3) $\ddot{s} + \beta\dot{s} + \left(\omega^2 - \frac{\beta^2}{4}\right)s = 0$
4) $\ddot{s} + \beta\dot{s} + \omega^2 e^{-\frac{\beta}{2}t}s = 0$

3.10.* Для частицы с массой m и зарядом q, которая находится в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом Q, укажите функцию Лагранжа в декартовых координатах (начало отсчета системы координат совмещено с зарядом Q):

1) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{qQ}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
2) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{qQ}{x^2 + y^2 + z^2}$
3) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qQ}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
4) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{3}{2}\frac{qQ}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

3.11.* Для частицы с массой m и зарядом q, которая находится в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом Q, укажите верное уравнение Лагранжа в декартовых координатах по координате x (начало отсчета системы координат совмещено с зарядом Q):

1) $m(\ddot{x} + \ddot{y} + \ddot{z}) + \frac{qQ(x+y+z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 0$
2) $m\ddot{x} - \frac{qQx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 0$
3) $m\ddot{x} - \frac{qQ}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0$
4) $m\dot{x} - \frac{qQ}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$

3.12.* Для частицы с массой m и зарядом q, которая находится в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом Q, укажите функцию Лагранжа в цилиндрических координатах (начало отсчета системы координат совмещено с зарядом Q):

1) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{qQ}{\rho^2+z^2}$

2) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{qQ}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$

3) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{3}{2}\frac{qQ}{(\rho^2+\rho^2\varphi^2+z^2)^{3/2}}$

4) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qQ}{\sqrt{\rho^2+\varphi^2+z^2}}$

3.13.* Для частицы с массой m и зарядом q, которая находится в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом Q, укажите верное уравнение Лагранжа для координаты ρ цилиндрической системы координат (начало отсчета системы координат совмещено с зарядом Q):

1) $m\ddot{\rho} - \frac{qQ}{\rho^2+z^2} = 0$

2) $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) - \frac{qQ\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = 0$

3) $m\ddot{\rho} - \frac{3}{2}\frac{qQ}{(\rho^2+\rho^2\varphi^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$

4) $m(\ddot{\rho} + \ddot{\varphi} + \ddot{z}) + \frac{qQ}{\sqrt{\rho^2+\varphi^2+z^2}} = 0$

3.14.* Для частицы с массой m и зарядом q, которая находится в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом Q, укажите верное уравнение Лагранжа для координаты z цилиндрической системы координат (начало отсчета системы координат совмещено с зарядом Q):

1) $m\ddot{z} - \frac{qQ}{\rho^2+z^2} = 0$

2) $m\ddot{z} - \frac{3}{2}\frac{qQ}{(\rho^2+\rho^2\varphi^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$

3) $m\ddot{z} - \frac{qQz}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = 0$

4) $m(\ddot{\rho} + \ddot{\varphi} + \ddot{z}) + \frac{qQ}{\sqrt{\rho^2+\varphi^2+z^2}} = 0$

3.15.* В сферических координатах функция Лагранжа частицы с массой m и зарядом q, находящейся в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом Q, имеет вид (начало отсчета системы координат совмещено с зарядом Q):

1) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right) - \frac{qQ}{r^2+\theta^2+z^2}$

2) $L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2\right)-\frac{qQ}{\sqrt{r^2+r^2\theta^2+r^2\sin^2\theta\varphi^2}}$

3) $L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)-\frac{qQ}{r}$

4) $L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)+\frac{qQ}{r}$

3.16.* В сферических координатах уравнение Лагранжа по координате r для частицы с массой m и зарядом q, находящейся в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом Q, есть (начало отсчета системы координат совмещено с зарядом Q):

1) $m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)-\frac{qQ}{r^2}=0$

2) $m\ddot{r}-\frac{qQ}{r^2}=0$

3) $m\left(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)-\frac{qQ}{r}=0$

4) $m\left(\dot{r}^2-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)-\frac{qQ}{r}=0$

3.17.* В сферических координатах уравнение Лагранжа по координате θ для частицы с массой m и зарядом q, находящейся в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом Q, есть (начало отсчета системы координат совмещено с зарядом Q):

1) $r^2\ddot{\theta}-\frac{qQ}{r^2}$

2) $mr^2\ddot{\theta}-mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2-\frac{qQ}{r}=0$

3) $\ddot{\theta}+2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta}=0$

4) $\ddot{\theta}+2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta}-\frac{sin2\theta}{2}\dot{\varphi}^2=0$

3.18.* В сферических координатах уравнение Лагранжа по координате φ для частицы с массой m и зарядом q, находящейся в электрическом поле, создаваемом точечным зарядом Q, есть (начало отсчета системы координат совмещено с зарядом Q):

1) $r^2\sin^2\theta\,\ddot{\varphi}-\frac{qQ}{r^2}=0$

2) $mr^2\ddot{\varphi}-mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2-\frac{qQ}{r}=0$

3) $2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\varphi}+2\mathrm{ctg}\theta\dot{\varphi}\dot{\theta}+\ \ddot{\varphi}=0$

4) $\ddot{\varphi}+2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\varphi}-\sin 2\theta\dot{\varphi}^2=0$

3.19.** Потенциальная энергия взаимодействия точечного заряда q с электрическим диполем, обладающим дипольным моментом $\boldsymbol{d}$, имеет вид:

1) $q\frac{[\boldsymbol{dr}]}{r^3}$
2) $\frac{q\boldsymbol{d}}{r}$
3) $q\frac{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})}{r^3}$
4) $-q\frac{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})}{r^3}$

3.20.** Укажите вид функции Лагранжа в декартовых координатах для частицы массы m и заряда q в поле электрического диполя, обладающего дипольным моментом $\boldsymbol{d} = (d_x, d_y, d_z)$:

1) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + d_x x + d_y y + d_z z$
2) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{d_x x + d_y y + d_z z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
3) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{d_x x + d_y y + d_z z}{x^2+y^2+z^2}$
4) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{d_x x + d_y y + d_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

3.21.** Укажите верное уравнение Лагранжа по декартовой координате x, для частицы массы m и заряда q в поле электрического диполя, обладающего дипольным моментом $\boldsymbol{d} = (d_x, d_y, d_z)$:

1) $m\ddot{x} - q\frac{d_x x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0$
2) $m\ddot{x} - q\frac{2\,d_x x^2 - 3d_x(y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$
3) $m\ddot{x} - q\frac{d_x x + d_y y + d_z z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 0$
4) $m\ddot{x} + q\frac{d_x(y^2+z^2) - 2\,d_x x^2 - 3x(d_y y + d_z z)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0$

3.22.** Как выглядит функция Лагранжа для частицы с массой m и зарядом q, находящейся в поле электрического диполя с дипольным моментом $\boldsymbol{d}$, в цилиндрических координатах (ось z цилиндрической системы координат сонаправлена с вектором дипольного момента)?

1) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{zqd}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$
2) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{zqd}{(\rho^2+\varphi^2+z^2)^{3/2}}$

3) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{zqd}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$

4) $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\rho qd}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$

3.23.** Укажите верный вид уравнения Лагранжа для координаты z в цилиндрической системе координат для частицы с массой m и зарядом q, находящейся в поле электрического диполя с дипольным моментом $\boldsymbol{d}$ (ось z цилиндрической системы координат сонаправлена с вектором дипольного момента):

1) $m\ddot{z} - \frac{zdq}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = 0$

2) $m(\ddot{\rho} + \ddot{z}) - \frac{3}{2}\frac{qd}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}$

3) $m\ddot{z} + \frac{(2z^2-\rho^2)dq}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} = 0$

4) $m\ddot{z} - \frac{(2z^2-\rho^2)qd}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} = 0$

3.24.** Укажите верный вид уравнения Лагранжа по координате ρ в цилиндрической системе координат для частицы с массой m и зарядом q, находящейся в поле электрического диполя с дипольным моментом $\boldsymbol{d}$ (ось z цилиндрической системы координат сонаправлена с вектором дипольного момента):

1) $m\ddot{\rho} - \frac{qdz\rho}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} = 0$

2) $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) - \frac{5}{2}\frac{d}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}$

3) $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) + \frac{(z^2-\rho^2)d}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} = 0$

4) $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) - \frac{3qd\rho z}{(\rho^2+z^2)^{5/2}} = 0$

3.25.** Как выглядит функция Лагранжа для частицы с массой m и зарядом q, находящейся в поле электрического диполя с дипольным моментом $\boldsymbol{d}$, в сферических координатах (полярная ось сферической системы координат направлена вдоль вектора $\boldsymbol{d}$)?

1) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{qd\cos\theta}{r^2}$

2) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{qd}{r^2}$

3) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{qd\cos\theta}{r^3}$

4) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{q}{r}$

3.26.** Укажите верный вид уравнения Лагранжа по координате r в сферической системе координат для частицы с массой m и зарядом q, находящейся в поле электрического диполя с дипольным моментом $\boldsymbol{d}$ (полярная ось сферической системы координат направлена вдоль вектора $\boldsymbol{d}$):

1) $m\left(\ddot{r} - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2\right) - \frac{2qd}{r^3} = 0$
2) $m\left(\ddot{r} - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2\right) - \frac{2qd\cos\theta}{r^3} = 0$
3) $m\ddot{r} - \frac{2qd\cos\theta}{r^3} = 0$
4) $m\left(\ddot{r} - r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2 - r\dot{\theta}^2\right) - \frac{2qd}{r} = 0$

3.27.** Укажите верный вид уравнения Лагранжа по координате θ в сферической системе координат для частицы с массой m и зарядом q, находящейся в поле электрического диполя с дипольным моментом $\boldsymbol{d}$ (полярная ось сферической системы координат направлена вдоль вектора $\boldsymbol{d}$):

1) $m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{qd}{r^3}\sin\theta = 0$
2) $m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{qd}{r^2}\sin\theta = 0$
3) $m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{qd}{r^3}\cos\theta = 0$
4) $m\ddot{\theta} - \frac{qd}{r^3}\sin\theta = 0$

3.28.** Уравнение Лагранжа для частицы с зарядом q и массой m, находящейся в поле электрического диполя с дипольным моментом $\boldsymbol{d}$, может быть представлено в виде:

1) $m\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{q\boldsymbol{d}}{r^3} = 0$
2) $m\ddot{\boldsymbol{r}} - \frac{2q\boldsymbol{d}}{r^3} = 0$
3) $m\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{q\boldsymbol{d}}{r^3} - \frac{3q(\boldsymbol{d},\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} = 0$
4) $m\ddot{\boldsymbol{r}} - \frac{3q\boldsymbol{d}}{r^3} = 0$

3.29. Как связаны между собой напряжённость магнитного поля $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ и векторный потенциал $\boldsymbol{A}$?

1) $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$
2) $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{r}\operatorname{div}\boldsymbol{A}$

3) $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$, где c – скорость света

4) $\boldsymbol{\mathcal{H}} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$

3.30. Как связаны между собой напряжённость электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, скалярный потенциал ϕ и векторный потенциал $\boldsymbol{A}$?

1) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$

2) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathrm{grad}\,\phi$

3) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$

4) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\mathrm{grad}\,\phi$

3.31.* Векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ имеет вид $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 \cos\Omega t$, $\boldsymbol{A}_0 = \mathrm{const}$. Чему равны векторы напряженности электрического и магнитного полей?

1) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{A}_0 \sin\Omega t\,; \boldsymbol{\mathcal{H}} = 0$

2) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{A}_0 \sin\Omega t\,; \boldsymbol{\mathcal{H}} = -\frac{\Omega}{c}\boldsymbol{A}_0 \cos\Omega t$

3) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \frac{\Omega}{\mathrm{c}}\boldsymbol{A}_0 \sin\Omega t\,; \boldsymbol{\mathcal{H}} = 0$

4) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = 0$; $\boldsymbol{\mathcal{H}} = -\Omega c \boldsymbol{A}_0 \sin\Omega t$

3.32.* Укажите верный вид векторного потенциала для однородного магнитного поля, направленного вдоль оси z, $\boldsymbol{\mathcal{H}} = (0,0,\mathcal{H})$:

1) $\boldsymbol{A} = (0, x\mathcal{H}, 0)$

2) $\boldsymbol{A} = (-y\mathcal{H}, 0,0)$

3) $\boldsymbol{A} = (-\frac{1}{2}y\mathcal{H}, \frac{1}{2}x\mathcal{H}, 0)$

4) все три варианта верны

3.33. Векторный потенциал однородного магнитного поля напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ можно представить в виде:

1) $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{r}]$

2) $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\mathcal{H}^2 \boldsymbol{r}$

3) $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}r^2 \boldsymbol{\mathcal{H}}$

4) все три варианта верны

3.34. Укажите функцию Лагранжа для частицы с зарядом q, находящейся в электромагнитном поле, характеризуемом скалярным потенциалом ϕ и векторным потенциалом $\boldsymbol{A}$:

1) $L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) + q\phi$

2) $L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) - q\phi$

3) $L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) - q\phi$

4) $L = \frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2 - \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) + q\phi$

3.35. Укажите верное выражение для полной производной векторного потенциала $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ по времени:

1) $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z}\dot{z}$

2) $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$

3) $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x}\dot{x}$

4) $\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t \partial z}$

3.36.* Уравнение Лагранжа для частицы с зарядом q, находящейся в электромагнитном поле, характеризуемом скалярным потенциалом ϕ и векторным потенциалом $\boldsymbol{A}$, представимо в виде:

1) $m\ddot{\boldsymbol{r}} + q \operatorname{grad} \phi + \frac{q}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0$

2) $m\ddot{\boldsymbol{r}} + q \operatorname{grad} \phi - \frac{q}{c}[\dot{\boldsymbol{r}}, \operatorname{rot} \boldsymbol{A}] = 0$

3) $m\ddot{\boldsymbol{r}} + \frac{q}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \frac{q}{c}[\dot{\boldsymbol{r}}, \operatorname{rot} \boldsymbol{A}] = 0$

4) $m\ddot{\boldsymbol{r}} + q \operatorname{grad} \phi + \frac{q}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \frac{q}{c}[\dot{\boldsymbol{r}}, \operatorname{rot} \boldsymbol{A}] = 0$

3.37.* Векторный потенциал имеет вид: $\boldsymbol{A} = (A_0 \cos(\omega t - kz), 0,0)$, $\omega, k = \text{const}$. Укажите величину вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$:

1) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \left(\frac{A_0\omega}{\text{c}} cos(\omega t - kz), 0,0\right)$, где c – скорость света

2) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \left(\frac{A_0}{c} \sin(\omega t - kz), 0,0\right)$, где c – скорость света

3) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = \left(\frac{A_0\omega}{c} \sin(\omega t - kz), 0,0\right)$, где c – скорость света

4) $\boldsymbol{\mathcal{E}} = (0,0,0)$

3.38.* Векторный потенциал имеет вид: $\boldsymbol{A} = (A_0 \cos(\omega t - kz), 0,0)$. Вектор напряженности магнитного поля $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ равен:

1) $\boldsymbol{\mathcal{H}} = (A_0 \sin(\omega t - kz), 0, 0)$

2) $\boldsymbol{\mathcal{H}} = (0, kA_0 \sin(\omega t - kz), 0)$
3) $\boldsymbol{\mathcal{H}} = (A_0 \cos(\omega t - kz), 0{,}0)$
4) $\boldsymbol{\mathcal{H}} = (kA_0 \sin(\omega t - kz), kA_0 \sin(\omega t - kz), 0)$

3.39.* Укажите векторный потенциал для однородного магнитного поля $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленного вдоль оси z, в цилиндрической системе координат:
1) $A_\rho = \mathcal{H}\rho, A_z = 0, A_\varphi = 0$
2) $A_\rho = 0, A_z = 0, A_\varphi = \frac{1}{2}\mathcal{H}\rho$
3) $A_\rho = 0, A_z = \frac{1}{2}\mathcal{H}\rho, A_\varphi = 0$
4) все три варианта верны

3.40.* Укажите функцию Лагранжа для частицы с зарядом q и массой m в однородном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленном вдоль оси z, в цилиндрической системе координат:
1) $L = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right) - \frac{q}{2c}\mathcal{H}\rho^2\,\dot\varphi^2$
2) $L = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right) + \frac{q}{2c}\mathcal{H}\rho^2\,\dot\varphi$
3) $L = \frac{m}{2}\left(\rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right) - \frac{q}{2c}\mathcal{H}\rho^2\,\dot\varphi$
4) $L = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\right) - \frac{q}{c}\mathcal{H}(\rho^2\,\dot\varphi + 2\rho\dot\rho\varphi)$

3.41.* Укажите верный вид уравнения Лагранжа для переменной ρ в цилиндрических координатах для частицы с зарядом q и массой m в однородном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленном вдоль оси z:
1) $m\ddot\rho - m\rho\dot\varphi^2 = 0$
2) $m\ddot\rho - \frac{q}{c}\mathcal{H}\rho\dot\varphi = 0$
3) $m\ddot\rho - m\rho\dot\varphi^2 - \frac{q}{c}\mathcal{H}\rho\dot\varphi = 0$
4) $m\ddot\rho + m\rho\dot\varphi^2 + \frac{q}{c}\mathcal{H}\rho\dot\varphi = 0$

3.42.* Укажите верный вид уравнения Лагранжа для переменной φ в цилиндрических координатах для частицы с зарядом q и массой m в однородном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленном вдоль оси z:
1) $\ddot\varphi + 2\frac{\dot\rho}{\rho}\dot\varphi = 0$
2) $\ddot\varphi + \left(2\dot\varphi + \frac{q\mathcal{H}}{mc}\right)\frac{\dot\rho}{\rho} = 0$
3) $\ddot\varphi + 2\frac{\dot\rho}{\rho}\dot\varphi + \frac{q\mathcal{H}}{mc}\rho = 0$

4) $\ddot{\varphi}+\frac{q\mathcal{H}}{mc}\frac{\dot{\rho}}{\rho}=0$

3.43.* Укажите векторный потенциал для однородного магнитного поля $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленного вдоль полярной оси, в сферической системе координат:

1) $A_r=0, A_\theta=\mathcal{H}r\sin\theta,\ A_\varphi=\frac{\mathcal{H}}{r}\cos\theta$
2) $A_r=\mathcal{H}r\cos\theta, A_\theta=0, A_\varphi=\mathcal{H}r\sin\theta$
3) $A_r=0, A_\theta=\mathcal{H}r\sin\theta, A_\varphi=0$
4) $A_r=0, A_\theta=0, A_\varphi=\frac{1}{2}\mathcal{H}r\sin\theta$

3.44.* Укажите функцию Лагранжа для частицы с зарядом q и массой m в однородном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ в сферической системе координат:

1) $L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)+\frac{q}{2c}\mathcal{H}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$
2) $L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)-\frac{q}{2c}\mathcal{H}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$
3) $L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)-\frac{q}{2c}\mathcal{H}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$
4) $L=\frac{m}{2}\dot{r}^2+\frac{q}{2c}\mathcal{H}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$

3.45.* Для частицы с зарядом q и массой m в однородном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ укажите верное уравнение Лагранжа для сферической координаты r:

1) $\ddot{r}-\frac{q\mathcal{H}}{mc}\sin^2\theta\,\dot{\varphi}=0$
2) $\ddot{r}-r\dot{\theta}^2-r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2-\frac{q\mathcal{H}}{mc}r\sin^2\theta\,\dot{\varphi}=0$
3) $\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)-\frac{q}{2c}\mathcal{H}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}=0$
4) $\ddot{r}-\dot{r}\dot{\theta}^2-\dot{r}\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2+\frac{q\mathcal{H}}{mc}\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2=0$

3.46.* Для частицы с зарядом q и массой m в однородном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ укажите верное уравнение Лагранжа для сферической координаты θ:

1) $\ddot{\theta}+2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta}-\frac{1}{2}\sin 2\theta\dot{\varphi}^2-\frac{q\mathcal{H}}{2mc}\sin 2\theta\,\dot{\varphi}=0$
2) $\ddot{\theta}+2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta}+\frac{q\mathcal{H}}{mc}\sin 2\theta=0$
3) $\ddot{\theta}+2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\theta}+\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\dot{\varphi}+\frac{q\mathcal{H}}{mc}\sin 2\theta=0$
4) $\ddot{\theta}+\frac{q\mathcal{H}}{mc}\sin 2\theta=0$

3.47.* Для частицы с зарядом q и массой m в однородном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ укажите верное уравнение Лагранжа для сферической координаты φ:

1) $\ddot{\varphi} - \frac{q\mathcal{H}}{2mc} = 0$

2) $r\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\,\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{q}{2mc}\mathcal{H}r\sin^2\theta = 0$

3) $\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\frac{\dot{r}}{r} + \frac{q}{2mc}\mathcal{H}r\sin^2\theta = 0$

4) $\ddot{\varphi} + \left(2\dot{\varphi} + \frac{q\mathcal{H}}{mc}\right)\left(\frac{\dot{r}}{r} + \dot{\theta}ctg\theta\right) = 0$

3.48.* Пусть электромагнитное поле характеризуется скалярным потенциалом $\phi(\boldsymbol{r},t)$ и векторным потенциалом $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$. Изменим потенциалы следующим образом:

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}; \quad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}F,$$

где $F = F(\boldsymbol{r},t)$ – произвольная функция координат и времени. Как напряженность электрического поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}'$ для потенциалов ϕ' и $\boldsymbol{A}'$ связана с напряженностью поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ для потенциалов ϕ и $\boldsymbol{A}$?

1) $\boldsymbol{\mathcal{E}}' = \boldsymbol{\mathcal{E}}$

2) $\boldsymbol{\mathcal{E}}' = \boldsymbol{\mathcal{E}} - \mathrm{grad}\,F$

3) $\boldsymbol{\mathcal{E}}' = -\boldsymbol{\mathcal{E}}$

4) $\boldsymbol{\mathcal{E}}' = \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{grad}\,F)$

3.49.* Пусть электромагнитное поле характеризуется векторным потенциалом $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$. Изменим потенциал следующим образом:

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,F,$$

где $F = F(\boldsymbol{r},t)$ – произвольная функция координат и времени. Как напряженность магнитного поля $\boldsymbol{\mathcal{H}}'$ для потенциала $\boldsymbol{A}'$ связана с напряженностью магнитного поля $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ для потенциала $\boldsymbol{A}$?

1) $\boldsymbol{\mathcal{H}}' = \boldsymbol{\mathcal{H}}$

2) $\boldsymbol{\mathcal{H}}' = \boldsymbol{\mathcal{H}} - gradF$

3) $\boldsymbol{\mathcal{H}}' = -\boldsymbol{\mathcal{H}}$

4) $\boldsymbol{\mathcal{H}}' = \boldsymbol{\mathcal{H}} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(gradF)$

3.50.** Пусть электромагнитное поле характеризуется скалярным потенциалом $\phi(\boldsymbol{r},t)$ и векторным потенциалом $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$. Изменим потенциалы следующим образом:

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial F}{\partial t}; \quad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,F,$$

где $F = F(\boldsymbol{r}, t)$ – произвольная функция координат и времени. Как функция Лагранжа L' для потенциалов ϕ' и $\boldsymbol{A}'$ связана с функцией Лагранжа L для потенциалов ϕ и $\boldsymbol{A}$?

1) $L' = L + \frac{q}{c}\frac{\partial F}{\partial t}$
2) $L' = L$
3) $L' = L - \frac{q}{c}\frac{\partial F}{\partial t}$
4) $L' = L + (\boldsymbol{r}, \operatorname{grad} F)$

§ 4. Законы сохранения

4.1. Интегралом движения называется:
1) функция координат и скоростей точек, которая при движении механической системы изменяется с течением времени
2) функция координат и скоростей точек, которая при движении механической системы сохраняет постоянное значение
3) решение уравнения Лагранжа
4) зависимость координат точек механической системы от времени

4.2. Механическая система, состоящая из взаимодействующих только друг с другом материальных точек, имеет s степеней свободы. Какое количество независимых интегралов движения имеется в данном случае?
1) s
2) $3s$
3) $2s - 1$
4) $s + 1$

4.3. Частица движется в однородном поле тяжести. Какое в данном случае имеется количество независимых интегралов движения?
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

4.4. Пусть функция Лагранжа механической системы не изменяется при сдвиге начала отсчета времени. Это приводит к закону сохранения:

1) обобщенной энергии системы
2) полного обобщенного импульса системы
3) полного момента импульса системы
4) кинетической энергии системы

4.5. Пусть функция Лагранжа механической системы не изменяется при любом параллельном переносе системы как целого в пространстве. Это приводит к закону сохранения:
1) обобщенной энергии системы
2) полного обобщенного импульса системы
3) полного момента импульса системы
4) кинетической энергии системы

4.6. Пусть функция Лагранжа механической системы не изменяется при любом повороте системы как целого в пространстве. Это приводит к закону сохранения:
1) обобщенной энергии системы
2) полного обобщенного импульса системы
3) полного момента импульса системы
4) кинетической энергии системы

4.7. Если функция Лагранжа механической системы не зависит явно от времени, то сохраняется:
1) обобщенная энергия системы
2) полный обобщенный импульс системы
3) полный момент импульса системы
4) кинетическая энергия системы

4.8. Пусть L – функция Лагранжа механической системы, q_α – ее обобщенные координаты ($\alpha = 1,2,\dots,s$). Обобщенная энергия системы:
1) $E = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha$
2) $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L$
3) $E = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha + L$
4) $E = \sum_{\alpha=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \dot{q}_\alpha - L$

4.9. Обобщенная энергия свободной частицы с массой m есть:

1) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2}$
2) $E = 0$
3) $E = \frac{m\dot{r}}{2}$
4) $E = m\dot{\boldsymbol{r}}^2$

Здесь $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор частицы.

4.10. Механическая система состоит из N частиц. Пусть $\boldsymbol{r}_i, m_i$ – радиус-вектор и масса частицы с номером i соответственно, а L – функция Лагранжа системы. Полный обобщенный импульс системы:
1) $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N}(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i)$
2) $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N}\left(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}\right)$
3) $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i})$
4) $\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N}\left(m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}\right)$

4.11. Обобщенный импульс, соответствующий обобщенной координате q_α, механической системы с функцией Лагранжа L определяется равенством:
1) $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$
2) $p_\alpha = \frac{L}{q_\alpha}$
3) $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$
4) $p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L$

4.12. Циклическая координата – это:
1) обобщенная координата, производная по времени от которой не входит в явном виде в функцию Лагранжа
2) обобщенная координата, которая не входит в явном виде в функцию Лагранжа
3) обобщенная координата, производная по времени от которой не входит в явном виде в уравнения Лагранжа
4) обобщенная координата, производная по времени от которой входит в явном виде в уравнения Лагранжа

4.13. Пусть q_α – циклическая координата. Какое из приведенных ниже утверждений является верным?

1) соответствующий этой координате обобщенный импульс сохраняется
2) соответствующий этой координате обобщенный импульс не сохраняется
3) производная от функции Лагранжа по данной координате отлична от нуля
4) функция Лагранжа содержит квадрат данной координаты

4.14. Для частицы, движущейся в однородном поле тяжести, одной из сохраняющихся величин является (ось z направлена вдоль поля):

1) обобщенный импульс частицы p_z
2) проекция момента импульса частицы M_x
3) обобщенная энергия частицы
4) проекция момента импульса частицы M_y

4.15. Для частицы, движущейся в однородном поле тяжести, одной из сохраняющихся величин является (ось z направлена вдоль поля):

1) обобщенный импульс частицы p_z
2) проекция момента импульса частицы M_x
3) обобщенный импульс частицы p_x
4) проекция момента импульса частицы M_y

4.16. Для частицы, движущейся в однородном поле тяжести, одной из сохраняющихся величин является (ось z направлена вдоль поля):

1) обобщенный импульс частицы p_z
2) проекция момента импульса частицы M_z
3) проекция момента импульса частицы M_x
4) проекция момента импульса частицы M_y

4.17. Заряженная частица движется в поле электрического диполя. Пусть ось z прямоугольной декартовой системы координат направлена вдоль диполя. Какие проекции обобщенного импульса p_x, p_y, p_z частицы сохраняются?

1) p_x, p_z
2) p_x, p_y, p_z
3) p_z

4) ни одна из проекций не сохраняется

4.18. Заряженная частица движется в поле электрического диполя. Пусть ось z прямоугольной декартовой системы координат направлена вдоль диполя. Какие проекции момента импульса M_x, M_y, M_z частицы сохраняются?

1) M_x, M_y, M_z
2) M_x, M_y
3) M_z
4) ни одна из проекций не сохраняется

4.19. Заряженная частица движется в поле равномерно заряженной бесконечной плоскости. Совместим плоскость xy прямоугольной декартовой системы координат с заряженной плоскостью. Какие проекции момента импульса M_x, M_y, M_z частицы сохраняются?

1) M_x, M_y, M_z
2) M_x, M_y
3) M_x, M_z
4) M_z

4.20. Заряженная частица движется в поле равномерно заряженной бесконечной плоскости. Совместим плоскость xy прямоугольной декартовой системы координат с заряженной плоскостью. Какие проекции обобщенного импульса p_x, p_y, p_z частицы сохраняются?

1) p_x, p_y
2) p_y, p_z
3) p_x, p_z
4) p_x, p_y, p_z

4.21. Заряженная частица движется в поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра. Пусть ось z прямоугольной декартовой системы координат направлена вдоль оси цилиндра. Какие проекции обобщенного импульса p_x, p_y, p_z частицы сохраняются?

1) p_x
2) p_y, p_z
3) p_z
4) p_x, p_y, p_z

4.22. Заряженная частица движется в поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра. Пусть ось z прямоугольной декартовой системы координат направлена вдоль оси цилиндра. Какие проекции момента импульса M_x, M_y, M_z частицы сохраняются?

1) M_x
2) M_z
3) M_x, M_z
4) M_x, M_y, M_z

4.23. Обобщенная энергия E свободной частицы с массой m в прямоугольных декартовых координатах имеет вид:

1) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$
2) $E = \frac{m}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$
3) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + y^2 + \dot{z}^2)$
4) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^2$

4.24. Обобщенная энергия E свободной частицы с массой m в цилиндрической системе координат имеет вид:

1) $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 + \rho^2\dot{z}^2)$
2) $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + z^2)$
3) $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$
4) $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$

4.25. Обобщенная энергия E свободной частицы с массой m в сферической системе координат имеет вид:

1) $E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)$
2) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2}$
3) $E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$
4) $E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$

4.26. Обобщенный импульс свободной частицы с массой m есть:

1) $p = m\boldsymbol{r}$
2) $p = m\dot{\boldsymbol{r}}$

3) $p = m\dot{\boldsymbol{r}} + m\boldsymbol{r}$
4) $p = m\dot{\boldsymbol{r}} - m\boldsymbol{r}$

4.27. Проекции полного обобщенного импульса свободной частицы с массой m на оси прямоугольной декартовой системы координат равны:
1) $p_x = mx, p_y = my,\ p_z = mz$
2) $p_x = m\dot{x} - m\dot{y}, p_y = m\dot{y} - m\dot{z},\ p_z = m\dot{z} - m\dot{x}$
3) $p_x = m\dot{x}, p_y = m\dot{y}, p_z = m\dot{z}$
4) $p_x = m\dot{x} + my, p_y = m\dot{y} + mz,\ p_z = m\dot{z} + mx$

4.28. В цилиндрической системе координат обобщенный импульс p_ρ свободной частицы с массой m равен:
1) $p_\rho = m\dot{\rho}$
2) $p_\rho = m\rho$
3) $p_\rho = m\dot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}$
4) $p_\rho = m\dot{\rho} - \frac{m}{t}\rho$

4.29. В цилиндрической системе координат обобщенный импульс p_φ свободной частицы с массой m равен:
1) $p_\varphi = m\dot{\varphi}$
2) $p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}$
3) $p_\varphi = m\rho^2\varphi$
4) $p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} - \frac{m}{t}\rho^2\varphi$

4.30. В цилиндрической системе координат обобщенный импульс p_z свободной частицы с массой m равен:
1) $p_z = mz$
2) $p_z = m\rho^2\dot{z}$
3) $p_z = m\dot{z}$
4) $p_z = m\rho\dot{z}$

4.31. В сферической системе координат обобщенный импульс p_r свободной частицы с массой m равен:
1) $p_r = mr$
2) $p_r = m\varphi^2\dot{r}$
3) $p_r = m\varphi\dot{r}$

4) $p_r = m\dot{r}$

4.32. В сферической системе координат обобщенный импульс p_θ свободной частицы с массой m равен:

1) $p_\theta = m\dot{\theta}$
2) $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$
3) $p_\theta = mr\dot{\theta}$
4) $p_\theta = m\theta\dot{r}$

4.33. В сферической системе координат обобщенный импульс p_φ свободной частицы с массой m равен:

1) $p_\varphi = mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}$
2) $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$
3) $p_\varphi = m \sin^2\theta\, \dot{\varphi}$
4) $p_\varphi = mr \sin^2\theta\, \dot{\varphi}$

4.34. Частица с массой m движется вдоль оси z в однородном поле тяжести. Обобщенный импульс частицы p_z равен:

1) $p_z = m\dot{z} + mgz$
2) $p_z = m\dot{z} - mgz$
3) $p_z = m\dot{z}$
4) $p_z = m\dot{z} - mgt$

4.35.* Частицы с массами m_1 и m_2 движутся вдоль оси z в однородном поле тяжести. Полный обобщенный импульс $\boldsymbol{P}$ системы равен (z_1 – координата частицы массы m_1, z_2 – координата частицы массы m_2, $\boldsymbol{e}_z$ – единичный вектор, направленный вдоль оси z):

1) $\boldsymbol{P} = \big(m_1\dot{z}_1 + m_2\dot{z}_2 + mg(z_1 + z_2)\big)\boldsymbol{e}_z$
2) $\boldsymbol{P} = (m_1\dot{z}_1 + m_2\dot{z}_2 + mg)\boldsymbol{e}_z$
3) $\boldsymbol{P} = (m_1\dot{z}_1 + m_2\dot{z}_2 - mg)\boldsymbol{e}_z$
4) $\boldsymbol{P} = (m_1\dot{z}_1 + m_2\dot{z}_2)\boldsymbol{e}_z$

4.36.* Частицы с массами m_1 и m_2, связанные пружиной, движутся в плоскости xy. Полный обобщенный импульс $\boldsymbol{P}$ системы равен (x_1, y_1 – координаты частицы массы m_1, x_2, y_2 – координаты частицы массы m_2, $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ – единичные векторы, направленные вдоль осей x и y соответственно):

1) $\boldsymbol{P} = (m_1\dot{y}_1 + m_2\dot{y}_2)\boldsymbol{e}_y$
2) $\boldsymbol{P} = (m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)\boldsymbol{e}_x + (m_1\dot{y}_1 + m_2\dot{y}_2)\boldsymbol{e}_y$
3) $\boldsymbol{P} = (m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)\boldsymbol{e}_x$
4) $\boldsymbol{P} = (m_1\dot{x}_1 + m_1\dot{y}_1)\boldsymbol{e}_x + (m_2\dot{x}_2 + m_2\dot{y}_2)\boldsymbol{e}_y$

4.37.* Частица с массой m движется под действием упругой силы $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$, $k = const$. Полный обобщенный импульс $\boldsymbol{P}$ частицы равен:
1) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}}$
2) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} + k\boldsymbol{r}$
3) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} - k\boldsymbol{r}$
4) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} + k\frac{\boldsymbol{r}}{t}$

4.38. Частица с массой m и зарядом q движется в магнитном поле, характеризуемом векторным потенциалом $\boldsymbol{A}$. Радиус-вектор частицы есть $\boldsymbol{r}$. Полный обобщенный импульс $\boldsymbol{P}$ частицы равен:
1) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}$
2) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}}$
3) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}$
4) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} + q\boldsymbol{A}$

4.39. Частица с массой m и зарядом q движется в электрическом поле, характеризуемом скалярным потенциалом ϕ. Радиус-вектор частицы есть $\boldsymbol{r}$. Полный обобщенный импульс $\boldsymbol{P}$ частицы равен:
1) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} + q\phi$
2) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} - q\phi$
3) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}}$
4) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{q}{c}\phi$

4.40. Частица с массой m и зарядом q движется в электромагнитном поле, характеризуемом скалярным потенциалом ϕ и векторным потенциалом $\boldsymbol{A}$. Радиус-вектор частицы есть $\boldsymbol{r}$. Полный обобщенный импульс $\boldsymbol{P}$ частицы равен:
1) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} + q\phi$
2) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} - q\phi + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}$
3) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}}$
4) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}$

4.41. Частица с массой m движется вдоль вертикальной оси z в однородном поле тяжести. Обобщенная энергия частицы:

1) $E = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mg\dot{z}$
2) $E = \frac{m\dot{z}^2}{2} + mgz$
3) $E = \frac{m\dot{z}^2}{2} - mg$
4) $E = \frac{m\dot{z}^2}{2}$

4.42. Частицы с массами m_1 и m_2 движутся вдоль оси z в однородном поле тяжести. Гравитационным взаимодействием между частицами можно пренебречь. Обобщенная энергия системы (z_1 – координата частицы массы m_1, z_2 – координата частицы массы m_2):

1) $E = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} - \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2} - m_1g - m_2g$
2) $E = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2} + m_1gz_1 + m_2gz_2$
3) $E = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2} - m_2gz_2$
4) $E = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2} - m_1gz_1$

4.43.* Частицы с массами m_1 и m_2, связанные пружиной жесткости k, движутся в плоскости xy. Гравитационным взаимодействием между частицами можно пренебречь. Обобщенная энергия системы (x_1, y_1 – координаты частицы массы m_1, x_2, y_2 – координаты частицы массы m_2):

1) $E = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_1\dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_2\dot{y}_2^2}{2} - \frac{k}{2}((x_1 + y_1)^2 - (x_2 + y_2)^2)$
2) $E = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_1\dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_2\dot{y}_2^2}{2} + \frac{k}{2}((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)$
3) $E = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_1\dot{y}_1^2}{2} - \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} - \frac{m_2\dot{y}_2^2}{2} - \frac{k}{2}((x_1 + y_1)^2 - (x_2 + y_2)^2)$
4) $E = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_1\dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} + \frac{m_2\dot{y}_2^2}{2} - k\big((x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\big)$

4.44. Частица с массой m движется вдоль оси x под действием упругой силы $F = -kx, k = const$. Обобщенная энергия частицы:

1) $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$
2) $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} - kx$

3) $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + kx$

4) $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$

4.45.Частица с массой m и зарядом q движется в магнитном поле, характеризуемом векторным потенциалом $\boldsymbol{A}$. Радиус-вектор частицы есть $\boldsymbol{r}$. Обобщенная энергия частицы:

1) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2}$

2) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}})$

3) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}})$

4) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{q}{2c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}})$

4.46.Частица с массой m и зарядом q движется в электрическом поле, характеризуемом скалярным потенциалом ϕ. Радиус-вектор частицы есть $\boldsymbol{r}$. Обобщенная энергия частицы:

1) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2}$

2) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} - q\phi$

3) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + q\phi$

4) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{q}{c}\phi$

4.47.Частица с массой m и зарядом q движется в электромагнитном поле, характеризуемом скалярным потенциалом ϕ и векторным потенциалом $\boldsymbol{A}$. Радиус-вектор частицы есть $\boldsymbol{r}$. Обобщенная энергия частицы:

1) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2}$

2) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}})$

3) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + q\phi + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}})$

4) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + q\phi$

4.48.* Функция Лагранжа частицы с массой m и зарядом q, движущейся в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\dot{\varphi}$$

Проекция момента импульса частицы на ось z равна:

1) $M_z = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2$
2) $M_z = m\rho^2\dot{\varphi}$
3) $M_z = m\dot{z}$
4) $M_z = m\rho\dot{z}$

4.49.* Функция Лагранжа частицы с массой m и зарядом q, движущейся в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Проекция момента импульса частицы на ось z равна:

1) $M_z = m(x\dot{y} - y\dot{x})$
2) $M_z = \frac{q\mathcal{H}}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x})$
3) $M_z = m\dot{z} + \frac{q\mathcal{H}}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x})$
4) $M_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}(x^2 + y^2)$

4.50.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \beta\rho^2\dot{\varphi},\ \ \alpha,\beta = const$$

Обобщенные импульсы p_ρ, p_φ, p_z системы равны:

1) $p_\rho = \alpha\dot{\rho}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi}, p_z = \alpha\dot{z}$
2) $p_\rho = \alpha\dot{\rho}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi} + \beta\rho^2, p_z = \alpha\dot{z}$
3) $p_\rho = \alpha\dot{\rho} + \beta\rho\dot{\varphi}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi}, p_z = \alpha\dot{z}$
4) $p_\rho = \alpha\dot{\rho}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi} + \beta\rho^2, p_z = 0$

4.51.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \beta\rho^2\dot{\varphi},\ \ \alpha,\beta = const$$

Какие обобщенные импульсы системы сохраняются?

1) p_ρ
2) p_ρ, p_φ, p_z
3) p_φ, p_z
4) p_z

4.52.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \beta\rho^2 \sin\varphi\,\dot{\varphi}, \quad \alpha, \beta = const$$

Обобщенные импульсы p_ρ, p_φ, p_z системы равны:

1) $p_\rho = \alpha\dot{\rho}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi}, p_z = \alpha\dot{z}$
2) $p_\rho = \alpha\dot{\rho}, p_\varphi = \beta\rho^2 \sin\varphi\,, p_z = \alpha\dot{z}$
3) $p_\rho = \alpha\dot{\rho} + 2\beta\rho\sin\varphi\,\dot{\varphi}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi}, p_z = \alpha\dot{z}$
4) $p_\rho = \alpha\dot{\rho}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi} + \beta\rho^2 \sin\varphi\,, p_z = \alpha\dot{z}$

4.53.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \beta\rho^2 \sin\varphi\,\dot{\varphi}, \quad \alpha, \beta = const$$

Какие обобщенные импульсы системы сохраняются?

1) p_ρ, p_φ
2) p_z
3) p_ρ, p_z
4) p_φ, p_z

4.54.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \beta\dot{\rho}\dot{z}, \quad \alpha, \beta = const$$

Обобщенные импульсы p_ρ, p_φ, p_z системы равны:

1) $p_\rho = \alpha\dot{\rho} + \beta\dot{z}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi}, p_z = \alpha\dot{z} + \beta\dot{\rho}$
2) $p_\rho = \alpha\dot{\rho}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi}, p_z = \alpha\dot{z}$
3) $p_\rho = \alpha\dot{\rho} + \beta\dot{z}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi}, p_z = \alpha\dot{z}$
4) $p_\rho = \alpha\dot{\rho}, p_\varphi = \alpha\rho^2\dot{\varphi}, p_z = \alpha\dot{z} + \beta\dot{\rho}$

4.55.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{\alpha}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \beta\dot{\rho}\dot{z}, \quad \alpha, \beta = const$$

Какие обобщенные импульсы системы сохраняются?

1) p_ρ, p_φ, p_z
2) p_φ
3) p_ρ, p_z
4) p_φ, p_z

4.56.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{\alpha}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{\beta}{r}\sin^2\theta\,\dot{\varphi},\quad \alpha,\beta = const$$

Обобщенные импульсы p_r, p_θ, p_φ системы равны:

1) $p_r = \alpha\dot{r} + \alpha r^2\dot{\theta} - \frac{\beta}{r^2}\sin^2\theta\,\dot{\varphi}, p_\theta = \alpha r^2\dot{\theta}, p_\varphi = \alpha r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$
2) $p_r = \alpha\dot{r}, p_\theta = \alpha r^2\dot{\theta} + \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi} + 2\frac{\beta}{r}\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}, p_\varphi = 0$
3) $p_r = \alpha\dot{r}, p_\theta = \alpha r^2\dot{\theta}, p_\varphi = \alpha\, r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi} + \frac{\beta}{r}\sin^2\theta$
4) $p_r = \alpha\dot{r}, p_\theta = \alpha r^2\dot{\theta}, p_\varphi = \alpha r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$

4.57.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{\alpha}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{\beta}{r}\sin^2\theta\,\dot{\varphi},\quad \alpha,\beta = const$$

Какие обобщенные импульсы системы сохраняются?

1) p_r, p_θ, p_φ
2) $p_r,\ p_\theta$
3) p_θ
4) p_φ

4.58.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{\alpha}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + \beta\dot{r}\sin\theta,\quad \alpha,\beta = const$$

Обобщенные импульсы p_r, p_θ, p_φ системы равны:

1) $p_r = \alpha\dot{r}, p_\theta = \alpha r^2\dot{\theta}, p_\varphi = \alpha r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$
2) $p_r = \alpha\dot{r} + \beta\sin\theta, p_\theta = \alpha r^2\dot{\theta}, p_\varphi = \alpha\, r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$
3) $p_r = \alpha\dot{r} + \beta, p_\theta = \alpha r^2\dot{\theta}, p_\varphi = \alpha r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$
4) $p_r = \alpha\dot{r} + \beta\sin\theta, p_\theta = \alpha r\dot{\theta}, p_\varphi = \alpha r^2\sin\theta\,\dot{\varphi}$

4.59.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{\alpha}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + \beta\dot{r}\sin\theta,\quad \alpha,\beta = const$$

Какие обобщенные импульсы системы сохраняются?

1) p_r, p_θ, p_φ
2) p_r, p_θ
3) p_θ, p_φ
4) p_φ

4.60.** Функция Лагранжа частицы:

$$L = \alpha \frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \beta |\dot{\boldsymbol{r}}|,$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор частицы, $\alpha, \beta = const$. Полный обобщенный импульс $\boldsymbol{P}$ частицы равен:

1) $\boldsymbol{P} = \alpha \dot{\boldsymbol{r}}$
2) $\boldsymbol{P} = \alpha \dot{\boldsymbol{r}} + \beta \frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}$
3) $\boldsymbol{P} = \alpha \dot{\boldsymbol{r}} + \beta \dot{\boldsymbol{r}}$
4) $\boldsymbol{P} = \alpha \dot{\boldsymbol{r}} + \beta |\dot{\boldsymbol{r}}|$

4.61.* Функция Лагранжа частицы:

$$L = e^{\beta t} \left(\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(\boldsymbol{r}) \right),$$

где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор частицы, $U(\boldsymbol{r})$ – потенциальная энергия частицы, $\beta = const$. Полный обобщенный импульс $\boldsymbol{P}$ частицы равен:

1) $\boldsymbol{P} = e^{-\beta t} \left(\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(\boldsymbol{r}) \right)$
2) $\boldsymbol{P} = e^{\beta t} m\dot{\boldsymbol{r}}$
3) $\boldsymbol{P} = m\dot{\boldsymbol{r}}$
4) $\boldsymbol{P} = \beta e^{\beta t} \left(\frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(\boldsymbol{r}) \right) + e^{\beta t} m\dot{\boldsymbol{r}}$

4.62. В прямоугольных декартовых координатах обобщенная энергия частицы с массой m и зарядом q, находящейся в электрическом поле точечного заряда Q, имеет вид:

1) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{qQ}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
2) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{qQ}{x^2 + y^2 + z^2}$
3) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qQ}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
4) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{3}{2} \frac{qQ}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

4.63.* В цилиндрических координатах обобщенная энергия частицы с массой m и зарядом q, находящейся в электрическом поле точечного заряда Q, имеет вид:

1) $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{qQ}{\rho^2 + z^2}$
2) $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{qQ}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$

3) $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{2}{3}\frac{qQ}{(\rho^2 + \rho^2\varphi^2 + z^2)^{3/2}}$

4) $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qQ}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$

4.64.* В сферических координатах обобщенная энергия частицы с массой m и зарядом q, находящейся в электрическом поле точечного заряда Q, имеет вид:

1) $E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{qQ}{r}$

2) $E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right) + \frac{qQ}{\sqrt{r^2+r^2\theta^2+r^2\sin^2\theta\varphi^2}}$

3) $E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - \frac{qQ}{r}$

4) $E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right) + \frac{qQ}{r^2+\theta^2+z^2}$

4.65.* В прямоугольных декартовых координатах обобщенная энергия частицы с массой m и зарядом q, находящейся в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, записывается в виде:

1) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$

2) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x})$

3) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{q\mathcal{H}}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x})$

4) $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{q\mathcal{H}}{c}x\dot{y}$

4.66.* В цилиндрических координатах обобщенная энергия частицы с массой m и зарядом q, находящейся в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, записывается в виде:

1) $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\dot{\varphi}$

2) $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2\dot{\varphi}$

3) $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)$

4) $E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}\varphi^2\dot{\rho}$

4.67.* В сферических координатах обобщенная энергия частицы с массой m и зарядом q, находящейся в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, записывается в виде:

1) $E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) + \frac{q\mathcal{H}}{2c}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$

2) $E=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$

3) $E=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)-\frac{q\mathcal{H}}{2c}r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$

4) $E=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)+\frac{q\mathcal{H}}{2c}\varphi^2\sin^2\theta\,\dot{r}$

4.68.* В прямоугольных декартовых координатах обобщенные импульсы частицы с массой m и зарядом q, находящейся в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленном вдоль оси z, могут быть записаны в виде:

1) $p_x=m\dot{x},\ p_y=m\dot{y},\ p_z=m\dot{z}$

2) $p_x=m\dot{x}-\frac{q\mathcal{H}}{c}\dot{y},\ p_y=m\dot{y}+\frac{q\mathcal{H}}{c}\dot{x},\ p_z=m\dot{z}$

3) $p_x=m\dot{x}-\frac{q\mathcal{H}}{2c}y,\ p_y=m\dot{y}+\frac{q\mathcal{H}}{2c}x,\ p_z=m\dot{z}$

4) $p_x=m\dot{x}+\frac{q\mathcal{H}}{2c}y,\ p_y=m\dot{y}+\frac{q\mathcal{H}}{2c}x,\ p_z=m\dot{z}+\frac{q\mathcal{H}}{2c}z$

4.69.** В цилиндрических координатах обобщенные импульсы частицы с массой m и зарядом q, находящейся в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, могут быть записаны в виде:

1) $p_\rho=m\dot{\rho},\ p_\varphi=m\rho^2\dot{\varphi},\ p_z=m\dot{z}$

2) $p_\rho=m\dot{\rho}+\frac{q\mathcal{H}}{c}\rho\dot{\rho}\dot{\varphi},\ p_\varphi=m\rho^2\dot{\varphi},\ p_z=m\dot{z}$

3) $p_\rho=m\dot{\rho}+\frac{q\mathcal{H}}{c}\rho\dot{\rho}\dot{\varphi},\ p_\varphi=m\rho^2\dot{\varphi}+\frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2,\ p_z=m\dot{z}$

4) $p_\rho=m\dot{\rho},\ p_\varphi=m\rho^2\dot{\varphi}+\frac{q\mathcal{H}}{2c}\rho^2,\ p_z=m\dot{z}$

4.70.** В сферических координатах обобщенные импульсы частицы с массой m и зарядом q, находящейся в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, могут быть записаны в виде:

1) $p_r=m\dot{r},\ p_\theta=mr^2\dot{\theta},\ p_\varphi=mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}+\frac{q\mathcal{H}}{2c}r^2\sin^2\theta$

2) $p_r=m\dot{r},\ p_\theta=mr^2\dot{\theta},\ p_\varphi=mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$

3) $p_r=m\dot{r}+\frac{q\mathcal{H}}{c}r\dot{r},\ p_\theta=mr^2\dot{\theta},\ p_\varphi=mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}+\frac{q\mathcal{H}}{2c}r^2\sin^2\theta$

4) $p_r=m\dot{r},\ p_\theta=mr^2\dot{\theta}+\frac{q\mathcal{H}}{c}r^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi},\ p_\varphi=mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$

4.71. Заряженная частица находится в электрическом поле точечного неподвижного заряда. Интегралами движения для частицы являются:

1) полный обобщенный импульс

2) обобщенная энергия и полный обобщенный импульс

3) обобщенная энергия и момент импульса, вычисленный относительно точки крепления неподвижного заряда
4) полный обобщенный импульс и момент импульса, вычисленный относительно точки крепления неподвижного заряда

§ 5. Одномерное движение

5.1. Одномерным называется движение системы, имеющей:
1) ограничение движения по одной из координат
2) одну идеальную голономную связь
3) одну степень свободы
4) одну закрепленную точку

5.2. В случае одномерного движения функция Лагранжа системы, на которую наложены стационарные идеальные голономные связи и потенциальные силы, независящие от времени, в общем случае выражается в виде (q – обобщенная координата; $U(q)$ – потенциальная энергия системы, $m(q)$ – некоторая функция обобщенной координаты q):
1) $L = e^{\frac{k}{m(q)}t}(\frac{m(q)\dot{q}^2}{2} - U(q))$
2) $L = \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}(\boldsymbol{A}, \dot{\boldsymbol{r}}) - q\phi$
3) $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(q)$
4) $L = \frac{m(q)\dot{q}^2}{2} - U(q)$

5.3. В общем случае одномерного движения системы, на которую действуют только потенциальные силы, независящие от времени, и наложены только стационарные идеальные голономные связи:
1) сохраняется только энергия
2) сохраняется только импульс
3) сохраняются и импульс, и энергия
4) импульс и энергия не сохраняются

5.4. Траектория частицы, совершающей одномерное движение, в общем случае:
1) лежит в одной плоскости

2) располагается вдоль прямой
3) ограничена точками остановки
4) ни один из предложенных вариантов не является верным

5.5. Одномерное движение:
1) является инфинитным, если обобщенная энергия системы равна нулю
2) является инфинитным, если имеется не более одной точки остановки
3) является финитным, если нет ни одной точки остановки
4) является финитным, только если обобщенная энергия системы неотрицательна

5.6. В общем случае одномерного движения обобщенная энергия системы:
1) всегда равна нулю
2) всегда неотрицательна
3) всегда положительна
4) может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от потенциальной энергии системы

5.7. Точками остановки в случае одномерного движения называются:
1) точки, в которых скорость частицы равна нулю
2) точки, в которых потенциальная энергия равна нулю
3) точки, в которых потенциальная энергия имеет минимум
4) точки, в которых потенциальная энергия имеет максимум

5.8. При прохождении точки остановки скорость системы:
1) изменит знак только в случае, если в точке остановки достигается максимум потенциальной энергии
2) может как изменить знак, так и не изменить его
3) не изменит знак
4) изменит знак

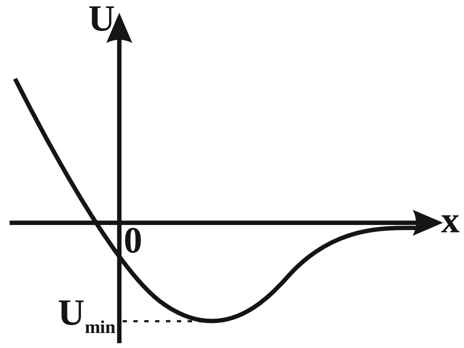

Рис. 5.1

5.9. Материальная точка движется в поле с потенциалом, изображенном на рисунке 5.1. Такое движение будет колебательным в случае, если полная энергия E удовлетворяет условию:

1) $E > 0$
2) $E = 0$
3) $U_{\min} < E < 0$
4) $E < U_{\min}$

5.10. Координаты точек остановки системы с полной энергией E, движущейся в поле с потенциалом $U(x) = \frac{kx^2}{2}$, равны:

1) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}}$
2) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{E}}$
3) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2Ek}$
4) $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{E}{k}}$

5.11.* Точки остановки частицы массой m, описываемой функцией Лагранжа

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - A\sin ax,$$

где $a, A = const$, при начальных условиях $x_0 = 0, \dot{x}_0 = \sqrt{A/m}$, есть:

1) $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{\pi}{6a}$
2) $x_1 = -\frac{7\pi}{6a};\ x_2 = \frac{\pi}{6a}$
3) $x_1 = -\frac{7\pi}{6a};\ x_2 = 0$
4) $x_1 = -\frac{\pi}{6a};\ x_2 = \frac{\pi}{6a}$

5.12.* Точки остановки системы, описываемой функцией Лагранжа $L = \frac{a\dot{x}^2 - bx^2 + c}{x}$ (a, b, c – положительные константы) при начальных условиях $x_0 = \sqrt{\frac{c}{b}}, \dot{x}_0 = 0$, есть:

1) $x_1 = 0;\ x_2 = \sqrt{\frac{c}{b}}$
2) $x_1 = -\sqrt{\frac{c}{b}};\ x_2 = 0$
3) $x_1 = -\sqrt{\frac{c}{b}};\ x_2 = \sqrt{\frac{c}{b}}$
4) точек остановки нет

5.13. Одномерное движение частицы называется финитным, если:

1) частица движется в ограниченной области пространства
2) имеется хотя бы одна точка остановки
3) имеются ровно две точки остановки
4) выполняется условие $U(q) = E$

5.14. Одномерное движение частицы называется инфинитным, если:

1) движение происходит в области пространства между точками остановки
2) обобщенная энергия системы отрицательна
3) выполняется условие $U(q) = E$
4) частица может уйти на бесконечность

5.15. Период финитного одномерного движения системы, на которую действуют только потенциальные силы, независящие от времени, и наложены только стационарные идеальные голономные связи, определяется в общем случае формулой ($m(q)$ – некоторая функция обобщенной координаты q):

1) $T = \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{\frac{m(q)}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E-U(q)}}$
2) $T = \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{2m(q)} \frac{dq}{\sqrt{U(q)-E}}$
3) $T = \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{2m(q)} \frac{dq}{\sqrt{E-U(q)}}$
4) $T = \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{\frac{m(q)}{2}} \frac{dq}{\sqrt{U(q)-E)}}$

5.16. Закон движения системы, на которую действуют только потенциальные силы, независящие от времени, и наложены только стационарные идеальные голономные связи, в общем случае одномерного движения выражается неявно в виде ($m(q)$ – некоторая функция обобщенной координаты q):

1) $t - t_0 = \int_{q_0}^{q} \frac{\sqrt{2m(q)}dq}{\pm\sqrt{E-U(q)}}$
2) $t - t_0 = \int_{q_0}^{q} \frac{\sqrt{2m(q)}dq}{\pm\sqrt{U(q)-E}}$
3) $t - t_0 = \int_{q_0}^{q} \frac{\sqrt{\frac{m(q)}{2}}dq}{\pm\sqrt{E-U(q)}}$

4) $t - t_0 = \int_{q_0}^{q} \frac{\sqrt{\frac{m(q)}{2}}dq}{\pm\sqrt{U(q)-E}}$

5.17. Примером одномерного движения является:
1) плоский математический маятник
2) сферический маятник
3) плоский двойной математический маятник
4) любой маятник

5.18. Как изменится частота малых колебаний груза массы m на пружине жесткостью k, если его перевести из горизонтального положение (пружина одним концом закреплена, груз движется по гладкой плоскости) в вертикальное (пружина одним концом закреплена, груз совершает вертикальные колебания)? Трением и силами сопротивления пренебречь.
1) увеличится
2) уменьшится
3) не изменится
4) увеличится или уменьшится в зависимости от соотношения ${}^{k}/_{m}$

5.19. Потенциальная энергия одномерного гармонического осциллятора может быть выражена в виде:
1) $U = -k\dot{x}$
2) $U = kx$
3) $U = \frac{kx^2}{2}$
4) $U = \frac{m\dot{x}^2}{2}$

5.20. Сколько точек остановки имеет одномерный гармонический осциллятор в случае, если его полная энергия отлична от нуля?
1) ни одной
2) 1
3) 2
4) 3

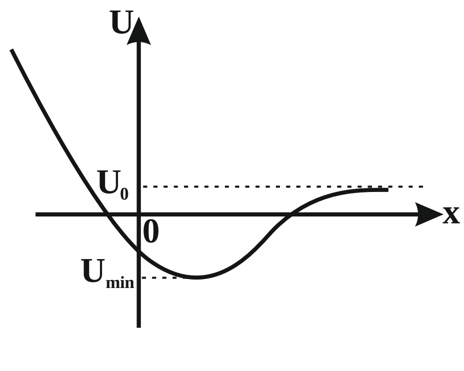

Рис. 5.2

5.21. Сколько точек остановки имеет материальная точка, движущаяся в поле с потенциалом, изображенном на рисунке 5.2 в случае, если ее полная энергия равна нулю?
1) ни одной
2) 1
3) 2
4) 3

5.22. При каких значениях полной энергии E материальной точки, движущейся в поле с потенциалом, изображенном на рисунке 5.2, ее движение будет всегда инфинитным?
1) $E > U_0$
2) $E > 0$
3) $U_{\min} < E < U_0$
4) $E > U_{\min}$

5.23. Сколько точек остановки имеет материальная точка, движущаяся в поле с потенциалом, изображенном на рисунке 5.3 в случае, если ее полная энергия равна нулю?
1) ни одной
2) 0
3) 1
4) 2

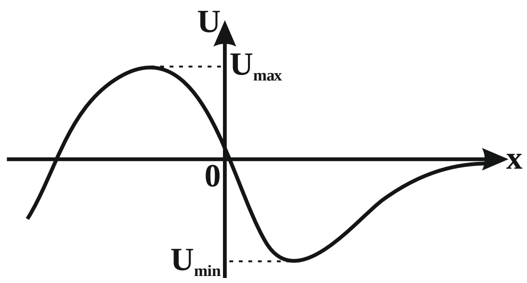

Рис. 5.3

5.24. При каких значениях полной энергии E материальной точки, налетающей из области $x \to +\infty$ на изображенный на рисунке 5.3 потенциал, ее движение будет инфинитным?
1) $0 < E < U_{\max}$
2) $E > U_{\max}$
3) $E > 0$
4) при любых

5.25. При каких значениях полной энергии E материальной точки, обладающей начальной координатой $x_0 > 0$ и находящейся в поле с потенциалом, изображенном на рисунке 5.3, ее движение будет финитным?
1) $U_{\min} < E < U_{\max}$

2) $U_{\min} < E < 0$
3) $E > 0$
4) $E > U_{\max}$

5.26. Сколько точек остановки имеет материальная точка, движущаяся в поле с потенциалом, изображенном на рисунке 5.3, в случае, если ее полная энергия $E > U_{\max}$?
1) ни одной
2) 1
3) 2
4) 3

5.27. Сколько точек остановки имеет материальная точка, налетающая слева (из области $x \to -\infty$) на изображенный на рисунке 5.3 потенциал, если ее полная энергия $E < 0$?
1) ни одной
2) 1
3) 2
4) 3

5.28. Сколько точек остановки имеет материальная точка, движущаяся в поле с потенциалом, изображенном на рисунке 5.4 в случае, если ее полная энергия равна E, а начальная координата отрицательна?
1) 0
2) 1
3) 2
4) 3

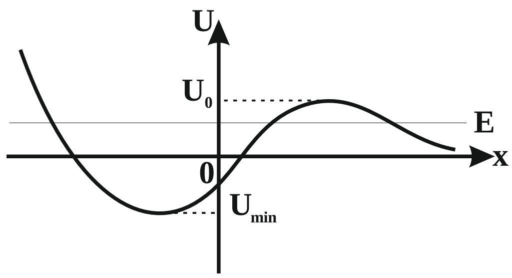

Рис. 5.4

5.29. Сколько точек остановки имеет материальная точка, в поле с потенциалом, изображенном на рисунке 5.4 в случае, если она обладает полной энергией E и налетает из области $x \to +\infty$ на изображенный на рисунке потенциал?
1) 0
2) 1
3) 2

4) 3

5.30. При каких значениях полной энергии E материальной точки, обладающей начальной координатой $x_0 < 0$ и находящейся в поле с потенциалом, изображенном на рисунке 5.4, ее движение будет всегда финитным?

1) $U_{\min} < E < U_0$
2) $E > U_0$
3) $E > 0$
4) при любых

5.31. При каких значениях полной энергии E материальной точки, налетающей из области $x \to +\infty$ на изображенный на рисунке 5.4 потенциал, ее координата в момент остановки будет отрицательной?

1) $0 < E < U_0$
2) $U_{\min} < E < U_0$
3) $E > U_0$
4) при любых

5.32. Одномерное движение является периодическим, если:

1) оно финитно
2) оно инфинитно
3) выполняется условие $U(q) = E$
4) имеется точка остановки

5.33. Период колебаний грузика массой m на пружине жесткостью k равен:

1) $T = \sqrt{\frac{m}{k}}$
2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
3) $T = \sqrt{\frac{k}{m}}$
4) $T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$

5.34. Период малых колебаний плоского математического маятника равен (длина подвеса маятника l):

1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$

2) $T = \sqrt{\frac{g}{l}}$

3) $T = \sqrt{\frac{l}{g}}$

4) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

5.35.* Период малых колебаний материальной точки массы m, которая может двигаться по гладкой параболе $y = kx^2$ (ось y направлена противоположно силе тяжести mg), равен:

1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{mg}{k}}$

2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2gk}}$

3) $T = 2\pi\sqrt{mgk}$

4) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{mk}}$

5.36.* Точка подвеса плоского математического маятника (длина подвеса маятника l) движется вертикально вверх с ускорением a. Период малых колебаний такого маятника равен:

1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{(g-a)^2}}$

2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$

3) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{(g+a)^2}}$

4) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$

5.37.** Закон движения материальной точки массы m с нулевой полной энергией и начальной координатой $x(0) = x_0$ в поле $U(x) = -Ax^4$ выражается в виде:

1) $x(t) = \frac{x_0}{1 \pm x_0 t\sqrt{\frac{2A}{m}}}$

2) $x(t) = 1 \pm x_0 t\sqrt{\frac{2A}{m}}$

3) $x(t) = \frac{1 \pm x_0 t\sqrt{\frac{2A}{m}}}{x_0}$

4) $x(t) = x_0(t\sqrt{\frac{2A}{m}} \pm 1)$

5.38. Какое максимальное количество точек остановки возможно при движении материальной точки в поле с потенциалом, изображенном на рисунке 5.5?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

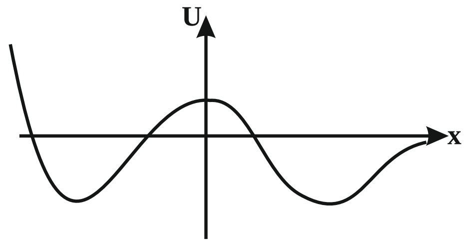

Рис. 5.5

5.39.** Закон движения материальной точки массы m в поле с потенциалом $U(x) = -Ax^2$ при условии, что ее полная энергия равна нулю, выражается в виде (x_0 – начальная координата точки):

1) $x = x_0 \exp(\pm \frac{A}{m} t)$

2) $x = x_0 \exp(\pm \sqrt{\frac{A}{m}} t)$

3) $x = x_0 \exp(\pm \sqrt{\frac{2A}{m}} t)$

4) $x = x_0 \exp(\pm \sqrt{\frac{m}{A}} t)$

5.40.* Частица массой m с энергией E движется в одномерной потенциальной прямоугольной яме ширины a. Период ее движения равен:

1) $T = \sqrt{\frac{2m}{E}} a$

2) $T = \frac{2m}{E} a$

3) $T = \sqrt{\frac{2mE}{a}}$

4) $T = \frac{2mE}{a}$

5.41.** Определить условие финитности движения системы, описываемой функцией Лагранжа $L = a\dot{q}^2 - bq^2$ $(a, b = const > 0)$, если ее полная энергия равна E:

1) $E \geq 0$
2) $E > 0$
3) $E < 0$
4) $E \leq 0$

5.42.** Найти период финитного движения системы, описываемой функцией Лагранжа $L = a\dot{q}^2 - bq^2$ $(a, b = const > 0)$:

1) $T = \frac{2\pi}{3}\frac{a}{b}$
2) $T = \frac{2\pi}{5}\sqrt{\frac{b}{a}}$
3) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{b}}$
4) $T = \frac{\pi}{2}\frac{b}{a}$

5.43.** Определить условие финитности движения системы, описываемой функцией Лагранжа $L = a\frac{\dot{q}^2}{q} - bq - \frac{c}{q}$ $(a, b, c = const > 0)$, если ее полная энергия равна E:

1) $E > 0$
2) $E > 1\sqrt{ab}$
3) $E > 2\sqrt{bc}$
4) $E > 4\sqrt{ac}$

5.44.* Период финитного движения системы, описываемой функцией Лагранжа $L = a\frac{\dot{q}^2}{q} - bq - \frac{c}{q}$ $(a, b, c = const > 0)$, равен:

1) $T = 2\pi\sqrt{b/c}$
2) $T = 2\pi\sqrt{a/b}$
3) $T = 2\pi\sqrt{bc}$
4) $T = 2\pi\sqrt{a/bc}$

5.45.** Определить условие финитности движения системы, описываемой функцией Лагранжа $L = a\dot{q}^2 - b\,\mathrm{tg}^2\,q$ $(a, b = const > 0)$, если ее полная энергия равна E:

1) $E > 0$
2) $E > ab$
3) $E > \sqrt{ab}$
4) $E > ab^2$

5.46.** Период финитного движения системы, описываемой функцией Лагранжа $L = a\dot{q}^2 - b\,\mathrm{tg}^2\,q \quad (a, b = const > 0)$ с полной энергией E, равен:

1) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{E}}$
2) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{E+b}}$
3) $T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{E-b}}$
4) $T = 2\pi\sqrt{\frac{b}{Ea-b}}$

5.47.* Найти период колебаний материальной точки массой m, движущейся в поле с потенциалом:

$$U(x) = \begin{cases} \dfrac{k_1x^2}{2}, x < 0 \\ \dfrac{k_2x^2}{2}, x > 0 \end{cases}$$

1) $T = \pi\sqrt{m}(\frac{1}{\sqrt{k_1}} - \frac{1}{\sqrt{k_2}})$
2) $T = 2\pi\sqrt{m}(\frac{1}{\sqrt{k_1}} - \frac{1}{\sqrt{k_2}})$
3) $T = 2\pi\sqrt{m}(\frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}})$
4) $T = \pi\sqrt{m}(\frac{1}{\sqrt{k_1}} + \frac{1}{\sqrt{k_2}})$

5.48.** Найти период колебаний материальной точки с массой m и энергией E, движущейся в поле с потенциалом:

$$U(x) = \begin{cases} \dfrac{kx^2}{2}, x < 0 \\ kx, x > 0 \end{cases}$$

1) $T = 2\sqrt{\frac{m}{k}}(\sqrt{\frac{2E}{k}} + \frac{\pi}{2})$

2) $T = \sqrt{\frac{2E}{k}} + \pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

3) $T = \sqrt{\frac{m}{k}}(\sqrt{\frac{mE}{k}} + \pi)$

4) $T = \sqrt{\frac{2mE}{k}} + \frac{\pi}{2}$

§ 6. Движение частицы в полях. Задача двух тел

В данном параграфе, если не оговорено иное, под r, φ будем понимать координаты частицы в полярной системе координаты, лежащей в плоскости движения частицы и имеющей начало отсчета в центре силового поля. E, $\boldsymbol{M}$ – обобщенная энергия и момент импульса частицы, соответственно.

6.1. Центральным называется поле:

1) в котором частица движется по окружности с центром в точке O
2) в котором частица движется по спирали
3) в котором потенциальная энергия частицы отсчитывается от центра поля и представляет собой функцию: $U = U(r, \varphi, t)$
4) в котором потенциальная энергия частицы зависит только от расстояния до центра поля

6.2. Общее свойство движения частицы в центральном поле:

1) частица движется равномерно
2) радиус-вектор частицы описывает равные площади за равные промежутки времени
3) движение происходит по поверхности сферы радиуса r
4) движение происходит по поверхности цилиндра радиуса r

6.3. Общее свойство движения частицы в центральном поле:

1) движение происходит в плоскости, не проходящей через центр поля
2) радиальная составляющая r не изменяется с течением времени
3) угол φ изменяется со временем всегда монотонно
4) угол φ изменяется со временем немонотонно

6.4. Чему равна сила, действующая на частицу в центральном поле с потенциалом $U(r)$?

1) $\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра поля в точку нахождения частицы
2) $\boldsymbol{F} = 0$
3) $\boldsymbol{F} = const$
4) $\boldsymbol{F} = -\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра поля в точку нахождения частицы

6.5. Как направлена сила, действующая на частицу в центральном поле?
1) сила направлена вдоль $\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра поля в точку нахождения частицы
2) сила направлена перпендикулярно $\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра поля в точку нахождения частицы
3) сила направлена под углом к $\boldsymbol{r}$, где $\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор, проведенный из центра поля в точку нахождения частицы
4) ни один из вариантов не является верным

6.6. Интегралами движения для механической системы в центральном поле являются:
1) энергия, импульс, момент импульса
2) энергия и импульс
3) энергия и момент импульса
4) импульс и момент импульса

6.7. То, что траектория движения частицы в центральном поле лежит целиком в одной плоскости, можно показать, используя закон сохранения:
1) импульса
2) обобщенной энергии
3) момента импульса относительно центра поля
4) ни один из вариантов не является верным

6.8. Какие из перечисленных ниже координат удобно выбрать для описания движения частицы в центральном поле?
1) декартовы (x, y, z), начало отсчета системы координат поместить в центр поля
2) полярные (r, φ), начало отсчета системы координат поместить в центр поля

3) эллиптические, начало отсчета системы координат поместить в центр поля
4) параболические, начало отсчета системы координат поместить в центр поля

6.9. Функция Лагранжа для частицы массы m, движущейся в центральном поле с потенциалом $U(r)$, может быть записана в виде:
1) $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$
2) $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r)$
3) $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2) + U(r)$
4) $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$

6.10. Дана функция Лагранжа $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$ для частицы массы m, движущейся в центральном поле. Какие координаты являются циклическими?
1) r, φ
2) r, φ, z
3) циклических координат нет
4) φ

6.11. Частица массы m движется в центральном поле. Запишите обобщенный импульс, являющийся интегралом движения. Функция Лагранжа $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$.
1) $p_\varphi = m\dot{\varphi}$
2) $p_r = m\dot{r}$
3) $p_r = mr\dot{\varphi}^2$
4) $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$

6.12. Энергия частицы массы m, движущейся в центральном поле с потенциалом $U(r)$ может быть представлена в виде:
1) $E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r)$
2) $E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$
3) $E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U(r)$
4) $E = \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + U(r)$

6.13.[*] Выразить энергию частицы массы m, движущейся в центральном поле с потенциалом $U(r)$, через момент импульса M:

1) $E = \frac{M^2}{2m} + U(r)$

2) $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$

3) $E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + 2mM^2 + U(r)$

4) $E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{M^2}{2m} + U(r)$

6.14.[*] Частица массы m движется в центральном поле с потенциалом $U(r)$. Расстояние частицы от центра поля определяется выражением (r_0 – координата частицы в начальный момент времени t_0):

1) $t - t_0 = \pm \int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{2}{m}\big(E - U(r)\big) - \frac{M^2}{m^2r^2}}\, dr$

2) $r - r_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(r)\right)}}$

3) $t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(r)\right)-\frac{M^2}{m^2r^2}}}$

4) $t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E+U(r)\right)-\frac{M^2}{r^2}}}$

6.15.[*] Траектория движения частицы массы m в центральном поле с потенциалом $U(r)$ определяется выражением (r_0, φ_0 – координаты частицы в начальный момент времени t_0):

1) $\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(r)\right)-\frac{M^2}{m^2r^2}}}$

2) $\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\pm\sqrt{2m\left(E-U(r)\right)-\frac{M^2}{r^2}}}$

3) $\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(r)\right)-\frac{M^2}{r^2}}}$

4) $\varphi - \varphi_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{\frac{M^2}{r^2}dt}{\pm\sqrt{2m\left(E-U(r)\right)-\frac{M^2}{r^2}}}$

6.16.“Эффективная” потенциальная энергия частицы массы m в центральном поле с потенциалом $U(r)$ определяется выражением:

1) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2}$

2) $U_{eff}(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U(r)$
3) $U_{eff}(r) = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$
4) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$

6.17. Что такое точки поворота в случае движения частицы в центральном поле?

1) значения r, при которых радиальная и угловая скорости $\dot{r} = \dot{\varphi} \neq 0$
2) значения r, при которых радиальная скорость $\dot{r} \neq 0$, а угловая скорость $\dot{\varphi} = 0$
3) значения r, при которых радиальная и угловая скорости $\dot{r} = \dot{\varphi} = 0$
4) значения r, при которых радиальная скорость $\dot{r} = 0$, а угловая скорость $\dot{\varphi} \neq 0$

6.18. Точки поворота в случае частицы массы m, движущейся в центральном поле с потенциалом $U(r)$, определяются из равенства ($U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$):

1) $U_{eff}(r) = E$
2) $U(r) = E$
3) $U(r) = \frac{M^2}{2mr^2}$
4) $\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = E$

6.19.* Движение частицы массы m в центральном поле с потенциалом $U(r)$ является финитным. За время, в течение которого r изменяется от r_{min} до r_{max}, радиус-вектор частицы повернется на угол $\Delta\varphi$, равный:

1) $\Delta\varphi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}}$
2) $\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U)-\frac{M^2}{r^2}}}$
3) $\Delta\varphi = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{r^2}dr}{\sqrt{2m(E-U)}}$
4) $\Delta\varphi = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{M}{mr^2}dr}{\sqrt{2(E-U)-\frac{M^2}{mr^2}}}$

6.20.** Частица совершает финитное движение в центральном поле. Условие замкнутости траектории заключается в том, что угол $\Delta\varphi$, на который повернется радиус-вектор (за время его изменения от минимального расстояния от центра поля до максимального и обратно), равен:

1) $\Delta\varphi = 2\pi$
2) $\Delta\varphi = 2\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)$
3) $\Delta\varphi = 2\pi m$
4) $\Delta\varphi = 2\pi\frac{m}{n}$

где m и n – целые числа.

6.21.** Материальная точка массы m движется в центральном поле с потенциалом $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2} ln\frac{r}{r_0}$ $(\alpha > 0)$. Ее полная энергия равна нулю. Уравнение траектории точки определяется выражением:

1) $r = r_0 exp\left\{(\varphi - C)^2 + \frac{M^2}{2m\alpha}\right\}, C = const$
2) $r = r_0 exp\left\{\frac{m\alpha}{2M^2}(\varphi - C)^2 + \frac{M^2}{2m\alpha}\right\}, C = const$
3) $r = r_0 ln\left\{\frac{m\alpha}{2M^2}(\varphi - C)^2 + \frac{M^2}{2m\alpha}\right\}, C = const$
4) $r = C + r_0 exp\left\{\frac{\varphi^2 M^2}{2m\alpha}\right\}, C = const$

6.22.* Дана функция Лагранжа для сферического маятника (материальной точки массы m, движущейся без трения по поверхности сферы радиуса R): $L = \frac{mR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right) + mgR\cos\theta$. “Эффективная” потенциальная энергия равна:

1) $U_{eff}(\theta) = \frac{M_z^2}{2mR^2} + mgR\cos\theta, M_z = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}$
2) $U_{eff}(\theta) = mgR\cos\theta$
3) $U_{eff}(\theta) = \frac{M_z^2}{2mR^2 sin^2\theta} - mgR\cos\theta$, где $M_z = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}$
4) $U_{eff}(\theta) = \frac{M_z^2}{2mR^2 sin^2\theta} + mgR\cos\theta, M_z = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}$

6.23.** Зависимость от координат потенциала центрального поля, в котором материальная точка может двигаться по гиперболической спирали $r = \frac{const}{\varphi}$, есть:

1) $U(r) = -\frac{const}{\varphi^2}$

2) $U(r) = -\frac{const}{r^2}$

3) $U(r) = -\frac{const}{r}$

4) $U(r) = -\frac{const}{\varphi}$

6.24.* Точке массы m, находящейся на расстоянии r_0 от центра поля $U = k\frac{r^3}{3}$ ($k = const$), сообщена скорость v_0, составляющая угол $\pm\frac{\pi}{2}$ с направлением на центр поля. При каком значении v_0 точка будет двигаться по окружности (r_0 – радиус окружности)?

1) $v_0 = \sqrt{\frac{kr_0^3}{3m}}$

2) $v_0 = \sqrt{\frac{3m}{kr_0^3}}$

3) $v_0 = \sqrt{\frac{kr_0^3}{m}}$

4) $v_0 = \sqrt{\frac{m}{kr_0^3}}$

6.25. Чему равна приведенная масса двух частиц с массами m_1 и m_2?

1) $m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

2) $m = m_1 + m_2$

3) $m = m_1 - m_2$

4) $m = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}$

6.26. Функция Лагранжа двух частиц с массами m_1 и m_2, потенциальная энергия взаимодействия которых зависит только от расстояния между точками и внешние силы отсутствуют, имеет вид ($\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ – радиус-векторы частиц, U – потенциальная энергия их взаимодействия):

1) $L = \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2}{2} + U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$

2) $L = \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2}{2} - U(r_1, r_2)$

3) $L = \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2}{2} - \frac{m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2}{2} - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$

4) $L = \frac{m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2}{2} - U(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)$

6.27. Радиус-вектор центра инерции системы из двух частиц с массами m_1 и m_2 есть:

1) $\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}$
2) $\boldsymbol{R} = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2$
3) $\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1}{m_2} + \frac{m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1}$
4) $\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 - m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1+m_2}$

6.28. Записать функцию Лагранжа для задачи двух тел, выбрав в качестве обобщенных координат системы радиус-вектор центра инерции $\boldsymbol{R}$ и вектор расстояния между точками $\boldsymbol{r}$:

1) $L = \frac{\mu\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2} - \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(r)$
2) $L = \frac{\mu\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2} + \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(r)$
3) $L = \frac{m\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2} + \frac{\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - U(r)$
4) $L = \frac{\mu\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2} + \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + U(r)$

где μ – полная масса, а m – приведенная масса системы.

6.29.* Функция Лагранжа двух частиц с массами m_1 и m_2 и зарядами $q_1 = -q_2 = q$, движущихся в однородном электрическом поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, может быть представлена в виде:

1) $L = \frac{\mu\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2} + \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q^2}{r} + q(\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r})$
2) $L = \frac{\mu\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2} + \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - \frac{q^2}{r} - q(\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r})$
3) $L = \frac{\mu\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2} + \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + \frac{q^2}{r}$
4) $L = \frac{\mu\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2} + \frac{m\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} + q(\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r})$

где μ – полная масса, а m – приведенная масса системы, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ – радиус-векторы частиц.

6.30. Какие из приведенных ниже координат в функции Лагранжа в задаче двух тел являются циклическими ($\boldsymbol{R}$ – радиус-вектор центра инерции системы; r – модуль вектора расстояния между телами)?

1) $r, \boldsymbol{R}$
2) r
3) циклических координат нет

4) $\boldsymbol{R}$

6.31. Какой обобщенный импульс из приведенных ниже в задаче двух тел сохраняется (μ – полная масса, m – приведенная масса системы, $\boldsymbol{R}$ – радиус-вектор центра инерции системы; r – модуль вектора расстояния между телами):

1) $\boldsymbol{P}_R = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} = \mu\dot{\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{P}_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}}$
2) $\boldsymbol{P}_R = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{R}}} = \mu\dot{\boldsymbol{R}}$
3) $\boldsymbol{P}_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}} = m\dot{\boldsymbol{r}}$
4) импульс не сохраняется

6.32.* Потенциальная энергия взаимодействия двух частиц имеет вид $U(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = \frac{k}{2}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2, k = const$. Найдите $\boldsymbol{r}_1(t)$ и $\boldsymbol{r}_2(t)$:

1) $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{R} + \frac{m}{m_1}(\boldsymbol{a}\cos(\omega t) + \boldsymbol{b}sin(\omega t)), \boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{R} - \frac{m}{m_2}(\boldsymbol{a}cos\,(\omega t) + \boldsymbol{b}sin(\omega t))$
2) $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}cos\,(\omega t) + \boldsymbol{b}sin(\omega t)), \boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a}cos\,(\omega t) + \boldsymbol{b}sin(\omega t))$
3) $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{R} - \frac{m}{m_1}\boldsymbol{a}cos\,(\omega t), \boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{R} - \frac{m}{m_2}\boldsymbol{b}sin(\omega t)$
4) $\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{R} + \frac{m}{m_2}(\boldsymbol{a}cos\,(\omega t) + \boldsymbol{b}sin(\omega t)), \boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{R} + \frac{m}{m_1}(\boldsymbol{a}cos\,(\omega t) + \boldsymbol{b}sin(\omega t))$

где $\omega^2 = \frac{k}{m}$, m – приведенная масса, $\boldsymbol{R}$ – радиус-вектор центра инерции системы, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = const.$

6.33.* Записать уравнения движения двух частиц с массами m_1 и m_2 и с противоположными зарядами по модулю равными q, находящихся в однородном электрическом поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, если функция Лагранжа системы имеет вид $L = \frac{\mu\dot{\boldsymbol{R}}^2}{2} + \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{q^2}{r} + q\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}$:

1) $\mu\ddot{\boldsymbol{R}} = -q^2\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} + q\boldsymbol{\mathcal{E}}, m\ddot{\boldsymbol{r}} = 0$
2) $\mu\ddot{\boldsymbol{R}} = q\boldsymbol{\mathcal{E}}, m\ddot{\boldsymbol{r}} = -q^2\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$
3) $\mu\ddot{\boldsymbol{R}} = 0, m\ddot{\boldsymbol{r}} = -q^2\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} + q\boldsymbol{\mathcal{E}}$
4) $\mu\ddot{\boldsymbol{R}} = -q^2\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, m\ddot{\boldsymbol{r}} = q\boldsymbol{\mathcal{E}},$

где μ – полная масса, m – приведенная масса системы, $\boldsymbol{R}$ – радиус-вектор центра инерции системы, $\boldsymbol{r}$ – вектор относительного расстояния между частицами.

6.34.* Потенциальная энергия взаимодействия двух точек с массами m_1 и m_2 равна $U = \frac{k}{2}(|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| - a)^2, \quad k, a = const.$ "Эффективная" потенциальной энергии системы равна:

1) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{k}{2}(r-a)^2$
2) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{k}{2}(r-a)^2$
3) $U_{eff}(r) = \frac{k}{2}(r-a)^2$
4) $U_{eff}(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{k}{2}(r-a)^2$

где m – приведенная масса системы, $r = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$.

6.35. Порог реакции $He^4+N^{14} \rightarrow O^{17}+H^1$ равен E_0. Какую минимальную энергию должна иметь частица массы m_1, налетающая на неподвижное ядро атома азота с массой m_2, чтобы произошла реакция?

1) $T_1 = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2} E_0$
2) $T_1 = \frac{m_1+m_2}{m_2} E_0$
3) $T_1 = \frac{m_1+m_2}{m_1} E_0$
4) $T_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} E_0$

6.36. Дана функция Лагранжа $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\alpha}{r^3}$ $(\alpha = const)$ для частицы массы m, движущейся в центральном поле. Ее "эффективная" потенциальная энергия равна:

1) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^3}$
2) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2m(r^2+\varphi^2)} - \frac{\alpha}{r^3}$
3) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r^3}$
4) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha^2}{r^6}$

6.37. Функция Лагранжа частицы массы m, движущейся по гладкой поверхности кругового конуса с вертикально направленной осью симметрии и углом раствора 2α (раствор конуса направлен вверх), $L = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2\sin^2\alpha} - mgr\cos\alpha$, где $M = mr^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}$, r – расстояние от начала координат, помещенного в вершину конуса, до частицы, φ –

азимутальный угол. “Эффективная” потенциальная энергия частицы равна:

1) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - mgr\cos\alpha$
2) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + mgr\cos\alpha$
3) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$
4) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2}\sin^2\alpha - mgr\cos\alpha$

6.38. При движении в центральном поле траектория частицы является симметричной при отражении относительно любой прямой, соединяющей центр поля с:

1) любой точкой пространства
2) точкой поворота
3) точкой, в которой скорость частицы максимальна
4) точкой, в которой скорость частицы минимальна

6.39.* Частица массы m совершает финитное движение в центральном поле с потенциалом $U = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$ $(\alpha, \beta = const, \alpha > 0, \beta > 0)$. Ее точки поворота определяются следующими выражениями:

1) $\frac{1}{r_{min}} = \frac{\sqrt{\alpha^2+4E\left(\beta+\frac{M^2}{2m}\right)}}{2\alpha+\frac{M^2}{m}}$, $\frac{1}{r_{max}} = \frac{\sqrt{\alpha^2-4E\left(\beta+\frac{M^2}{2m}\right)}}{2\alpha+\frac{M^2}{m}}$
2) $\frac{1}{r_{min}} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\frac{M^2}{2m}}}{2\beta+\frac{M^2}{m}}$, $\frac{1}{r_{max}} = \frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2-\frac{M^2}{2m}}}{2\beta+\frac{M^2}{m}}$
3) $\frac{1}{r_{min}} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4E\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}$, $\frac{1}{r_{max}} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4E\left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)}$
4) $\frac{1}{r_{min}} = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+4E\left(\beta+\frac{M^2}{2m}\right)}}{2\beta+\frac{M^2}{m}}$, $\frac{1}{r_{max}} = \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+4E\left(\beta+\frac{M^2}{2m}\right)}}{2\beta+\frac{M^2}{m}}$

6.40. Материальная точка массы m движется в поле с потенциалом $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}\ln\frac{r}{r_0}$ $(\alpha > 0)$. Ее “эффективная” потенциальная энергия равна:

1) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r^2}\ln\frac{r}{r_0}$
2) $U_{eff}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r^2}\ln\frac{r}{r_0}$
3) $U_{eff}(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\alpha}{r^2}\ln\frac{r}{r_0}$

4) $U_{eff}(r) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r^2} ln\frac{r}{r_0}$

6.41.* Частица массы m совершает финитное движение в центральном поле с потенциалом $U = -\frac{\alpha}{r}$ $(\alpha = const, \alpha > 0)$. Точки поворота частицы определяются следующими выражениями:

1) $\frac{1}{r_{min}} = \frac{2mE}{M^2} + \frac{1}{M}\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{M^2} + 2mE},\ \frac{1}{r_{max}} = \frac{2mE}{M^2} - \frac{1}{M}\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{M^2} + 2mE}$

2) $\frac{1}{r_{min}} = \frac{m\alpha}{M^2} + \frac{2mE}{M},\ \frac{1}{r_{max}} = \frac{m\alpha}{M^2} - \frac{2mE}{M}$

3) $\frac{1}{r_{min}} = \frac{m\alpha}{M^2} + \frac{1}{M}\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{M^2} + 2mE}, \frac{1}{r_{max}} = \frac{m\alpha}{M^2} - \frac{1}{M}\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{M^2} + 2mE}$

4) $\frac{1}{r_{min}} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{M^2} + 2mE},\ \frac{1}{r_{max}} = \frac{1}{M}\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{M^2} + 2mE}$

6.42.* Частица массы m совершает финитное движение в центральном поле с потенциалом $U = \frac{\beta}{r^2}$ $(\beta = const, \beta > 0)$. Ее точки поворота определяются следующими выражениями:

1) $r_{min} = \left(\frac{\beta}{E} - \frac{M^2}{2mE}\right)^2,\ r_{max} = \left(\frac{\beta}{E} + \frac{M^2}{2mE}\right)^2$

2) $r_{min} = \frac{\beta}{E} - \frac{M^2}{2mE},\ r_{max} = \frac{\beta}{E} + \frac{M^2}{2mE}$

3) $r_{min} = -\sqrt{\frac{\beta}{E} - \frac{M^2}{2mE}},\ r_{max} = \sqrt{\frac{\beta}{E} - \frac{M^2}{2mE}}$

4) $r_{min} = -\sqrt{\frac{\beta}{E} + \frac{M^2}{2mE}},\ r_{max} = \sqrt{\frac{\beta}{E} + \frac{M^2}{2mE}}$

6.43.* Частица массы m совершает финитное движение в центрально-симметричном поле с потенциалом $U = \frac{k}{2}r^2$ $(k = const, k > 0)$. Ее точки поворота определяются следующими выражениями:

1) $r_{min}^2 = \frac{1}{k}\left(E - \sqrt{E^2 - \frac{kM^2}{m}}\right),\ r_{max}^2 = \frac{1}{k}\left(E + \sqrt{E^2 - \frac{kM^2}{m}}\right)$

2) $r_{min}^2 = E - \sqrt{E^2 - \frac{kM^2}{m}},\ r_{max}^2 = E + \sqrt{E^2 - \frac{kM^2}{m}}$

3) $r_{min}^2 = E - \sqrt{E^2 + \frac{kM^2}{m}},\ r_{max}^2 = E + \sqrt{E^2 + \frac{kM^2}{m}}$

4) $r_{min}^2 = \frac{1}{k}\left(M - \sqrt{E^2 - \frac{kM^2}{m}}\right),\ r_{max}^2 = \frac{1}{k}\left(M + \sqrt{E^2 - \frac{kM^2}{m}}\right)$

6.44.** Материальная точка массы m движется в поле $U = -\frac{\alpha}{r^6}, \alpha = const > 0$. Полная энергия равна нулю. Траектория точки определяется выражением:

1) $r = \frac{\sqrt{2m\alpha}}{M} cos2(\varphi + C)$
2) $r^2 = \frac{\sqrt{2m\alpha}}{M} cos2(\varphi + C)$
3) $r = \frac{\sqrt{2m\alpha}}{M} cos^2(\varphi + C)$
4) $r^2 = \frac{\sqrt{2m\alpha}}{M} cos^2(\varphi + C)$

где $C = const.$

6.45.** Материальная точка массы m движется в поле $U = -\frac{\alpha}{r}$ $(\alpha = const, \alpha > 0)$. Траектория точки определяется выражением:

1) $r = \frac{p}{1+ecos\varphi}$
2) $r = \frac{p}{1-ecos\varphi}$
3) $r = \frac{p}{1+esin\varphi}$
4) $r = \frac{e}{1+pcos\varphi}$

где $p = \frac{M^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$.

6.46.** Материальная точка массы m движется в поле $U = -\frac{\alpha}{r^2}$ $(\alpha = const, \alpha > 0)$. Траектория точки определяется выражением:

1) $r = \frac{1}{\left(asin(\omega\varphi)+bcos(\omega\varphi)\right)^2}$
2) $r = \frac{1}{\sqrt{a^2sin^2(\omega\varphi)-b^2cos^2(\omega\varphi)}}$
3) $r = \frac{1}{acos^2(\omega\varphi)+bsin^2(\omega\varphi)}$
4) $r = \frac{1}{acos(\omega\varphi)+bsin(\omega\varphi)}$

где $\omega = \sqrt{1 + \frac{2m\alpha}{M^2}}, a, b = const.$

6.47. Материальная точка массы m движется в поле $U = -\frac{\alpha}{r^2}$ $(\alpha = const, \alpha > 0)$. Ее “эффективная” потенциальная энергия равна:

1) $U_{eff}(r)=\frac{M^2}{2mr^2}-\frac{\alpha}{r^2}$
2) $U_{eff}(r)=\frac{M^2}{2mr^2}+\frac{\alpha^2}{r^4}$
3) $U_{eff}(r)=\frac{M^2}{2mr^2}+\frac{\alpha}{r^2}$
4) $U_{eff}(r)=\frac{M^2}{2mr^2}-\frac{\alpha^2}{r^4}$

6.48. Материальная точка массы m движется в поле $U=-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}$ $(\alpha,\beta=const,\alpha>0,\beta>0)$. Ее “эффективная” потенциальная энергия равна:
1) $U_{eff}(r)=\frac{M^2}{2mr^2}+\frac{\alpha}{r}-\frac{\beta}{r^2}$
2) $U_{eff}(r)=\frac{M^2}{2mr^2}+\frac{\alpha^2}{r^2}-\frac{\beta^2}{r^4}$
3) $U_{eff}(r)=\frac{M^2}{2mr^2}-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}$
4) $U_{eff}(r)=\frac{M^2}{2mr^2}-\frac{\alpha^2}{r^2}+\frac{\beta^2}{r^4}$

6.49.** Материальная точка массы m движется в поле $U=-\frac{\alpha}{r}+\frac{\beta}{r^2}$ $(\alpha,\beta=const,\alpha>0,\beta>0)$. Траектория точки определяется выражением:
1) $r=\frac{p}{1+e\cos(\omega\varphi)}$
2) $r=\frac{p}{1-e\cos(\omega\varphi)}$
3) $r=\frac{p}{1+e\sin(\omega\varphi)}$
4) $r=\frac{e}{1+p\cos(\omega\varphi)}$

где $p=\frac{2\beta}{\alpha}+\frac{M^2}{m\alpha}$, $e=\sqrt{1+\frac{4E}{\alpha^2}\left(\beta+\frac{M^2}{2m}\right)}$, $\omega=\sqrt{1+\frac{2m\beta}{M^2}}$.

6.50. Частица массы m и заряда q движется в магнитном поле бесконечного прямого тока (I – сила тока). Ее функция Лагранжа в цилиндрических координатах (ρ,φ,z): $L=\frac{m}{2}(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2)-\frac{2qI}{c^2}ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\dot z$, $(\rho_0=const$, c – скорость света). “Эффективная” потенциальная энергия частицы равна:
1) $U_{eff}(\rho)=\frac{M_z^2}{2m\rho^2}+\frac{2qI}{c^2}ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$
2) $U_{eff}(\rho)=\frac{M_z^2}{2m\rho^2}+\frac{1}{2}\left(p_z+\frac{2qI}{c^2}ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right)^2$

3) $U_{eff}(\rho) = \frac{M_z^2}{2m\rho^2} - \frac{1}{2}\left(p_z - \frac{2qI}{c^2} ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right)^2$

4) $U_{eff}(\rho) = \frac{M_z^2}{2m\rho^2} + \left(\frac{2qI}{c^2} ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right)^2$,

где $p_z = m\dot{z} - \frac{2qI}{c^2} ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right),\ M_z = m\rho^2\dot{\varphi}.$

6.51.** Частица массы m и заряда q движется в магнитном поле бесконечного прямого тока (I – сила тока). Ее функция Лагранжа в цилиндрических координатах (ρ, φ, z): $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{2qI}{c^2} ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\dot{z}$ ($\rho_0 = const$, c – скорость света). Зависимость $\rho(t)$ в квадратурах есть:

1) $t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{2qI}{c^2} ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right)}}, \rho_0 = \rho(t_0)$

2) $t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{2qI}{c^2} ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right)}}, \rho_0 = \rho(t_0)$

3) $t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \left[\frac{M_z^2}{2m\rho^2} - \frac{1}{2}\left(p_z + \frac{2qI}{c^2} ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right)^2\right]\right)}}, \rho_0 = \rho(t_0)$

4) $t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \left[\frac{M_z^2}{2m\rho^2} + \frac{1}{2}\left(p_z + \frac{2qI}{c^2} ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right)^2\right]\right)}}, \rho_0 = \rho(t_0)$,

где $p_z = m\dot{z} - \frac{2qI}{c^2} ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right),\ M_z = m\rho^2\dot{\varphi}.$

6.52.* Частица массы m и заряда q движется в поле магнитного диполя. Ее функция Лагранжа в цилиндрических координатах (ρ, φ, z): $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{q\mu}{c\rho}\dot{\varphi}$ ($\mu = const$, c – скорость света). “Эффективная” потенциальная энергия частицы равна:

1) $U_{eff}(\rho) = \frac{M_z^2}{2m\rho^2} - \frac{q\mu}{c\rho}$

2) $U_{eff}(\rho) = \frac{M_z^2}{2m\rho^2} + \frac{q\mu}{c\rho}$

3) $U_{eff}(\rho) = \frac{\left(M_z - \frac{q\mu}{c\rho}\right)^2}{2m\rho^2}$

4) $U_{eff}(\rho) = \frac{\left(M_z + \frac{q\mu}{c\rho}\right)^2}{2m\rho^2}$,

где $M_z = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{q\mu}{c\rho}$.

6.53.** Частица массы m и заряда q движется в поле магнитного диполя. Ее функция Лагранжа в цилиндрических координатах (ρ, φ, z): $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + \frac{q\mu}{c\rho}\dot{\varphi}$ ($\mu = const$, c – скорость света). Зависимость $\rho(t)$ в квадратурах есть:

1) $t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \left[\frac{M_z^2}{2m\rho^2} + \frac{q\mu}{c\rho}\right]\right)}}, \rho_0 = \rho(t_0)$

2) $t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \left[\frac{M_z^2}{2m\rho^2} + \frac{q\mu}{c\rho}\right]\right)}}, \rho_0 = \rho(t_0)$

3) $t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\left(M_z - \frac{q\mu}{c\rho}\right)^2}{2m\rho^2}\right)}}, \rho_0 = \rho(t_0)$

4) $t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{\left(M_z - \frac{q\mu}{c\rho}\right)^2}{2m\rho^2}\right)}}, \rho_0 = \rho(t_0)$,

где $M_z = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{q\mu}{c\rho}$.

6.54. Частица массы m движется в центральном поле $U = -\frac{\alpha}{r}, \alpha > 0$ по орбите: $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$, где $p = \frac{M^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$. Траекторией ее движения в случае $E > 0$ будет:

1) парабола
2) гипербола
3) эллипс
4) окружность

6.55. Частица массы m движется в центральном поле $U = -\frac{\alpha}{r}, \alpha > 0$ по орбите: $r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$, где $p = \frac{M^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$. Траекторией ее движения в случае $E = 0$ будет:

1) парабола
2) гипербола
3) эллипс
4) окружность

6.56. Частица массы m движется в центральном поле $U = -\frac{\alpha}{r}, \alpha > 0$ по орбите: $r = \frac{p}{1+ecos\varphi}$, где $p = \frac{M^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$. Траекторией ее движения в случае $\left(U_{eff}\right)_{min} < E < 0$ будет:

1) парабола
2) гипербола
3) эллипс
4) окружность

6.57. Частица массы m движется в центральном поле $U = -\frac{\alpha}{r}, \alpha > 0$ по орбите: $r = \frac{p}{1+ecos\varphi}$, где $p = \frac{M^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$. Траекторией ее движения в случае $E = \left(U_{eff}\right)_{min}$ будет:

1) парабола
2) гипербола
3) эллипс
4) окружность

6.58. Уравнение, которое в применении к движению планет солнечной системы лежит в основе первого закона Кеплера, есть:

1) $r = \frac{p}{1+ecos\varphi}$
2) $r = \frac{p}{1-ecos\varphi}$
3) $r = \frac{p}{1+esin\varphi}$
4) $r = \frac{e}{1+pcos\varphi}$

где $p = \frac{M^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 - \frac{2|E|M^2}{m\alpha^2}}$, m – масса планеты.

6.59. В применении к движению планет солнечной системы следующее утверждение представляет собой второй закон Кеплера:

1) секториальная скорость постоянна

2) полная энергия сохраняется
3) траектории финитного движения в кулоновом поле замкнуты
4) финитное движение в кулоновом поле является периодическим

6.60. Отношение больших полуосей орбит двух планет $\left(\frac{a}{a^*}\right)$ и отношение периодов их обращения вокруг Солнца $\left(\frac{T}{T^*}\right)$ связаны соотношением, представляющим собой третий закон Кеплера:
1) $\left(\frac{T}{T^*}\right) = \left(\frac{a}{a^*}\right)^2$
2) $\left(\frac{T}{T^*}\right)^2 = \left(\frac{a}{a^*}\right)^3$
3) $\left(\frac{T}{T^*}\right)^3 = \left(\frac{a}{a^*}\right)^4$
4) $\left(\frac{T}{T^*}\right)^2 = \left(\frac{a}{a^*}\right)^4$

§ 7. Рассеяние частиц. Падение частиц на силовой центр

7.1. Прицельным расстоянием ρ в задаче рассеяния однородного потока одинаковых частиц называется:
1) расстояние между силовым центром и ближайшей точкой траектории потока частиц
2) расстояние, на котором поток частиц прошел бы от силового центра при отсутствии взаимодействия с последним
3) расстояние, на котором поток частиц проходит от силового центра при учете взаимодействия с последним
4) расстояние между силовым центром и точкой испускания частиц

7.2. Траектория каждой из частиц однородного потока, рассеивающегося на силовом центре с потенциалом $U = U(r)$:
1) лежит в одной плоскости
2) не лежит в одной плоскости
3) является замкнутой
4) не подчиняется ни одному из вышеперечисленных условий

7.3. Углом рассеяния в задаче рассеяния однородного потока одинаковых частиц называется:
1) угол отклонения частиц потока от первоначальной траектории
2) угол разлета частиц из потока
3) угол между исходной траекторией частиц и отрезком, проведенным из силового центра в ближайшую к силовому центру точку орбиты
4) ни один из перечисленных ответов не является верным

7.4. Количественной характеристикой процесса рассеяния является:
1) дифференциальное эффективное сечение рассеяния
2) полное сечение рассеяния
3) угол рассеяния
4) все перечисленные ответы

7.5. В случае рассеяния однородного потока одинаковых частиц в постоянном центральном поле сохраняется:
1) энергия
2) энергия и момент импульса
3) энергия и импульс
4) импульс и момент импульса

7.6. Дифференциальное эффективное сечение рассеяния определяется как:
1) число рассеянных частиц в единицу времени, отнесенное к плотности потока налетающих частиц
2) число рассеянных частиц в единицу времени, отнесенное к числу налетающих частиц
3) число рассеянных частиц в интервал углов $[\chi, \chi + d\chi]$ в единицу времени, отнесенное к плотности потока налетающих частиц
4) число рассеянных частиц в интервал углов $[\chi, \chi + d\chi]$ в единицу времени, отнесенное к числу налетающих частиц

7.7. Полное сечение рассеяния определяется как:
1) число рассеянных частиц в единицу времени, отнесенное к плотности потока налетающих частиц
2) число рассеянных частиц в единицу времени, отнесенное к числу налетающих частиц
3) число рассеянных частиц в интервал углов $[\chi, \chi + d\chi]$ в единицу времени, отнесенное к плотности потока налетающих частиц

4) число рассеянных частиц в интервал углов $[\chi, \chi + d\chi]$ в единицу времени, отнесенное к числу налетающих частиц

7.8. Полное сечение рассеяния:

1) измеряется в единицах длины
2) измеряется в единицах площади
3) измеряется в единицах объема
4) является безразмерной величиной

7.9. Дифференциальное эффективное сечение рассеяния $d\sigma$, выраженное через элемент угла рассеяния $d\chi$, задается в следующем виде ($\rho(\chi)$ – прицельное расстояние):

1) $d\sigma = \rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\chi$
2) $d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{2\pi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\chi$
3) $d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\chi$
4) $d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{sin\chi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| d\chi$

7.10. Дифференциальное эффективное сечение рассеяния $d\sigma$, выраженное через элемент телесного угла do, задается в следующем виде (χ – угол рассеяния, ρ – прицельное расстояние):

1) $d\sigma = \rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| do$
2) $d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{2\pi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| do$
3) $d\sigma = 2\pi\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| do$
4) $d\sigma = \frac{\rho(\chi)}{sin\chi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right| do$

7.11. Дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц в поле бесконечного потенциального барьера с радиусом a ($U = \infty$ при $r < a, U = 0$ при $r > a$) равно (do - элемент телесного угла):

1) $d\sigma = a^2 do$
2) $d\sigma = \frac{a^2}{4} do$
3) $d\sigma = \frac{a^2}{4} do$
4) $d\sigma = \frac{a^2}{4} do$

7.12. Полное сечение рассеяния частиц в поле бесконечного потенциального барьера с радиусом a ($U = \infty$ при $r < a, U = 0$ при $r > a$) равно:

1) πa^2
2) πa
3) $2\pi a$
4) $2\pi a^2$

7.13. Однородный поток частиц массы m с начальной скоростью v_∞ налетает из бесконечности на силовой центр, энергия взаимодействия с которым равна $U = U(r)$. Угол рассеяния χ для частицы массой m налетающей на силовой центр с прицельным расстоянием ρ может быть выражен формулой (r_{min} – минимальное расстояние между частицами и центром):

1) $\chi = \left| \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho/_{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}} \right|$

2) $\chi = \left| \pi - \frac{1}{2}\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho/_{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}} \right|$

3) $\chi = \left| \frac{\pi}{2} - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho/_{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}} \right|$

4) $\chi = \left| \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho/_{r^2} dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}} \right|$

7.14. Рассеяние частиц на силовом центре представляет собой пример:

1) финитного движения
2) инфинитного движения
3) периодического движения
4) одномерного движения

7.15. Угол рассеяния χ в задаче рассеяния однородного потока частиц может изменяться в следующих пределах:

1) $0 < \chi \leq \pi/2$
2) $0 \leq \chi \leq \pi$
3) $0 < \chi \leq 3\pi/2$
4) $0 \leq \chi \leq 2\pi$

7.16. Полная энергия E частицы массы m в задаче рассеяния однородного потока частиц, налетающих из бесконечности с начальной скоростью v_∞ и прицельным расстоянием ρ на силовой центр, энергия взаимодействия с которым $U = U(r)$, равна:
1) $E = U$
2) $E = \frac{mv_\infty^2}{2}$
3) $E = \frac{mr^2}{2}$
4) $E = \frac{m\rho^2}{2}$

7.17. Момент импульса M частицы массы m в задаче рассеяния однородного потока частиц, налетающих из бесконечности на силовой центр с прицельным расстоянием ρ, равен (v_∞ – скорость частиц на бесконечном удалении от силового центра):
1) $M = \frac{mv_\infty}{\rho}$
2) $M = \frac{mv_\infty}{2\rho}$
3) $M = mv_\infty\rho$
4) $M = \frac{m\rho^2}{2}v_\infty$

7.18.* Однородный поток частиц с начальной скоростью v_∞ налетает из бесконечности на силовой центр, энергия взаимодействия с которым равна $U = U(r)$. Минимальное расстояние r_{min} между частицей массой m, налетающей на силовой центр с прицельным расстоянием ρ, может быть определено из уравнения:
1) $1 - \frac{\rho^2}{r_{min}^2} - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2} = 0$
2) $r_{min}^2 - \frac{U(r)\rho^2}{mv_\infty^2} = 0$
3) $\rho^2 - r_{min}^2 - \frac{U(r)}{mv_\infty^2} = 0$
4) $r_{min}^2 - \frac{2U(r)}{mv_\infty^2} - \rho = 0$

7.19. Формула Резерфорда определяет:

1) дифференциальное сечение рассеяния частиц в поле $U(r) = \frac{\alpha}{r}$
2) дифференциальное сечение рассеяния частиц в поле $U(r) = \frac{\alpha}{r^2}$
3) дифференциальное сечение рассеяния частиц в поле $U(r) = \frac{\alpha}{r^3}$
4) дифференциальное сечение рассеяния частиц в поле $U(r) = \frac{\alpha}{r^4}$

7.20. С уменьшением прицельного расстояния при рассеянии однородного потока одинаковых частиц в кулоновом поле угол рассеяния:

1) сначала убывает, потом возрастает
2) сначала возрастает, потом убывает
3) монотонно возрастает
4) монотонно убывает

7.21. Полное сечение упругого рассеяния для шариков радиуса R, налетающих на такие же, но покоящиеся, шарики, равно:

1) $\frac{\pi}{2}R^2$
2) πR^2
3) $2\pi R^2$
4) $4\pi R^2$

7.22. “Падение” (захват) частицы на силовой центр возможно при условии, накладываемом на потенциальную энергию при $r \to 0$:

1) $U(r) \to E$
2) $U(r) \to +\infty$
3) $U(r) \to -\infty$
4) $U(r) \to 0$

7.23. “Падение” (захват) частицы массой m с моментом импульса M на силовой центр с потенциалом $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ $(\alpha = const > 0)$возможно при условии:

1) $\alpha > \frac{M^2}{2m}$
2) $\alpha = 0$
3) $\alpha < \frac{M^2}{2m}$
4) $\alpha > 0$

7.24. "Падение" (захват) частицы массой m с моментом импульса M на силовой центр с потенциалом $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n} (n > 2,\ \alpha = const > 0)$ возможно при условии:

1) $\alpha > \frac{M^2}{2m}$
2) $\alpha > \frac{M}{2m}$
3) $\alpha > \frac{M^2}{m}$
4) при любом положительном значении α

7.25. "Падение" (захват) частицы массой m с моментом импульса M на силовой центр с потенциалом $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ $(\alpha = const)$ возможно при условии:

1) $\alpha < \frac{M^2}{2m}$
2) $\alpha > \frac{M^2}{2m}$,
3) при любых значениях α
4) «падение» (захват) частицы невозможен

7.26. Полное сечение захвата в центр поля определяется как:

1) число захваченных частиц, отнесенное к плотности потока налетающих частиц
2) число захваченных частиц, отнесенное к числу налетающих частиц
3) число захваченных частиц в единицу времени, отнесенное к плотности потока налетающих частиц
4) число захваченных частиц в единицу времени, отнесенное к числу налетающих частиц

7.27. Если известно, что силовым центром захватываются только частицы с прицельным расстоянием не более некоторого ρ_{max}, то полное сечение захвата σ может быть найдено по формуле:

1) $\sigma = \frac{1}{2}\rho_{max}$
2) $\sigma = \pi\rho_{max}^2$
3) $\sigma = \frac{1}{2}\sqrt{\rho_{max}}$
4) $\sigma = 2\pi\rho_{max}$

7.28. Если известно, что эффективный потенциал $U_{eff}(r)$ силового центра имеет абсолютный максимум, равный U_{eff}^{max} в некоторой точке $r = r_0$, то возможные значения прицельного расстояния ρ, при которых поток налетающих частиц с энергией E будет захвачен этим силовым центром, определяются из условия:

1) $U_{eff}^{max}(r_0) = E$
2) $U_{eff}^{max}(r_0) \geq E$
3) $U_{eff}^{max}(r_0) \leq E$
4) $U_{eff}^{max}(r_0) > E$

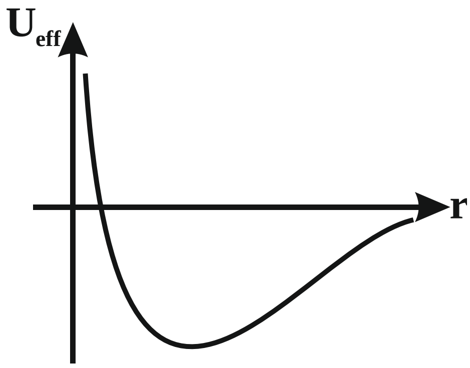

Рис. 7.1

7.29. Захват частиц с полной энергией E в центр поля с эффективным потенциалом U_{eff}, изображенным на рисунке 7.1, возможен в случае:

1) $E < 0$
2) $E > 0$
3) при любом значении полной энергии E
4) ни при каком значении полной энергии E

7.30. Рассеяние частиц с полной энергией E в центральном поле с эффективным потенциалом U_{eff}, изображенным на рисунке 7.1, возможно в случае:

1) $E < 0$
2) $E > 0$
3) при любом значении полной энергии E
4) ни при каком значении полной энергии E

7.31. Захват частиц с полной энергией E в центр поля с эффективным потенциалом U_{eff}, изображенным на рисунке 7.2, возможен в случае:

1) $E < U_{max}$
2) $E > U_{max}$
3) $E > 0$
4) ни при каком значении полной энергии

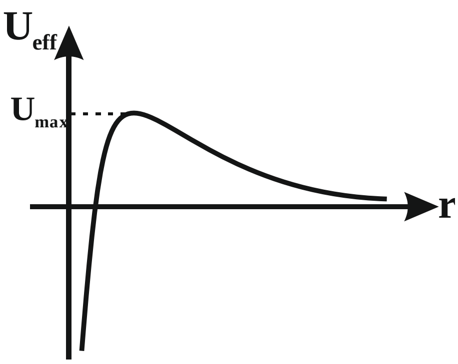

Рис. 7.2

7.32. Рассеяние частиц, налетающих из бесконечности с полной энергией E в центральном поле с эффективным потенциалом U_{eff}, изображенным на рисунке 7.2, возможно в случае:

1) $E < U_{max}$
2) $E > U_{max}$
3) $E = 0$
4) ни при каком значении полной энергии

7.33. Какие возможны типы движения частицы в поле, эффективный потенциал которого изображен на рисунке 7.2:

1) только финитное
2) только инфинитное
3) финитное или захват
4) инфинитное или захват

7.34.* Полное сечение захвата σ для частицы массой m, налетающей из бесконечности со скоростью v_∞ на силовой центр с потенциалом $U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}$ $(\alpha > 0)$, равно:

1) $\sigma = 0$
2) $\sigma = \frac{mv_\infty^2}{\pi\alpha}$
3) $\sigma = \frac{2\pi}{\alpha m v_\infty^2}$
4) $\sigma = \frac{2\pi\alpha}{mv_\infty^2}$

7.35.** Полное сечение захвата σ для частицы массой m, налетающей из бесконечности на силовой центр с потенциалом $U(r) = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^4}$, равно ($E$ – полная энергия частицы, $\alpha, \beta > 0$):

1) $\sigma = \pi(2\sqrt{\frac{\beta}{E}} - \frac{\alpha}{E})$
2) $\sigma = \pi(\frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2})$
3) $\sigma = \pi(\frac{\beta}{E} - \sqrt{\frac{\alpha}{E}})$
4) $\sigma = 0$

7.36. Полное сечение захвата σ для частицы массой m, налетающей из бесконечности на силовой центр с потенциалом $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$ $(\beta >$

$M^2/_{2m}$), равно (E, M – полная энергия и момент импульса частицы соответственно):

1) $\sigma = \pi(2\sqrt{\frac{\beta}{E}} - \frac{\alpha}{E})$
2) $\sigma = \pi(\frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2})$
3) $\sigma = \pi(\frac{\beta}{E} - \sqrt{\frac{\alpha}{E}})$
4) $\sigma = 0$

7.37.** Полное сечение захвата σ для частицы массой m, налетающей из бесконечности со скоростью v_∞ на силовой центр с потенциалом $U(r) = -\frac{\alpha}{r^3}$ $(\alpha > 0)$, равно:

1) $\sigma = 5\pi(\sqrt[5]{\frac{\alpha^2}{27m^2{v_\infty}^4}})$
2) $\sigma = 3\pi(\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{m^2{v_\infty}^4}})$
3) $\sigma = \frac{\pi}{v_\infty}(\sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{m^2}})$
4) $\sigma = 2\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2}})$

7.38.** Полное сечение захвата σ для частицы массой m, налетающей из бесконечности со скоростью v_∞ на силовой центр с потенциалом $U(r) = -\frac{\alpha}{r^4}$ $(\alpha > 0)$, равно:

1) $\sigma = 5\pi(\sqrt[5]{\frac{\alpha^2}{27m^2{v_\infty}^4}})$
2) $\sigma = 3\pi(\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{m^2{v_\infty}^4}})$
3) $\sigma = 2\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2}})$
4) $\sigma = \frac{\pi}{v_\infty}(\sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{m^2}})$

7.39.** Полное сечение захвата σ для частицы массой m, налетающей из бесконечности со скоростью v_∞ на силовой центр с потенциалом $U(r) = -\frac{\alpha}{r^5}$ $(\alpha > 0)$, равно:

1) $\sigma = 5\pi(\sqrt[5]{\frac{\alpha^2}{27m^2{v_\infty}^4}})$

2) $\sigma = 3\pi(\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{m^2{v_\infty}^4}})$

3) $\sigma = 2\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{\alpha}{m{v_\infty}^2}})$

4) $\sigma = \frac{\pi}{v_\infty}(\sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{m^2}})$

7.40.** Полное сечение захвата σ для частицы массой m, налетающей из бесконечности со скоростью v_∞ на силовой центр с потенциалом $U(r) = \frac{\alpha}{r^n}$ $(\alpha > 0, n > 2)$, равно:

1) $\sigma = 0$

2) $\sigma = \pi(\frac{\alpha}{mv_\infty^2})^2$

3) $\sigma = \pi n \frac{\alpha}{mv_\infty^2}(n-2)$

4) $\sigma = \pi n(n-2)^{(2-n)/n}(\frac{\alpha}{mv_\infty^2})^{2/n}$

§ 8. Колебания систем со многими степенями свободы

8.1. Нормальными (главными) координатами колебательной системы называются:

1) любые координаты системы, полностью определяющие ее положение
2) обобщенные координаты, периодически изменяющиеся с течением времени
3) обобщенные координаты, не изменяющиеся периодически с течением времени
4) обобщенные координаты, изменяющиеся с течением времени по гармоническому закону

8.2. Нормальные (главные) координаты механической системы θ_k $(k = 1,2,\dots)$ удовлетворяют уравнению $(\omega_k = const)$:

1) $\ddot{\Theta}_k + \omega_k^2\Theta_k = 0$
2) $\ddot{\Theta}_k - \omega_k^2\Theta_k = 0$
3) $\dot{\Theta}_k + \omega_k^2\Theta_k = 0$

4) $\dot{\Theta}_k - \omega_k^2 \Theta_k = 0$

8.3. Изменение нормальной (главной) координаты колебаний Θ с течением времени подчиняется закону ($A, \omega, \delta = const$):
1) $\Theta = A\,cos(\omega t + \delta)$
2) $\Theta = A\,cos^2(\omega t + \delta)$
3) $\Theta = A\,cos(\omega t + \delta) + A\,cos(2\omega t + \delta)$
4) $\Theta = A\,cos(\omega t + \delta)\,sin(\omega t + \delta)$

8.4. Колебания линейной молекулы, сохраняющие ее прямолинейную форму (происходящие вдоль прямой, на которой расположены атомы), называются:
1) валентными
2) собственными
3) нормальными
4) деформационными

8.5. Колебания линейной молекулы, выводящие атомы с прямой, называются:
1) валентными
2) собственными
3) нормальными
4) деформационными

8.6. Какое количество нормальных колебаний имеется у двойного математического маятника (рис. 1.4)?
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

8.7. Какое количество нормальных колебаний имеется у системы, изображенной на рисунке 8.1?
1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

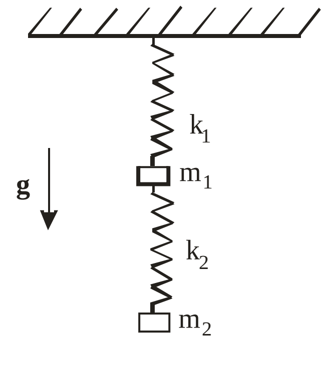

Рис. 8.1

8.8. Какое количество колебательных степеней свободы имеется у трехатомной линейной молекулы?

1) 1
2) 2
3) 4
4) 8

8.9. Какое количество колебательных степеней свободы имеется у трехатомной нелинейной молекулы?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

8.10. Молекула состоит из пяти атомов, расположенных вдоль одной прямой. Какое количество колебательных степеней свободы имеется у молекулы?

1) 5
2) 10
3) 15
4) 20

8.11. Нелинейная молекула состоит из четырех атомов. Какое количество колебательных степеней свободы имеется у молекулы?

1) 3
2) 4
3) 5
4) 6

8.12. Исключение из рассмотрения поступательного движения N - атомной молекулы как целого приводит к равенству:

1) $\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{u}_i = 0$
2) $\boldsymbol{u}_i = 0$
3) $\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{u}_i^2 = 0$
4) $\dot{\boldsymbol{u}}_i = 0$

здесь m_i и $\boldsymbol{u}_i$ – масса и отклонение от положения равновесия соответственно i -го атома молекулы.

8.13. Исключение из рассмотрения вращательного движения N - атомной молекулы как целого приводит к равенству:

1) $\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\boldsymbol{r}_i^0 \boldsymbol{u}_i\right] = 0$

2) $\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\boldsymbol{r}_i^0 \boldsymbol{u}_i\right]^2 = 0$

3) $\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\boldsymbol{r}_i^0 \dot{\boldsymbol{u}}_i\right] = 0$

4) $\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\boldsymbol{r}_i^0 \ddot{\boldsymbol{u}}_i\right] = 0$

здесь m_i и $\boldsymbol{u}_i$ – масса и отклонение от положения равновесия i -го атома молекулы соответственно, а $\boldsymbol{r}_i^0$ - радиус-вектор положения равновесия атома с номером i.

8.14. Какие из перечисленных ниже условий при рассмотрении задачи о колебаниях N - атомной молекулы являются голономными идеальными связями, наложенными на систему?

1) $\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\boldsymbol{r}_i^0 \boldsymbol{u}_i\right] = 0, \qquad \boldsymbol{u}_i = 0$

2) $\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\boldsymbol{r}_i^0 \boldsymbol{u}_i\right]^2 = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{u}_i = 0$

3) $\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\boldsymbol{r}_i^0 \boldsymbol{u}_i\right] = 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{u}_i = 0$

4) $\sum_{i=1}^{N} m_i \left[\boldsymbol{r}_i^0 \ddot{\boldsymbol{u}}_i\right] = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{u}_i^2 = 0$

здесь m_i и $\boldsymbol{u}_i$ – масса и отклонение от положения равновесия i -го атома молекулы соответственно, а $\boldsymbol{r}_i^0$ - радиус-вектор положения равновесия атома с номером i.

8.15. На гладкой горизонтальной поверхности находятся два тела с массами m_1 и m_2, связанные пружиной жесткости k. Чему равна частота малых колебаний системы?

1) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$
2) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$;
3) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}$
4) $\omega = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$

8.16. На гладкой горизонтальной поверхности находятся два тела с одинаковыми массами m, связанные пружиной жесткости k. Чему равна частота малых колебаний системы?

1) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
2) $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$
3) $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$
4) $\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$

8.17. Имеются две двухатомные молекулы. Массы атомов первой молекулы равны m каждый, а массы атомов второй молекулы - $2m$ каждый. Во сколько раз частота колебаний первой молекулы больше частоты колебаний второй молекулы? Предполагается, что потенциальная энергия каждой молекулы зависит только от расстояния между атомами, коэффициент пропорциональности считать одинаковым для рассматриваемых молекул.

1) 2
2) $\sqrt{2}$
3) 4
4) $\sqrt{6}$

8.18. Имеются две двухатомные молекулы. Массы атомов первой молекулы равны m каждый, а массы атомов второй молекулы равны $2m$ и $4m$. Во сколько раз частота колебаний первой молекулы больше частоты колебаний второй молекулы? Предполагается, что сила, действующая на каждый атом пропорциональна расстоянию между атомами, коэффициент пропорциональности считать одинаковым для рассматриваемых молекул.

1) $\sqrt{\frac{3}{2}}$
2) $\sqrt{\frac{5}{3}}$
3) $\sqrt{\frac{8}{3}}$
4) 3

8.19. Имеются две двухатомные молекулы. Массы атомов первой молекулы равны m и $2m$, а массы атомов второй молекулы равны $4m$ и $8m$. Во сколько раз частота колебаний первой молекулы больше частоты колебаний второй молекулы? Предполагается, что сила, действующая на каждый атом пропорциональна расстоянию между атомами, коэффициент пропорциональности считать одинаковым для рассматриваемых молекул.

1) 2
2) $\sqrt{\frac{8}{3}}$
3) $\sqrt{\frac{17}{5}}$
4) 3

8.20.* Функция Лагранжа для малых колебаний математического маятника массы m и длины l, точка подвеса которого колеблется по вертикали по закону $a\cos\omega t$ $(a, \omega = const)$, имеет вид (φ – угол отклонения от вертикали, рис. 2.1):

1) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\frac{\varphi^2}{2}$
2) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - (mla\omega^2\cos\omega t + mgl)\frac{\varphi^2}{2}$
3) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi$
4) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mla\omega^2\cos\omega t\cos\varphi + mgl\cos\varphi$

8.21.* Отношение частот антисимметричных и симметричных валентных колебаний линейной молекулы CO_2 приблизительно равно:

1) 1,9
2) 19
3) 190
4) 1900

8.22. Уравнение Лагранжа для математического маятника в случае малых колебаний имеет вид (обозначения приведены на рис. 2.1):

1) $\ddot{\varphi} - \frac{g}{l}\varphi = 0$
2) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$
3) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$
4) $\ddot{\varphi} = 0$

8.23.* Функция Лагранжа двойного математического маятника в случае $m_1 = m_2 = m$ и $l_1 = l_2 = l$ (обозначения даны на рис. 1.4) имеет вид:

$$L = ml^2\left(\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{\dot{\varphi}_2{}^2}{2} + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\,\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) + mgl(2cos\varphi_1 + cos\varphi_2)$$

Какой вид будет иметь данная функция в приближении малых (линейных) колебаний маятника?

1) $L = ml^2\left(\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{\dot{\varphi}_2{}^2}{2} + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right)$
2) $L = ml^2\left(\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{\dot{\varphi}_2{}^2}{2}\right) - mgl\left(\varphi_1^2 + \frac{\varphi_2^2}{2}\right)$
3) $L = ml^2\left(\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{\dot{\varphi}_2{}^2}{2} + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) + mgl(2cos\varphi_1 + cos\varphi_2)$
4) $L = ml^2\left(\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{\dot{\varphi}_2{}^2}{2} + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\right) - mgl\left(\varphi_1^2 + \frac{\varphi_2^2}{2}\right)$

8.24.* Два груза с массами m_1 и m_2 прикреплены к пружинам жесткости k_1 и k_2 (рис. 8.1). Функция Лагранжа, описывающая линейные (малые) колебания системы имеет вид (ось z направлена вдоль системы, z_1, z_2 – смещения грузов с массами m_1 и m_2 соответственно от положений равновесия):

1) $L = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2}$
2) $L = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2} - \frac{k_1 z_1^2}{2} - \frac{k_2}{2}(z_2 - z_1)^2$
3) $L = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2} - \frac{k_1 z_1^2}{2} - \frac{k_2 z_2^2}{2}$

4) $L = \frac{m_1\dot{z}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{z}_2^2}{2} - \frac{k_2}{2}(z_2 - z_1)^2$

8.25.* Уравнение Лагранжа для малых колебаний математического маятника массы m и длины l, точка подвеса которого колеблется по вертикали по закону $a\cos\omega t$ $(a, \omega = const)$, имеет вид (φ – угол отклонения маятника от вертикали, рис. 2.1):

1) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\left(1 + \frac{\omega^2 a}{g}\cos\omega t\right)\varphi = 0$

2) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$

3) $\ddot{\varphi} + \frac{\omega^2 a}{g}\cos\omega t\,\varphi = 0$

4) $\ddot{\varphi} + \frac{\omega^2 a}{g}\cos\omega t\,\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$

8.26.* Функция Лагранжа для малых (линейных) колебаний математического маятника массы m и длины l, точка подвеса которого колеблется по вертикали по закону $a\sin\omega t$ $(a, \omega = const)$, имеет вид (φ – угол отклонения маятника от вертикали, рис. 2.1):

1) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\frac{\varphi^2}{2}$

2) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - (mla\omega^2\sin\omega t + mgl)\frac{\varphi^2}{2}$

3) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi$

4) $L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mla\omega^2\sin\omega t\cos\varphi + mgl\cos\varphi$

8.27.* Уравнение Лагранжа для малых колебаний математического маятника массы m и длины l, точка подвеса которого колеблется по вертикали по закону $a\,sin\,\omega t$ $(a, \omega = const)$, имеет вид (φ – угол отклонения маятника от вертикали, рис. 2.1):

1) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\left(1 + \frac{\omega^2 a}{g}\sin\omega t\right)\varphi = 0$

2) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$

3) $\ddot{\varphi} + \frac{\omega^2 a}{g}\sin\omega t\,\varphi = 0$

4) $\ddot{\varphi} + \frac{\omega^2 a}{g}\sin\omega t\,\dot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0$

8.28.[*] Система уравнений Лагранжа для малых колебаний механической системы имеет вид (ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты, $a, b = const$; $a, b > 0$):

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2 + a\xi_1 = 0 \\ \ddot{\xi}_1 + \ddot{\xi}_2 + b\xi_2 = 0 \end{cases}$$

Частота колебаний системы равна:

1) $\omega = \frac{a+b}{ab}$
2) $\omega = \sqrt[4]{\frac{ab}{a+b}}$
3) $\omega = \sqrt{\frac{ab}{a+b}}$
4) $\omega = \sqrt{\frac{a+b}{ab}}$

8.29.[*] Система уравнений Лагранжа для малых колебаний механической системы имеет вид (ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты, $m, k = const$; $m, k > 0$):

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1 + k\xi_2 = 0 \\ m\ddot{\xi}_2 + k\xi_1 = 0 \end{cases}$$

Частота колебаний системы равна:

1) $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$
2) $\omega = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$
3) $\omega = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$
4) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

8.30.[*] Система уравнений Лагранжа для малых колебаний механической системы имеет вид (ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты, $m, k = const$; $m, k > 0$):

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1 + k(\xi_1 - \xi_2) = 0 \\ m\ddot{\xi}_2 + k(\xi_2 - \xi_1) = 0 \end{cases}$$

Частота колебаний системы равна:

1) $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

2) $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$

3) $\omega = \sqrt{\frac{5k}{2m}}$

4) $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

8.31.* Система уравнений Лагранжа для малых колебаний механической системы имеет вид (ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты, $m_1, m_2, k = const$; $m_1, m_2, k > 0$):

$$\begin{cases} m_1\ddot{\xi}_1 + k(\xi_1 - \xi_2) = 0 \\ m_2\ddot{\xi}_2 + k(\xi_2 - \xi_1) = 0 \end{cases}$$

Частота колебаний системы равна:

1) $\omega = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$

2) $\omega = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{2m_1 m_2}}$

3) $\omega = \sqrt{\frac{2k(m_1+m_2)}{m_1 m_2}}$

4) $\omega = \sqrt{\frac{k m_1 m_2}{(m_1+m_2)}}$

8.32.* Система уравнений Лагранжа для малых колебаний механической системы имеет вид (ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты, $m, k = const$; $m, k > 0$):

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1 + k(2\xi_1 - \xi_2) = 0 \\ 2m\ddot{\xi}_2 + k(2\xi_2 - \xi_1) = 0 \end{cases}$$

Частоты колебаний системы равны:

1) $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

2) $\omega_1 = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})}{3}\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})}{3}\frac{k}{m}}$

3) $\omega_1 = \sqrt{\frac{(3+\sqrt{3})}{2}\frac{k}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{(3-\sqrt{3})}{2}\frac{k}{m}}$

4) $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{3m}}$

8.33.* Система уравнений Лагранжа для малых колебаний механической системы имеет вид (ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты, $m, k, l = const$; $m, k, l > 0$):

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1 + k\xi_1 + l(\xi_1 - \xi_2) = 0 \\ m\ddot{\xi}_2 + k\xi_2 + l(\xi_2 - \xi_1) = 0 \end{cases}$$

Частоты колебаний системы равны:

1) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2l}{m}}$
2) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k+l}{m}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k-l}{m}}$
3) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k+2l}{m}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k-2l}{m}}$
4) $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{l}{m}}$

8.34.* Система уравнений Лагранжа для малых колебаний механической системы имеет вид (ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты, $m, k = const$; $m, k > 0$):

$$\begin{cases} m\ddot{\xi}_1 + k(\xi_1 - 4\xi_2) = 0 \\ m\ddot{\xi}_2 + k(\xi_2 - \xi_1) = 0 \end{cases}$$

Частота колебаний системы равна:

1) $\omega = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$
2) $\omega = \sqrt{\frac{3k}{4m}}$
3) $\omega = \sqrt{\frac{3k}{5m}}$
4) $\omega = \sqrt{\frac{3k}{m}}$

8.35.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{m_1}{2}\left(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2\right)^2 - \frac{k_1}{2}(\xi_1 + \xi_2)^2 - \frac{k_2}{2}(\xi_1 - \xi_2)^2,$$

где ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты системы, $m_1, m_2, k_1, k_2 = const$. Нормальные (главные) координаты системы есть:

1) $\Theta_1 = \xi_1 + \xi_2,\ \Theta_2 = \xi_1 - \xi_2$
2) $\Theta_1 = \xi_1 \cdot \xi_2,\ \Theta_2 = \frac{\xi_1}{\xi_2}$
3) $\Theta_1 = \xi_1 + 2\xi_2,\ \Theta_2 = \xi_1 - 2\xi_2$

4) $\Theta_1 = 2\xi_1 + \xi_2,\ \Theta_2 = 2\xi_1 - \xi_2$

8.36.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2\right) - \frac{k}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

где ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты системы, $m, k = const$; $m, k > 0$. Нормальные (главные) координаты системы есть:

1) $\Theta_1 = \xi_1 + 2\xi_2,\ \Theta_2 = \xi_1 - 3\xi_2$
2) $\Theta_1 = \xi_1 \cdot \xi_2,\ \Theta_2 = \frac{\xi_1}{\xi_2}$
3) $\Theta_1 = \xi_1,\ \Theta_2 = \xi_2$
4) $\Theta_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\sqrt{2}},\ \Theta_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\sqrt{2}}$

8.37.* Функция Лагранжа механической системы имеет вид:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2\right) - \frac{k}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) - \alpha\xi_1\xi_2,$$

где ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты системы, $m, k, \alpha = const$; $m, k, \alpha > 0$. Нормальные (главные) координаты системы есть:

1) $\Theta_1 = \xi_1,\ \Theta_2 = \xi_2$
2) $\Theta_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\sqrt{2}},\ \Theta_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\sqrt{2}}$
3) $\Theta_1 = \xi_1 + 2\xi_2,\ \Theta_2 = \xi_1 - 3\xi_2$
4) $\Theta_1 = \frac{\xi_1\xi_2(\xi_1 + \xi_2)}{\sqrt{2}},\ \Theta_2 = \frac{\xi_1\xi_2(\xi_1 - \xi_2)}{\sqrt{2}}$

8.38. Закон движения механической системы имеет вид:

$$\begin{cases} \xi_1 = C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2) \\ \xi_2 = -\sqrt{2}(C_1 \sin(\omega_1 t + \delta_1) - C_2 \sin(\omega_2 t + \delta_2)) \end{cases}$$

Здесь ξ_1, ξ_2 – обобщенные координаты системы, $C_1, C_2, \omega_1, \omega_2, \delta_1, \delta_2 = const$. Нормальные (главные) координаты системы есть:

1) $\Theta_1 = \xi_1 + \xi_2,\ \Theta_2 = \xi_1 - \xi_2$
2) $\Theta_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{\sqrt{2}},\ \Theta_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{\sqrt{2}}$
3) $\Theta_1 = \frac{1}{2}\left(\xi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2\right),\ \Theta_2 = \frac{1}{2}\left(\xi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2\right)$
4) $\Theta_1 = \frac{\xi_1\xi_2(\xi_1 + \xi_2)}{\sqrt{2}},\ \Theta_2 = \frac{\xi_1\xi_2(\xi_1 - \xi_2)}{\sqrt{2}}$

8.39. Механическая система находится в потенциальном поле:

$$U = ax^2 + bx + c,\ \ a, b, c = const, a > 0$$

и на нее наложены стационарные идеальные голономные связи. Положение устойчивого равновесия системы будет в точке:

1) $x = 0$
2) $x = b$
3) $x = -\frac{b}{2a}$
4) $x = b^2 - ac$

8.40. Механическая система находится в потенциальном поле:

$$U = \frac{k}{2}(x-a)^2, \ \ a, k = const, k > 0$$

и на нее наложены стационарные идеальные голономные связи. Положение устойчивого равновесия системы будет в точке:

1) $x = 0$
2) $x = a$
3) $x = -a$
4) $x = 2a$

8.41. Механическая система находится в потенциальном поле:

$$U = \frac{k}{2}((x-a)^2 + y^2), \ \ k, a = const, k > 0$$

и на нее наложены стационарные идеальные голономные связи. Положение устойчивого равновесия системы будет в точке:

1) $x = 0, \ y = 0$
2) $x = a, \ y = 0$
3) $x = a, \ y = a$
4) $x = -a, \ y = 0$

8.42. Механическая система находится в потенциальном поле:

$$U = \frac{k}{2}((x-a)^2 + (y-b)^2), \ \ a, b, k = const, k > 0$$

и на нее наложены стационарные идеальные голономные связи. Положение устойчивого равновесия системы будет в точке:

1) $x = 0, \ y = 0$
2) $x = b, \ y = a$
3) $x = a, \ y = b$
4) $x = \frac{a}{k}, \ y = \frac{b}{k}$

8.43. Механическая система находится в потенциальном поле:

$$U = \frac{k_1}{2}(x-a)^2 + \frac{k_2}{2}(y-b)^2, \ \ a, b, k_1, k_2 = const, k_1, k_2 > 0$$

и на нее наложены стационарные идеальные голономные связи. Положение устойчивого равновесия системы будет в точке:

1) $x = 0,\ y = 0$
2) $x = b,\ y = a$
3) $x = \frac{a}{k_1},\ y = \frac{b}{k_2}$
4) $x = a,\ y = b$

8.44. Механическая система находится в потенциальном поле

$$U = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) - \alpha xy,\ \ k, \alpha = const, \qquad k > 0, \qquad k > |\alpha|$$

и на нее наложены стационарные идеальные голономные связи. Положение устойчивого равновесия системы будет в точке:

1) $x = 0,\ y = 0$
2) $x = 0,\ y = \frac{\alpha}{k}$
3) $x = \frac{\alpha}{k},\ y = 0$
4) $x = \frac{\alpha}{k},\ y = \frac{\alpha}{k}$

§ 9. Движение твердого тела. Тензор инерции

9.1. Твердым телом называется:

1) система точек, расстояние между которыми меняется с течением времени
2) система точек, все расстояния между которыми остаются неизменными
3) система точек, обладающая осями симметрии
4) система точек, все координаты которых остаются неизменными

9.2. Сколько степеней свободы может иметь твердое тело?

1) 12
2) в точности 3
3) в точности 6
4) не более 6

9.3. Какие величины могут быть выбраны в качестве обобщенных координат для описания положения твердого тела?

1) декартовы координаты центра масс твердого тела и три угла, характеризующие поворот жестко связанной с твердым телом системы координат относительно неподвижной системы координат
2) декартовы координаты любых двух точек твердого тела
3) декартовы координаты центра масс и произвольной точки твердого тела
4) декартовы координаты произвольной точки твердого тела

9.4. В неподвижной системе координат скорость точки B твердого тела, которое вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ вокруг точки A, дается выражением ($\boldsymbol{v}$ – скорость точки B, $\boldsymbol{V}$ – скорость точки A, $\boldsymbol{r}$ – вектор, соединяющий точки A и B и направленный от A к B):
1) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + [\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\Omega}]$
2) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}$
3) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + [\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}]$
4) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V} + \frac{[\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{r}]^2}{\boldsymbol{\Omega}^2}$

9.5. Кинетическая энергия T твердого тела с массой M и моментом инерции I, центр масс которого имеет скорость $\boldsymbol{V}$, а угловая скорость которого $\boldsymbol{\Omega}$, равна (индексы α, β нумеруют координаты):
1) $T = \frac{1}{2} M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}(\sum_\alpha I_\alpha)\boldsymbol{\Omega}^2$
2) $T = \frac{1}{2} M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha^2$
3) $T = \frac{1}{2} M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta} I_{\alpha\beta}\Omega_\alpha \Omega_\beta$
4) $T = \frac{1}{2} M\boldsymbol{V}^2 + \frac{1}{2}(\sum_\alpha I_\alpha)\left(\sum_\beta \Omega_\beta^2\right)$

9.6. Угловая скорость центра масс твердого тела равна $\boldsymbol{\Omega}$, а его скорость поступательного движения равна $\boldsymbol{V}$. Чему равна угловая скорость в точке, соединенной с центром масс вектором $\boldsymbol{a}$?
1) $\boldsymbol{\Omega}$
2) $\boldsymbol{\Omega} + (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V})\boldsymbol{a}$
3) $\boldsymbol{\Omega} + \frac{\boldsymbol{V}}{|\boldsymbol{a}|}$
4) $\boldsymbol{\Omega} + \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{V}|}\boldsymbol{\Omega}$

9.7. Какой вид имеет тензор моментов инерции в системе координат x', y', z', жестко связанной с твердым телом и имеющей начало в центре масс твердого тела?

1) $\begin{pmatrix} \sum_i m_i\left({y'}_i^2 + {z'}_i^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \sum_i m_i\left({x'}_i^2 + {z'}_i^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \sum_i m_i\left({x'}_i^2 + {y'}_i^2\right) \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \sum_i m_i\left({y'}_i^2 + {z'}_i^2\right) & -\sum_i m_i\, x'_i y'_i & -\sum_i m_i\, x'_i z'_i \\ -\sum_i m_i\, x'_i y'_i & \sum_i m_i\left({x'}_i^2 + {z'}_i^2\right) & -\sum_i m_i\, y'_i z'_i \\ -\sum_i m_i\, x'_i z'_i & -\sum_i m_i\, y'_i z'_i & \sum_i m_i\left({x'}_i^2 + {y'}_i^2\right) \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 & -\sum_i m_i\, x'_i y'_i & -\sum_i m_i\, x'_i z'_i \\ -\sum_i m_i\, x'_i y'_i & 0 & -\sum_i m_i\, y'_i z'_i \\ -\sum_i m_i\, x'_i z'_i & -\sum_i m_i\, y'_i z'_i & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \sum_i m_i {x'}_i^2 & -\sum_i m_i\, x'_i y'_i & -\sum_i m_i\, x'_i z'_i \\ -\sum_i m_i\, x'_i y'_i & \sum_i m_i {y'}_i^2 & -\sum_i m_i\, y'_i z'_i \\ -\sum_i m_i\, x'_i z'_i & -\sum_i m_i\, y'_i z'_i & \sum_i m_i {z'}_i^2 \end{pmatrix}$

суммирование ведется по всем точкам твердого тела.

9.8. Какой вид в общем случае имеет тензор моментов инерции в главных осях?

1) $\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} I_3 & 0 & I_1 \\ 0 & I_2 & 0 \\ I_1 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$

9.9.* Тензор моментов инерции тонкого стержня массы m и длиной l, определенный относительно его центра масс, равен:

1) $\begin{pmatrix} \frac{ml^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ml^2}{12} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \frac{ml^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \frac{ml^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ml^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9.10.* Тензор моментов инерции двухатомной молекулы, образованной атомами с массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии a друг от друга, может быть представлен в виде:

1) $\begin{pmatrix} \frac{m_1 m_2 a^2}{m_1+m_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 m_2 a^2}{m_1+m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} m_1 a^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} m_2 a^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) справедливы все три выражения в зависимости от точки, для которой определяется момент инерции

9.11.* Тензор моментов инерции двухатомной молекулы, образованной атомами с массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии a друг от друга, рассчитанный относительно центра масс этой молекулы имеет вид:

$$1)\ \begin{pmatrix} \frac{m_1 m_2 a^2}{m_1+m_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1 m_2 a^2}{m_1+m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2)\ \begin{pmatrix} m_1 a^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3)\ \begin{pmatrix} m_2 a^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{pmatrix} (m_1+m_2) a^2 & 0 & 0 \\ 0 & (m_1+m_2) a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9.12.* Тензор моментов инерции плоского прямоугольника массы m со сторонами a и b, определенный относительно его центра масс, имеет вид:

$$1)\ \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2)\ \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12}0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0\frac{m(a^2+b^2)}{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3)\ \begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}$$

$$4)\ \begin{pmatrix} \frac{m(a^2+b^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}$$

9.13.* Тензор моментов инерции шара массы m и радиуса R, определенный по отношению к его центру масс, имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} \frac{7mR^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7mR^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{5} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{5} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \frac{2mR^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2mR^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{5} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \frac{2mR^2}{5} & \frac{2mR^2}{5} & \frac{2mR^2}{5} \\ \frac{2mR^2}{5} & \frac{2mR^2}{5} & \frac{2mR^2}{5} \\ \frac{2mR^2}{5} & \frac{2mR^2}{5} & \frac{2mR^2}{5} \end{pmatrix}$

9.14. Какова связь тензора моментов инерции I^A тела массы m, определенного по отношению к системе координат с центром в точке A, с тензором моментов инерции I, определенным по отношению к центру масс тела? Центр масс соединен с точкой A вектором $\boldsymbol{a}$ (индексы α и β нумеруют декартовы координаты).

1) $I^A_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta}$
2) $I^A_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + m(a^2\delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta)$
3) $I^A_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} + ma^2$
4) $I^A_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} - ma^2$

9.15.* Тензор моментов инерции шара массы m и радиуса R, определенный по отношению к точке на его поверхности, имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} \frac{7mR^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7mR^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{5} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{5} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \frac{2mR^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2mR^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2mR^2}{5} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \frac{2mR^2}{5} & \frac{2mR^2}{5} & \frac{2mR^2}{5} \\ \frac{2mR^2}{5} & \frac{2mR^2}{5} & \frac{2mR^2}{5} \\ \frac{2mR^2}{5} & \frac{2mR^2}{5} & \frac{2mR^2}{5} \end{pmatrix}$

9.16.* Тензор моментов инерции плоского прямоугольника массы m со сторонами a и b, определенный относительно его вершины, имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} \frac{mb^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{3} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \frac{mb^2}{3} & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{3}0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ \frac{m(a^2+b^2)}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \frac{mb^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \frac{m(a^2+b^2)}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m(a^2+b^2)}{12} \end{pmatrix}$

9.17.* Тонкостенный цилиндр массы m и радиуса R скатывается по наклонной плоскости без проскальзывания. Угол плоскости с горизонталью составляет α. Какова обобщенная энергия такой системы (X – координата центра масс цилиндра, отсчитываемая вдоль наклонной плоскости)?

1) $E = \frac{3}{4}m\dot{X}^2 + mgX\sin\alpha$

2) $E = m\dot{X}^2 + mgX\cos\alpha$

3) $E = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + mgX\sin\alpha$

4) $E = m\dot{X}^2 + mgX\sin\alpha$

9.18. Сплошной цилиндр массы m и радиуса R скатывается по наклонной плоскости без проскальзывания. Угол плоскости с горизонталью составляет α. Какова обобщенная энергия такой системы (X – координата центра масс цилиндра, отсчитываемая вдоль наклонной плоскости)?

1) $E = \frac{3}{4}m\dot{X}^2 + mgX\sin\alpha$

2) $E = m\dot{X}^2 + mgX\cos\alpha$

3) $E = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + mgX\sin\alpha$

4) $E = m\dot{X}^2 + mgX\sin\alpha$

9.19.** Сплошной диск радиуса a и массы M, шарнирно соединенный с вертикальной осью горизонтальным тонким стержнем длиной l и массы m, катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности (рис. 9.1). Какова кинетическая энергия данной системы (φ – угол поворота диска)?

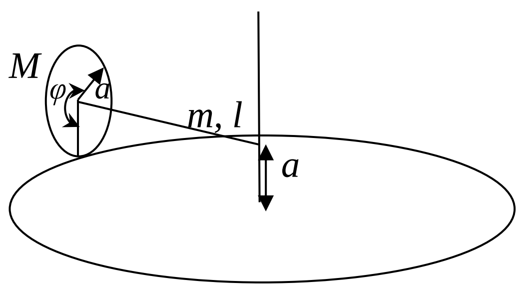

Рис. 9.1

1) $T = \left(\frac{M}{8}\frac{a^2}{l^2} + \frac{m}{6}\right)a^2\dot{\varphi}^2$

2) $T = \left(\frac{3M}{4} + \frac{Ma^2}{8l^2} + \frac{m}{6}\right)a^2\dot{\varphi}^2$

3) $T = \left(\frac{1}{2}Ma^2 + \frac{1}{6}ml^2\right)\dot{\varphi}^2$

4) $T = \left(\frac{7Ma^2}{8} + \frac{1}{6}ml^2\right)\dot{\varphi}^2$

9.20.* Тензор моментов инерции кругового цилиндра радиуса a и высоты h, определенный относительно его центра масс, равен:

1) $$\begin{pmatrix} \frac{m}{12}(a^2+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{2} \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} \frac{m}{12}(a^2+3h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(a^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12}(3a^2+h^2) \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} \frac{m}{12}(3a^2+h^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12}(3a^2+h^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{2} \end{pmatrix}$$

4) $$\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{2} \end{pmatrix}$$

9.21.* Тензор моментов инерции тонкого диска массой m и радиуса a, рассчитанный относительно его центра, равен:

1) $$\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{4} & \frac{ma^2}{4} & \frac{ma^2}{4} \\ \frac{ma^2}{4} & \frac{ma^2}{4} & \frac{ma^2}{4} \\ \frac{ma^2}{2} & \frac{ma^2}{2} & \frac{ma^2}{2} \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{2} \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{2} & 0 & \frac{ma^2}{2} \\ 0 & \frac{ma^2}{2} & 0 \\ \frac{ma^2}{2} & 0 & \frac{ma^2}{2} \end{pmatrix}$$

4) $\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{2} \end{pmatrix}$

9.22. Какова связь компонент тензора моментов инерции плоского тела (толщина пренебрежимо мала по сравнению с другими размерами; ось z направлена перпендикулярно плоскости тела)?

1) $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$
2) $I_{zz} = I_{xx} = I_{yy}$
3) $I_{zz} = \frac{1}{2}\left(I_{xx} + I_{yy}\right)$
4) $0 = I_{xx}I_{yy} + I_{yy}I_{zz} + I_{zz}I_{xx}$

9.23. Две тонкие пластины, вырезанные в форме квадрата, имеют одинаковую массу и одинаковую толщину. Плотность материала первой пластины меньше, чем плотность материала второй пластины. Какая из пластин обладает большими величинами момента инерции?

1) первая
2) вторая
3) моменты инерции пластин равны
4) данное соотношение различно для различных компонент тензора момента инерции

9.24.** Твердое тело представляет собой набор N точек массы m, находящихся на одной прямой, все расстояния между соседними точками одинаковы и равны a. Чему равен тензор моментов инерции относительно центра масс такого твердого тела?

Указание: $\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

1) $\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12}N^2(N^2+2N+1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12}N^2(N^2+2N+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{12}N(N^2-1) \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{12}N(N+1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{12}N(N+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

9.25.** Твердое тело представляет собой набор N точек массы m, находящихся на длинном узком стержне длиной l и массой M, расстояния между соседними точками одинаковы и равны a (рис. 9.2). Чему равен тензор моментов инерции такого твердого тела относительно его центра масс?

Указание: $\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$.

Рис. 9.2

1) $\begin{pmatrix} \frac{Ml^2}{12}+\frac{ma^2}{12}N^2(N^2+2N+1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ml^2}{12}+\frac{ma^2}{12}N^2(N^2+2N+1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \frac{Ml^2}{3}+\frac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ml^2}{3}+\frac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ml^2}{3} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \frac{Ml^2}{12}+\frac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ml^2}{12}+\frac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \frac{Ml^2}{12}+\frac{ma^2}{12}N(N^2+2N) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ml^2}{12}+\frac{ma^2}{12}N(N^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Ml^2}{3} \end{pmatrix}$

9.26.* Твердое тело представляет собой тонкий круглый диск массы M и радиуса a, в котором вырезано круглое отверстие диаметром a как показано на рисунке 9.3. На каком расстоянии от центра круга находится центр масс такого тела?

1) $\frac{11}{24}\ a$

2) $\frac{1}{3}a$

3) $\frac{1}{6}\ a$

4) $\frac{2}{3}\ a$

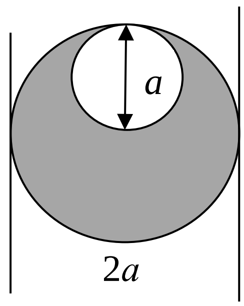

Рис. 9.3

9.27.** Твердое тело представляет собой тонкий круглый диск массы M и радиуса a, в котором вырезано круглое отверстие диаметром a, как показано на рисунке 9.3. Какова величина момента инерции относительно оси, перпендикулярной твердому телу и проходящей через его центр масс?

1) $\frac{3}{4}\ Ma^2$

2) $\frac{37}{72}Ma^2$

3) $\frac{13}{24}\ Ma^2$

4) $\frac{2}{3}\ Ma^2$

9.28.** Четыре точки массы m расположены по вершинам правильного тетраэдра со стороной a. Тензор моментов инерции такого тела относительно центра масс в главных осях равен:

1) $\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{3} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & ma^2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{2} & 0 & \frac{ma^2}{3} \\ 0 & \frac{ma^2}{2} & 0 \\ \frac{ma^2}{3} & 0 & \frac{ma^2}{4} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & ma^2 \end{pmatrix}$

9.29.** По вершинам квадрата со стороной a расположены точки с массами m и M как показано на рисунке 9.4. Чему равен тензор моментов инерции для осей x, y, z (ось z перпендикулярна плоскости рисунка и проходит через его центр)?

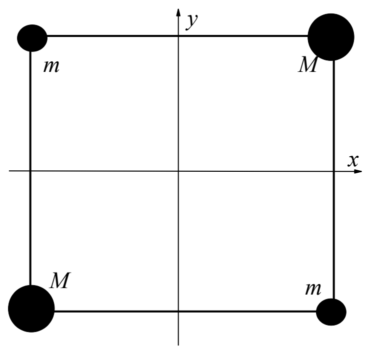

Рис. 9.4

1) $\begin{pmatrix} \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m-M}{2}a^2 & 0 \\ \frac{m-M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (m+M)a^2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 \\ \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 \\ \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} (m+M)a^2 & 0 & 0 \\ 0 & (m+M)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (m+M)a^2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & (m+M)a^2 \end{pmatrix}$

9.30. По вершинам квадрата со стороной a расположены точки с массами m и M как показано на рисунке 9.5. Чему равен тензор моментов инерции для осей x, y, z (ось z перпендикулярна плоскости рисунка и проходит через его центр)?

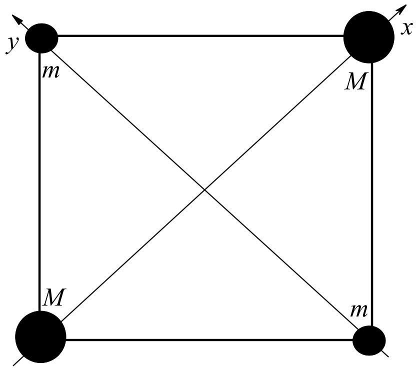

Рис. 9.5

1) $\begin{pmatrix} \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m-M}{2}a^2 & 0 \\ \frac{m-M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (m+M)a^2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 \\ \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 \\ \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 & \frac{m+M}{2}a^2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} (m+M)a^2 & 0 & 0 \\ 0 & (m+M)a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (m+M)a^2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & Ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & (m+M)a^2 \end{pmatrix}$

9.31.* На каком расстоянии от вершины конуса находится его центр масс? Конус имеет высоту h и радиус основания a.

1) $\frac{2}{3}\sqrt{ha}$
2) $\frac{2}{3}\ h$
3) $\frac{3}{4}\sqrt{h^2+a^2}$
4) $\frac{3}{4}\ h$

9.32. В случае непрерывного распределения массы по некоторому объему, характеризуемого функцией плотности $\rho(\boldsymbol{r})$, радиус-вектор центра масс $\boldsymbol{R}$ выражается следующим образом:

1) $\boldsymbol{R} = \int \rho(\boldsymbol{r})dV$
2) $\boldsymbol{R} = \int \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}dV$
3) $\boldsymbol{R} = \frac{\int \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}^2 dV}{\int \rho(\boldsymbol{r})dV}$
4) $\boldsymbol{R} = \frac{\int \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}\, dV}{\int \rho(\boldsymbol{r})dV}$

9.33.* На каком расстоянии от центра основания находится центр масс полушара радиуса R?

1) $\frac{1}{2}R$
2) $\frac{2}{3}\ R$
3) $\frac{3}{4}R$
4) $\frac{3}{8}\ R$

9.34.* На каком расстоянии от центра основания находится центр масс тонкостенной полусферы массы m и радиуса a?

1) $\frac{1}{2}a$
2) $\frac{2}{3}a$
3) $\frac{3}{4}a$
4) $\frac{3}{8}a$

9.35.** Тензор моментов инерции тонкостенной полусферы массы m и радиуса a относительно центра масс имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} \frac{2ma^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2ma^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ma^2}{5} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \frac{5ma^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5ma^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ma^2}{3} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \frac{2ma^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2ma^2}{3} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \frac{2ma^2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2ma^2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4ma^2}{5} \end{pmatrix}$

9.36.* Тензор моментов инерции, определенный относительно центра масс, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}I_0 & -\frac{1}{4}I_0 & -\frac{1}{4}I_0 \\ -\frac{1}{4}I_0 & \frac{2}{3}I_0 & -\frac{1}{4}I_0 \\ -\frac{1}{4}I_0 & -\frac{1}{4}I_0 & \frac{2}{3}I_0 \end{pmatrix}$$

Каков вид этого тензора в главных осях?

1) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}I_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}I_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}I_0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}I_0 & 0 & \frac{2}{3}I_0 \\ 0 & \frac{2}{3}I_0 & 0 \\ \frac{2}{3}I_0 & 0 & \frac{2}{3}I_0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{6}I_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12}I_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{12}I_0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \frac{5}{12}I_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{12}I_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{12}I_0 \end{pmatrix}$

9.37. Как связаны между собой момент импульса $\boldsymbol{M}$ и угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$?

1) $\boldsymbol{M} = \sum_i I_{ii}\,\Omega_i$

2) $\boldsymbol{M} = \sum_i I_{ii}\Omega_i^2$

3) $\boldsymbol{M} = \sum_{i,j} I_{ij}\Omega_i\Omega_j$

4) $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$

9.38. Двухатомная молекула, образованная атомами с массами m_1 и m_2, находящимися на расстоянии a друг от друга, вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. Как направлен вектор момента импульса этой молекулы?

1) вдоль $\boldsymbol{\Omega}$
2) вдоль оси, соединяющей атомы
3) перпендикулярно оси, соединяющей атомы
4) под углом $\theta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1^2+m_2^2}}\right)$ к вектору $\boldsymbol{\Omega}$

9.39. Как направлены вектора момента импульса $\boldsymbol{M}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ в случае вращающегося шара?

1) сонаправлены
2) направлены противоположно
3) перпендикулярны
4) угол между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ составляет $\pi/4$

9.40. Как выражается кинетическая энергия вращения твердого тела через момент импульса $\boldsymbol{M}$ и угловую скорость $\boldsymbol{\Omega}$?

1) $\frac{1}{2}|\boldsymbol{M}|\boldsymbol{\Omega}^2$
2) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Omega})$
3) $\frac{1}{2}|[\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Omega}]|$
4) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{\Omega})^2$

9.41.* Чему равна кинетическая энергия тонкого стержня массы m и длины l, вращающегося вокруг своего конца с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$? Угол между стержнем и вектором $\boldsymbol{\Omega}$ равен α.

1) $\frac{ml^2}{6}\Omega^2\sin^2\alpha$
2) $\frac{ml^2}{2}\Omega^2\sin\alpha$
3) $\frac{ml^2}{12}\Omega^2$
4) $\frac{ml^2}{6}\Omega^2\cos^2\alpha$

9.42.* Физический маятник в виде тонкого длинного стержня длиной l и массой m шарнирно закреплен в своей верхней точке и может совершать колебания в плоскости. Действует сила тяжести. Найдите частоту малых колебаний такого маятника.

1) $\sqrt{\frac{g}{l}}$
2) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$
3) $\frac{g}{2l}$
4) $\sqrt{\frac{3g}{2l}}$

9.43. Вектор угловой скорости $\dot{\boldsymbol{\varphi}}$ (φ – угол Эйлера) в осях координат x', y', z', жестко связанных с твердым телом, имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \dot{\varphi}\ \sin\theta\ \sin\psi \\ \dot{\varphi}\ \sin\theta\cos\psi \\ \dot{\varphi}\ \cos\theta \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \dot{\varphi}\sin\theta \\ 0 \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

9.44. Вектор угловой скорости $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ (θ – угол Эйлера) в осях координат x', y', z', жестко связанных с твердым телом, имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} \dot{\theta}\ \sin\varphi\ \sin\psi \\ \dot{\theta}\ \sin\varphi\cos\psi \\ \dot{\theta}\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi \\ 0 \end{pmatrix}$

9.45. Вектор угловой скорости $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ (ψ – угол Эйлера) в осях координат x', y', z' жестко связанных с твердым телом, имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \dot{\psi}\ \sin\theta\ \sin\varphi \\ \dot{\psi}\ \sin\theta\cos\varphi \\ \dot{\psi}\ \cos\theta \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \dot{\psi}\sin\theta \\ 0 \\ \dot{\psi}\cos\theta \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \dot{\psi}\ \sin\varphi\ \sin\theta \\ \dot{\psi}\ \sin\varphi\cos\theta \\ \dot{\psi}\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

9.46. Вектор угловой скорости, выраженный через скорости $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ (φ, θ, ψ – углы Эйлера) в системе координат x', y', z', жестко связанной с твердым телом, имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\psi \\ -\dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \dot{\theta}\ \sin\varphi\ \sin\psi + \dot{\varphi}\cos\psi \\ \dot{\theta}\ \sin\varphi\cos\psi - \dot{\varphi}\sin\psi \\ \dot{\theta}\ \cos\varphi + \dot{\psi} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \dot{\varphi}\ \sin\theta\ \sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\ \dot{\varphi}\ \sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\ \dot{\varphi}\ \cos\theta + \dot{\psi} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$

9.47. Вектор угловой скорости, выраженный через скорости $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$ (φ, θ, ψ – углы Эйлера) в лабораторной системе координат x, y, z есть:

1) $\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ \dot{\theta}\sin\varphi - \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} \dot{\theta}\ \sin\varphi\ \sin\psi + \dot{\varphi}\cos\psi \\ \dot{\theta}\sin\varphi\cos\psi - \dot{\varphi}\sin\psi \\ \dot{\theta}\ \cos\varphi + \dot{\psi} \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} \dot{\theta}\cos\varphi \\ \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix}$

9.48. Модуль вектора угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$, выраженный через скорости $\dot\varphi, \dot\theta, \dot\psi$, ($\varphi, \theta, \psi$ – углы Эйлера) равен:

1) $\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + \dot\psi^2 + 2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta}$
2) $\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + \dot\psi^2}$
3) $\sqrt{\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + \dot\psi^2 - 2\dot\varphi\dot\psi\cos\theta}$
4) $\dot\varphi$

9.49. Кинетическая энергия вращательного движения симметричного волчка равна (φ, θ, ψ – углы Эйлера; компоненты тензора момента инерции $I_{xx} = I_{yy} = I_1, I_{zz} = I_3$, где z – ось вращения):

1) $T = \frac{1}{2}I_1\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot\varphi\ \cos\theta + \dot\psi\right)^2$
2) $T = \frac{1}{2}I_1\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{1}{2}I_3\left(\dot\varphi^2\ \cos^2\theta + \dot\psi^2\right)$
3) $T = \frac{1}{2}I_1\left(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\right) + \frac{1}{2}I_3\dot\psi^2$
4) $T = \frac{1}{2}I_1\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\sin^2\varphi\right) + \frac{1}{2}I_3\dot\psi^2$

9.50.* Обобщенный импульс p_φ (φ – угол Эйлера; компоненты тензора момента инерции $I_{xx} = I_{yy} = I_1, I_{zz} = I_3$, где z – ось вращения) в случае симметричного волчка равен:

1) $p_\varphi = M_z = I_1\dot\varphi$
2) $p_\varphi = M_z = I_1\dot\varphi\sin^2\theta + I_3\left(\dot\varphi\ \cos\theta + \dot\psi\right)\cos\theta$
3) $p_\varphi = M_z = I_1\dot\varphi\sin^2\theta + I_3\left(\dot\varphi\ \cos\theta + \dot\psi\right)\cos\theta$
4) $p_\varphi = M_z = I_1\dot\varphi\sin^2\theta$

9.51.* Обобщенный импульс p_θ (θ – угол Эйлера; компоненты тензора момента инерции $I_{xx} = I_{yy} = I_1, I_{zz} = I_3$, где z – ось вращения) в случае симметричного волчка равен:

1) $p_\theta = I_1\dot\theta$
2) $p_\theta = I_1\dot\theta + I_3\dot\psi$
3) $p_\theta = I_1\dot\varphi\sin^2\theta + I_3\left(\dot\varphi\ \cos\theta + \dot\psi\right)$
4) $p_\theta = I_1\dot\varphi\sin^2\theta$

9.52.* Обобщенный импульс p_ψ (ψ – угол Эйлера; компоненты тензора момента инерции $I_{xx} = I_{yy} = I_1, I_{zz} = I_3$, где z – ось вращения) в случае симметричного волчка равен:

1) $p_\psi = M_{z'} = I_3\dot{\psi} + I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta$
2) $p_\psi = M_{z'} = I_3\dot{\psi}$
3) $p_\psi = M_{z'} = I_3(\dot{\varphi}\ \cos\theta + \dot{\psi})$
4) $p_\psi = M_{z'} = I_3(\dot{\varphi}\ \cos\theta + \dot{\psi})^2$

9.53.* Кинетическая энергия свободно вращающегося однородного шара массы m и радиуса a равна (φ, θ, ψ – углы Эйлера):

1) $T = \frac{ma^2}{5}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2)$
2) $T = \frac{ma^2}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta)$
3) $T = \frac{ma^2}{5}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta)$
4) $T = \frac{ma^2}{5}\dot{\varphi}^2$

9.54. Интегралами движения для свободно вращающегося симметричного волчка являются:

1) энергия
2) энергия, обобщенные импульсы p_φ и p_ψ (φ, ψ – углы Эйлера)
3) энергия и все обобщенные импульсы
4) интегралы движения отсутствуют

9.55.* Функция Лагранжа для симметричного волчка (компоненты тензора момента инерции $I_{xx} = I_{yy} = I_1, I_{zz} = I_3$, где z – ось вращения), нижняя точка которого шарнирно закреплена (расстояние от неподвижной точки до центра масс волчка равно a) в поле силы тяжести имеет вид (φ, θ, ψ – углы Эйлера):

1) $L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\ \cos\theta + \dot{\psi})^2 - mga\ \cos\theta$
2) $L = \frac{ma^2}{2}(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) - mga\ cos\,\theta$
3) $L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3\dot{\psi}^2 - mga\ \cos\theta$
4) $L = \frac{1}{2}(I_1 + ma^2)(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi}\ \cos\theta + \dot{\psi})^2 - mga\ \cos\theta$

9.56.Интегралами движения для симметричного волчка с неподвижной нижней точкой в поле силы тяжести являются:

1) энергия
2) энергия, обобщенные импульсы p_φ и p_ψ (φ, ψ – углы Эйлера)
3) энергия и все обобщенные импульсы
4) интегралы движения отсутствуют

9.57.* Кинетическая энергия вращающегося однородного шара массы m и радиуса a с шарнирно закрепленной точкой равна (φ, θ, ψ – углы Эйлера):

1) $T = \frac{7ma^2}{10}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{ma^2}{5}\left(\dot{\varphi}\ \cos\theta + \dot{\psi}\right)^2$
2) $T = \frac{ma^2}{5}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{ma^2}{5}\left(\dot{\varphi}\ \cos\theta + \dot{\psi}\right)^2$
3) $T = \frac{ma^2}{5}\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right) + \frac{2ma^2}{5}\dot{\theta}^2$
4) $T = \frac{ma^2}{5}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\right) + \frac{2ma^2}{5}\dot{\varphi}^2$

9.58.* Углы Эйлера φ, θ, ψ представляют собой функции времени:

$$\varphi(t) = \dot{\varphi}_0 t, \qquad \theta = \theta_0\,, \qquad \psi = \dot{\psi}_0 t$$

Проекции угловой скорости на оси координат x', y', z', жестко связанные с твердым телом, равны:

1) $\Omega_{x'} = \dot{\varphi}_0$
$\Omega_{y'} = \dot{\varphi}_0$
$\Omega_{z'} = \dot{\psi}_0$
2) $\Omega_{x'} = \dot{\varphi}_0 \sin\dot{\psi}_0 t$
$\Omega_{y'} = \dot{\varphi}_0 \cos\dot{\psi}_0 t$
$\Omega_{z'} = \dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_0$
3) $\Omega_{x'} = \dot{\varphi}_0 \sin\theta_0 \sin\dot{\psi}_0 t$
$\Omega_{y'} = \dot{\varphi}_0 \sin\theta_0 \cos\dot{\psi}_0 t$
$\Omega_{z'} = \dot{\varphi}_0 \cos\theta_0 + \dot{\psi}_0$
4) $\Omega_{x'} = \dot{\varphi}_0 \sin\theta_0$
$\Omega_{y'} = \dot{\varphi}_0 \sin\theta_0$
$\Omega_{z'} = \dot{\varphi}_0 \cos\theta_0$

9.59.Кинетическая энергия асимметричного волчка, для которого тензор момента инерции в главных осях имеет вид (φ, θ, ψ – углы Эйлера):

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

равна:

1) $T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi}\ \cos\theta + \dot{\psi})^2$
2) $T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi} \sin\psi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\psi)^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\varphi} \cos\psi \sin\theta - \dot{\theta} \sin\psi)^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\varphi}\ \cos\theta + \dot{\psi})^2$
3) $T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\theta} \cos\varphi + \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi)^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta} \sin\varphi - \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi)^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi})^2$
4) $T = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} I_3 \dot{\psi}^2$

9.60. Симметричный волчок массы m двигается по гладкой горизонтальной плоскости в поле силы тяжести. Расстояние от центра инерции волчка до точки опоры равно a. Интегралами движения такого волчка являются (X, Y, Z – декартовы координаты центра масс волчка; φ, θ, ψ – углы Эйлера):

1) энергия
2) энергия, обобщенные импульсы p_φ, p_ψ, p_X, p_Y
3) энергия и все обобщенные импульсы
4) интегралы движения отсутствуют

9.61.* Функция Лагранжа для однородного стержня массой m и длиной l, находящегося в однородном поле силы тяжести Земли, имеет вид (X, Y, Z – декартовы координаты центра масс стержня; φ, θ, ψ – углы Эйлера):

1) $L = \frac{ml^2}{2} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2)$
2) $L = \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - mgZ$
3) $L = \frac{ml^2}{24} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - mgZ$
4) $L = \frac{ml^2}{24} (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{ml^2}{24} (\dot{\varphi}\ \cos\theta + \dot{\psi}) + \frac{m}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - mgZ$

9.62.* Закон движения (без учета движения центра масс) свободного симметричного волчка имеет вид (φ, θ, ψ – углы Эйлера):

1) для определения закона движения недостаточно данных
2) $\varphi = \varphi_0, \ \theta = \theta_0, \ \ \psi = \psi_0$

3) $\varphi = \varphi_0, \ \ \theta = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t, \quad \psi = \psi_0$

4) $\varphi = \varphi_0 + \dot{\varphi}_0 \, t, \ \ \theta = \theta_0, \quad \psi = \psi_0 + \dot{\psi}_0 \, t$

где $\theta_0, \psi_0, \dot{\varphi}_0, \dot{\theta}_0, \dot{\psi}_0$ – константы, определяемые начальными условиями.

9.63.** Для симметричного волчка массой m с моментами инерции I_1 и I_3, шарнирно закрепленного в точке на расстоянии a от центра масс в поле силы тяжести, его энергия через проекции момента импульса на вертикальную ось M_z и ось волчка $M_{z'}$ выражается в виде (θ – угол между осями z и z'):

1) $E = \frac{I_1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{M_{z'}^2}{2I_3} + \frac{(M_z - M_{z'}\cos\theta)^2}{2I_1} + mga\cos\theta$

2) $E = \frac{I_1 + ma^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{M_{z'}^2}{2I_3} + \frac{(M_z - M_{z'}\cos\theta)^2}{2(I_1 + ma^2)} + mga\cos\theta$

3) $E = \frac{I_1 + ma^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(M_z - M_{z'}\cos\theta)^2}{2(I_1 + ma^2)} + mga\cos\theta$

4) $E = \frac{I_1 + ma^2}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{M_{z'}^2}{2I_3} + \frac{{M_z}^2}{2(I_1 + ma^2)} - mga\cos\theta$

§ 10. Уравнения Гамильтона

10.1. Функцией Гамильтона $H(q,p,t)$ механической системы с s степенями свободы называется следующая функция:

1) $H(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$

2) $H(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha \dot{q}_\alpha + L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$

3) $H(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = \sum_{\alpha=1}^{s} \dot{p}_\alpha q_\alpha - L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$

4) $H(q_1, q_2, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, t) = \sum_{\alpha=1}^{s} p_\alpha q_\alpha - L(q_\alpha, \dot{q}_\alpha, t)$,

в которой все обобщенные скорости выражены через обобщенные импульсы и обобщенные координаты.

10.2. Если функция Лагранжа равна $L = \frac{a\dot{z}^2}{2} - bz$, $a, b = const$, то функция Гамильтона имеет вид ($p = a\dot{z}$ – обобщенный импульс частицы):

1) $H = \frac{p^2}{2a} - bz$

2) $H = \frac{p^2}{2a} + bz$

3) $H = \frac{p^2}{2a}$

4) $H = bz$

10.3. Функция Гамильтона $H(q, p, t)$ представляет собой:

1) обобщенный импульс системы
2) момент импульса системы
3) обобщенную энергию системы, выраженную как функция от обобщенных координат и импульсов
4) действие системы

10.4. Закон сохранения $H = const$ имеет место, если функция Гамильтона системы не зависит явно от:

1) времени
2) обобщенной скорости
3) обобщенной координаты
4) обобщенного импульса

10.5. Функция Гамильтона находящейся в потенциальном поле U материальной точки массы m в декартовых координатах имеет вид:

1) $H = \frac{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}{2m} - U(x, y, z, t)$
2) $H = \frac{(\dot{q}_x^2+\dot{q}_y^2+\dot{q}_z^2)}{2m} + U(x, y, z, t)$
3) $H = \frac{(p_x^2+p_y^2+p_z^2)}{2m} + U(x, y, z, t)$
4) $H = \frac{(q_x^2+q_y^2+q_z^2)}{2m} + U(x, y, z, t)$

10.6. Функция Гамильтона находящейся в потенциальном поле U материальной точки массы m в цилиндрических координатах имеет вид:

1) $H = \frac{(p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\varphi^2}+p_z^2)}{2m} + U(\rho, \varphi, z, t)$
2) $H = \frac{\left(p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}+p_z^2\right)}{2m} + U(\rho, \varphi, z, t)$
3) $H = \frac{\left(\frac{p_\rho^2}{\rho^2}+p_\varphi^2+p_z^2\right)}{2m} + U(\rho, \varphi, z, t)$
4) $H = \frac{(p_\rho^2+p_\varphi^2+\frac{p_z^2}{z^2})}{2m} + U(\rho, \varphi, z, t)$

10.7. Функция Гамильтона находящейся в потенциальном поле U материальной точки массы m в сферических координатах имеет вид:

1) $H = \frac{(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta})}{2m} + U(r, \theta, \varphi, t)$

2) $H = \frac{(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{\theta^2} + \frac{p_\varphi^2}{\varphi^2})}{2m} + U(r, \theta, \varphi, t)$

3) $H = \frac{\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2 \sin^2\theta} + p_\varphi^2\right)}{2m} + U(r, \theta, \varphi, t)$

4) $H = \frac{(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{\theta^2} + \frac{p_\varphi^2}{\varphi^2})}{2m} + U(r, \theta, \varphi, t)$

10.8. Функция Гамильтона свободной частицы массы m в декартовой системе координат имеет вид:

1) $H = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m}$

2) $H = \frac{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2m}$

3) $H = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2}$

4) $H = \frac{m(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2}$

10.9. Функция Гамильтона частицы массы m в поле тяжести:

1) $H = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{2m} + mgz$

2) $H = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m} + mg$

3) $H = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m} + mgz$

4) $H = \frac{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2m} + mgz$

10.10. Функция Гамильтона заряженной частицы массы m и заряда q, находящейся в электромагнитном поле с векторным потенциалом $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ и скалярным потенциалом $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$, имеет вид:

1) $H = \frac{\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right)^2}{2m} + q\varphi(\boldsymbol{r}, t)$

2) $H = \frac{\left(\boldsymbol{p}^2 - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right)}{2m} + q\varphi(\boldsymbol{r}, t)$

3) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) + q\varphi(\boldsymbol{r}, t)$

4) $H = \frac{p^2}{2m} + 2\frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) + \frac{q^2}{c^2}A^2(\boldsymbol{r},t) + q\varphi(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{r}$

10.11. Функция Гамильтона одномерного гармонического осциллятора (с массой m и частотой ω) имеет вид:

1) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$
2) $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2 x^2}{2}$
3) $H = \frac{p^2 + m\omega^2 x^2}{2m}$
4) $H = \frac{p^2}{2m} + (1 - \frac{m\omega^2 x^2}{2})$

10.12. Функция Гамильтона математического маятника (с массой m и длиной l) имеет вид (см. рис. 2.1):

1) $H = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl$
2) $H = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + mgl\sin\varphi$
3) $H = \frac{\dot{p}_\varphi^2}{2ml^2} + mgl\sin\varphi$
4) $H = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi$

10.13. Функция Гамильтона для частицы массы m, движущейся по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в поле тяжести (ось x направлена вдоль плоскости) есть:

1) $H = \frac{p_x^2}{2m} - mgx\sin\alpha$
2) $H = \frac{p_x^2}{2m\sin\alpha} + mgx$
3) $H = \frac{p_x^2}{2m} + mgx^2$
4) $H = \frac{p_x^2}{2msin^2\alpha} - mgx^2sin^2\alpha$

10.14. Функция Гамильтона для частицы массы m, движущейся по поверхности цилиндра радиуса R в поле тяжести, направленном вдоль оси цилиндра, в цилиндрических координатах равна (ось z направлена вдоль оси цилиндра):

1) $H = \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz$
2) $H = \frac{p_R^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz$

3) $H = \frac{p_R^2}{2mR^2} + \frac{p_\varphi^2}{2m\varphi^2} + \frac{p_z^2}{2mz^2} + mgz$

4) $H = \frac{p_\varphi^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz$

10.15.Функция Гамильтона для частицы массы m, движущейся по поверхности сферы радиуса R в поле тяжести, в сферических координатах равна (полярная ось направлена вверх):

1) $H = \frac{p_R^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mgR$

2) $H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + mgR$

3) $H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2 sin^2\theta} + mgR\cos\theta$

4) $H = \frac{p_\theta^2}{2mR^2} + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2 sin^2\theta} + mgR\sin\theta$

10.16.* Функция Гамильтона заряженного гармонического осциллятора (заряд q, масса m, частота ω), находящегося в стационарном однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, может быть представлена в виде:

1) $H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{2c}[\boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{r}]\right)^2 + \frac{m\omega^2\boldsymbol{r}^2}{2}$

2) $H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{2c}[\boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{r}]\right)^2$

3) $H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + \frac{q}{2c}[\boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{r}] + \frac{m\omega^2\boldsymbol{r}^2}{2}$

4) $H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} + \frac{q}{2c}[\boldsymbol{\mathcal{H}}, \boldsymbol{r}]\right)^2 - \frac{m\omega^2\boldsymbol{r}^2}{2}$

10.17.* Функция Гамильтона симметрического волчка в отсутствие внешних сил, в которой в качестве обобщенных координат использованы декартовы координаты центра масс (X, Y, Z) и углы Эйлера (φ, θ, ψ) есть:

1) $H = \frac{1}{2m}(p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2) + \frac{1}{2I}\left(p_\varphi^2 + p_\theta^2 + p_\psi^2\right) + \frac{1}{2I_3}\left(\frac{p_\varphi^2}{\cos^2\theta} + p_\psi^2\right)$

2) $H = \frac{1}{2m}(p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2) + \frac{p_\psi^2}{2I_3}$

3) $H = \frac{1}{2m}(p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2) + \frac{1}{2I}\frac{\left(p_\varphi - I_3 p_\psi cos\theta\right)^2}{sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3}$

4) $H = \frac{1}{2m}(p_X^2 + p_Y^2 + p_Z^2) + \frac{1}{2I}\left(\frac{\left(p_\varphi - I_3 p_\psi cos\theta\right)^2}{sin^2\theta} + p_\theta^2\right) + \frac{p_\psi^2}{2I_3}$

где $I_1 = I_2 \neq I_3$ – главные моменты инерции, m – масса твердого тела, $p_X, p_Y, p_Z, p_\varphi, p_\theta, p_\psi$ – обобщенные импульсы по соответствующим обобщенным координатам.

10.18.** Записать функцию Гамильтона симметрического волчка в поле тяжести, точка опоры которого движется без трения в плоскости x, y, используя в качестве обобщенных координат декартовы координаты центра масс (X, Y, Z) и углы Эйлера (φ, θ, ψ):

1) $H = \frac{1}{2m}(p_X^2 + p_Y^2) + \frac{ml^2 sin^2\theta p_\theta^2}{2(ml^2 sin^2\theta + I)^2} + \frac{\left(p_\varphi - I_3 p_\psi cos\theta\right)^2}{2I sin^2\theta}$

2) $H = \frac{1}{2m}(p_X^2 + p_Y^2) + \frac{ml^2 sin^2\theta p_\theta^2}{2(ml^2 sin^2\theta + I)^2} + \frac{\left(p_\varphi - I_3 p_\psi cos\theta\right)^2}{2I sin^2\theta} + mglcos\theta$

3) $H = \frac{1}{2m}(p_X^2 + p_Y^2) + mglcos\theta$

4) $H = \frac{1}{2m}(p_X^2 + p_Y^2) + \frac{ml^2 sin^2\theta p_\theta^2 + I p_\theta^2}{2(ml^2 sin^2\theta + I)^2} + \frac{\left(p_\varphi - I_3 p_\psi cos\theta\right)^2}{2I sin^2\theta} + mglcos\theta$

где $I_1 = I_2 \neq I_3$ – главные моменты инерции, m – масса твердого тела и l – расстояние от центра инерции волчка до точки опоры.

10.19.* Записать функцию Гамильтона тонкого диска массы m и радиуса R, скатывающегося в поле тяжести без проскальзывания по наклонной плоскости, угол наклона которой α, выбрав в качестве обобщенной координаты координату центра инерции диска:

1) $H = \frac{p_X^2}{m} + mgXcos\alpha$

2) $H = \frac{p_X^2}{3m} + mgXsin\alpha$

3) $H = \frac{p_X^2}{3m} - mgX$

4) $H = \frac{p_X^2}{2m} + mgX$

10.20.* Записать функцию Гамильтона для двух заряженных частиц (массы m_1, m_2 и заряды q_1, q_2), взаимодействующих по закону Кулона, выбрав в качестве обобщенных координат системы радиус-вектор центра инерции $\boldsymbol{R}$ и вектор расстояния между частицами $\boldsymbol{r}$:

1) $H = \frac{p_{\boldsymbol{R}}^2}{2\mu} - \frac{p_{\boldsymbol{r}}^2}{2m} - \frac{q_1 q_2}{r}$

2) $H = \frac{p_{\boldsymbol{R}}^2}{2\mu} + \frac{p_{\boldsymbol{r}}^2}{2m} + \frac{q_1 q_2}{r}$

3) $H = \frac{p_{\boldsymbol{R}}^2}{2\mu} + \frac{p_{\boldsymbol{r}}^2}{2m} + \frac{q_1^2 q_2^2}{r^2}$

4) $H = \frac{p_{\boldsymbol{R}}^2}{2(\mu+m)} + \frac{p_{\boldsymbol{r}}^2}{2m} + \frac{q_1 q_2}{r}$

где μ – полная масса, а m – приведенная масса системы.

10.21.** Записать функцию Гамильтона для системы из N взаимодействующих по закону Кулона заряженных частиц (массы m_i, и заряды q_i), находящихся во внешнем электромагнитном поле (векторный потенциал магнитного поля $\boldsymbol{A}$, потенциал электрического поля ϕ):

1) $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q_i}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i, t)\right)^2 + \sum_{i \neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} + \sum_{i=1}^{N} q_i \phi(\boldsymbol{r_i}, t)$

2) $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i}\left(\boldsymbol{p} + \frac{q_i}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i, t)\right)^2 + \sum_{i \neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} - \sum_{i=1}^{N} q_i \phi(\boldsymbol{r_i}, t)$

3) $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i, t) + \sum_{i \neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} + \sum_{i=1}^{N} q_i \phi(\boldsymbol{r_i}, t)$

4) $H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}_i, t) + \sum_{i=1}^{N} q_i \phi(\boldsymbol{r_i}, t)$

10.22. Функция Лагранжа для свободной частицы массы m в случае одномерного движения имеет вид $L = \frac{m\dot{x}^2}{2}$. Функция Гамильтона при этом равна:

1) $H = m\dot{x}^2$

2) $H = -\frac{m\dot{x}^2}{2}$

3) $H = \frac{p_x^2}{2m}$

4) $H = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{p^2}{2m}$

10.23. Уравнениями Гамильтона называется следующая система $2s$ дифференциальных уравнений первого порядка ($\alpha = 1,2,\ldots,s$):

1) $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\ \dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

2) $\dot{q}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\ \dot{p}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

3) $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha},\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$

4) $\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial q_\alpha},\ \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$

10.24. Уравнения Гамильтона для свободной частицы массы m в случае одномерного движения вдоль оси x имеют вид:

1) $\dot{x} = \frac{p^2}{2m}\,, \dot{p} = 0$

2) $\dot{x} = 0\,, \dot{p} = 0$

3) $\dot{x} = 0\,, \dot{p} = \frac{p}{m}$

4) $\dot{x} = \frac{p}{m}\,, \dot{p} = 0$

10.25.* Уравнения Гамильтона для свободной частицы массы m в цилиндрических координатах имеют вид:

1) $\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}, \dot{z} = \frac{p_z}{m};\ \dot{p}_\rho = \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3}, \dot{p}_\varphi = 0, \dot{p}_z = 0$

2) $\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}, \dot{z} = \frac{p_z}{m};\ \dot{p}_\rho = 0, \dot{p}_\varphi = \frac{p_\varphi^2}{m\rho^3}, \dot{p}_z = 0$

3) $\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m}, \dot{z} = \frac{p_z}{m};\ \dot{p}_\rho = 0, \dot{p}_\varphi = \frac{p_\varphi}{m}, \dot{p}_z = 0$

4) $\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}, z = \frac{p_z}{m};\ p_\rho = \frac{p_\varphi}{m\rho^3}, p_\varphi = 0, p_z = 0$

10.26.* Уравнения Гамильтона для свободной частицы массы m в сферических координатах имеют вид:

1) $\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta};$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\varphi^2}{mr^3\sin^2\theta}, \dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2 cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}, \dot{p}_\varphi = 0$$

2) $\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m\theta^2}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\sin^2\varphi};$

$$\dot{p}_r = -\frac{p_r^2}{mr^3} - \frac{p_\varphi^2}{m\sin^2\varphi}, \dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2}{m\theta^3}, \dot{p}_\varphi = 0$$

3) $\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\cos^2\theta};$

$$\dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3}, \dot{p}_\theta = -\frac{p_\varphi^2 sin\theta}{mr^2\sin^3\theta}, \dot{p}_\varphi = 0$$

4) $\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m};$

$$\dot{p}_r = -\frac{p_\varphi^2}{mr^3}, \dot{p}_\theta = 0, \dot{p}_\varphi = 0$$

10.27.* Уравнения Гамильтона для свободной частицы массы m, движущейся по поверхности цилиндра радиуса R, в цилиндрических координатах имеют вид:

1) $\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2}, \dot{z} = \frac{p_z}{m};\ \dot{p}_\varphi = 0, \dot{p}_z = 0$

2) $\varphi = \frac{p_\varphi}{mR^2}, z = \frac{p_z}{m};\ p_\varphi = 0, p_z = 0$

3) $\dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2}, \dot{z} = \frac{p_z}{m};\ \dot{p}_\rho = 0, \dot{p}_\varphi = 0, \dot{p}_z = 0$

4) $p_\varphi = \frac{p_\varphi}{mR^2}, \dot{p_z} = \frac{p_z}{m};\ \dot{\varphi} = 0, \dot{z} = 0$

10.28.[*] Уравнения Гамильтона для свободной частицы массы m, движущейся по поверхности сферы радиуса R, в сферической системе координат имеют вид:

1) $\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2}, \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{m};\ \dot{p}_r = 0, \dot{p}_\varphi = 0, \dot{p}_\theta = 0$

2) $\theta = \frac{p_\theta}{mR^2}, \varphi = \frac{p_\varphi}{m};\ p_\varphi = 0, p_\theta = 0$

3) $\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mR^2}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2 sin^2\theta};\ \dot{p}_\theta = \frac{p_\varphi^2 \cos\theta}{mR^2 sin^3\theta}, \dot{p}_\varphi = 0$

4) $\dot{p}_r = \frac{p_r}{m}, \dot{p}_z = \frac{p_z}{mR^2 sin^2\theta R^2};\ \dot{\varphi} = 0, \dot{z} = 0$

10.29.Функция Гамильтона частицы массы m есть $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$. Уравнения Гамильтона для этой частицы имеют вид:

1) $\dot{r} = \frac{p_r}{mr^2}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m};\ \dot{p}_r = 0, \dot{p}_\varphi = \frac{p_\varphi^2}{mr^3}$

2) $\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2};\ \dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3}, \dot{p}_\varphi = 0$

3) $\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2};\ \dot{p}_r = 0, \dot{p}_\varphi = 0$

4) $\dot{r} = \frac{p_\varphi}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_r}{mr^2};\ \dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3}, \dot{p}_\varphi = 0$

10.30.Если функция Гамильтона равна $H = \frac{p_\varphi^2}{m(R^2+2l^2)} - mgl\cos\varphi$ $(m, g, R, l = \mathrm{const})$, то уравнения Гамильтона имеют вид:

1) $\dot{\varphi} = \frac{2p_\varphi}{m(R^2+2l^2)};\ \dot{p_\varphi} = -mgl\sin\varphi$

2) $\dot{R} = \frac{2\dot{p}_R}{mR^2};\ \dot{\varphi} = \frac{2p_\varphi}{m(R^2+2l^2)};\ \dot{p}_r = 0,\ \dot{p_\varphi} = mgl\sin\varphi$

3) $\dot{R} = \frac{2\dot{p}_R}{mR^2};\ \dot{\varphi} = \frac{2p_\varphi}{m(R^2+2l^2)};\ \dot{p}_r = 0,\ \dot{p_\varphi} = 0$

4) $\dot{\varphi} = \frac{2p_\varphi}{m(R^2+2l^2)};\ \dot{p_\varphi} = 0$

10.31.Если функция Гамильтона равна $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$ $(m, g, \alpha = \mathrm{const})$, то уравнения Гамильтона имеют вид:

1) $\dot{r} = \frac{p_r}{mr^2 sin^2\alpha},\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m};\ \dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3 sin^2\alpha} - mg\cos\alpha, \dot{p}_\varphi = 0$

2) $\dot{r} = \frac{p_r}{m},\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 sin^2\alpha};\ \dot{p}_r = \frac{p_\varphi^2}{mr^3 sin^2\alpha} - mg\cos\alpha\,, \dot{p}_\varphi = 0$

3) $\dot{r} = \frac{p_r}{m},\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 sin^2\alpha};\ \dot{p}_r = 0, \dot{p}_\varphi = 0$

4) $\dot{r} = \frac{p_r}{m},\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 sin^2\alpha};\ \dot{p}_r = 0, \dot{p}_\varphi = \frac{p_\varphi^2}{mr^3 sin^2\alpha} - mg\cos\alpha$

10.32.Если функция Гамильтона равна $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + mgl\cos\varphi$ $(m, g, l = \text{const})$, то уравнения Гамильтона имеют вид:

1) $\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mgl\cos\varphi};\ \dot{p}_x = 0,\ \dot{p}_\varphi = mgl\sin\varphi$

2) $\dot{x} = \frac{p_x}{ml^2}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m};\ \dot{p}_x = mgl\cos\varphi\,,\ \dot{p}_\varphi = 0$

3) $\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2};\ \dot{p}_x = 0,\ \dot{p}_\varphi = mgl\sin\varphi$

4) $\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mgl\cos\varphi};\ \dot{p}_x = 0,\ \dot{p}_\varphi = 0$

10.33.Если функция Гамильтона равна $H = \frac{p_x^2}{2m_1} + (m_2 - m_1)gx$ $(m_1, m_2, g = \text{const})$, то уравнения Гамильтона имеют вид:

1) $\dot{x} = \frac{p_x}{m_1}, \dot{p}_x = 0$

2) $\dot{x} = \frac{p_x}{2g(m_2 - m_1)}, \dot{p}_x = (m_2 - m_1)x$

3) $\dot{x} = (m_1 - m_2)g, \dot{p}_x = \frac{p_x}{m_1}(m_1 - m_2)gx$

4) $\dot{x} = \frac{p_x}{m_1}, \dot{p}_x = (m_1 - m_2)g$

10.34.Если функция Гамильтона равна $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2I} - mgx\sin\alpha$ $(m, I, \alpha = \text{const})$, то уравнения Гамильтона имеют вид:

1) $\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{I};\ \dot{p}_x = mg\sin\alpha,\ \dot{p}_\varphi = 0$

2) $x = \frac{p_x}{m}, \varphi = \frac{p_\varphi}{I};\ \dot{p}_x = mg\sin\alpha,\ \dot{p}_\varphi = 0$

3) $\dot{x} = \frac{p_x}{m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{I};\ p_x = mg\sin\alpha,\ p_\varphi = 0$

4) $\dot{x} = \frac{p_x}{2m}, \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{2I};\ \dot{p}_x = 0, \dot{p}_\varphi = 0$

10.35.Если функция Гамильтона равна $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{k}{2}(\sqrt{h^2 + x^2} - l_0)^2$ $(m, k, h, l_0 = \text{const})$, то уравнения Гамильтона имеют вид:

1) $x = \frac{p_x}{m};\ p_x = -k\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}$

2) $\dot{x} = \frac{p_x}{m};\ \dot{p}_x = -kx$

3) $\dot{x} = \frac{p_x}{m}$; $\dot{p}_x = k\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}$

4) $\dot{x} = \frac{p_x}{m}$; $\dot{p}_x = -kx\frac{(\sqrt{h^2+x^2}-l_0)}{\sqrt{h^2+x^2}}$

10.36.Если функция Гамильтона равна $H = \frac{p_\alpha^2}{2mh^2} - mgh\cos\alpha$ $(m, g, h, \alpha = \text{const})$, то уравнения Гамильтона имеют вид:

1) $\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{mh^2}, \dot{p}_\alpha = mgh\sin\alpha$

2) $\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{mh^2}, \dot{p}_\alpha = -mgh\sin\alpha$

3) $\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{mh^2}, \dot{p}_\alpha = mgh\cos\alpha$

4) $\dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{mh^2}, \dot{p}_\alpha = -mgh$

10.37.Функция Гамильтона частицы с зарядом q и массы m, находящейся в однородном постоянном магнитном поле с векторным потенциалом $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$, имеет вид:

1) $H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{r}, t)$

2) $H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right)^2$

3) $H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right)^2$

4) $H = \frac{\boldsymbol{p}}{2m} + \frac{q}{c}\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{r}, t)$

10.38.Функция Гамильтона частицы с зарядом q и массы m, находящейся в однородном постоянном электрическом поле с потенциалом $\phi(\boldsymbol{r}, t)$, имеет вид:

1) $H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - q\phi(\boldsymbol{r}, t)$

2) $H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + q\phi(\boldsymbol{r}, t)$

3) $H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - q\phi(\boldsymbol{r}, t)\right)^2$

4) $H = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} + q\phi(\boldsymbol{r}, t)\right)^2$

10.39.* Функция Гамильтона частицы с зарядом q и массы m находящейся в однородном постоянном магнитном поле с векторным потенциалом (в прямоугольных декартовых координатах) в виде $A_y = Hx, A_x = A_z = 0$, есть:

1) $H = \frac{1}{2m}\left(p_x + \frac{q}{c}Hx\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y + \frac{q}{c}Hx\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_z + \frac{q}{c}Hx\right)^2$

2) $H = \frac{1}{2m}\left(p_x - \frac{q}{c}Hx\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{q}{c}Hx\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(p_z - \frac{q}{c}Hx\right)^2$

3) $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2m}\left(p_y + \frac{q}{c}Hx\right)^2$

4) $H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{q}{c}Hx\right)^2$

10.40.* Частица с зарядом q и массой m находится в однородном постоянном магнитном поле, векторный потенциал которого (в прямоугольных декартовых координатах) задан в виде $A_y = \mathcal{H}x,\ A_x = A_z = 0$. Уравнения Гамильтона системы есть ($\omega = \frac{qH}{mc}$ – циклотронная частота):

1) $\dot{x} = \frac{p_x}{m},\ \dot{p}_x = \omega\left(p_y - \frac{q}{c}\mathcal{H}x\right),\ \dot{p}_y = 0,\ \dot{p}_z = 0$

2) $\dot{x} = \frac{p_x}{m},\ \dot{p}_x = 0,\ \dot{p}_y = 0,\ \dot{p}_z = 0$

3) $\dot{x} = \frac{p_x}{m},\ \dot{y} = \frac{p_y}{m},\ \dot{z} = \frac{p_z}{m},\ \dot{p}_x = 0,\ \dot{p}_y = 0,\ \dot{p}_z = 0$

4) $\dot{x} = \frac{p_x}{m},\ \dot{p}_x = \omega\left(p_y - \frac{q}{c}\mathcal{H}x\right),\ \dot{p}_y = \omega\left(p_x - \frac{q}{c}\mathcal{H}x\right),\ \dot{p}_z = \omega\left(p_y - \frac{q}{c}\mathcal{H}x\right)$

10.41.* Заряженная частица находится в однородном постоянном магнитном поле, векторный потенциал (в прямоугольных декартовых координатах) которого задан в виде $A_y = \mathcal{H}x, A_x = A_z = 0$. Из уравнений Гамильтона следует, что сохраняются следующие компоненты обобщенного импульса:

1) p_x, p_y

2) $p_x,$

3) p_y, p_z

4) p_y

10.42.* Функция Гамильтона одномерной системы имеет вид: $H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2} + \lambda\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\right)^2$, где m, λ, ω – постоянные положительные параметры. Будет ли сохраняться в процессе движения следующая величина $\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}$?

1) нет, будет сохраняться только: $\frac{p^2}{2m} = \text{const}$

2) да, $\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2x^2}{2}=\text{const}$

3) нет, будет сохраняться только: $\frac{m\omega^2x^2}{2}=\text{const}$

4) сохраняющихся величин нет

10.43. Дана функция Лагранжа системы:

$$L=\frac{m\dot{s}^2}{2}+mgs-\frac{k}{2}\left(2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+s^2}-a\right)^2$$

$m, a, k, g=$ const. Тогда функция Гамильтона есть:

1) $H=\frac{p_s^2}{2m}+\frac{k}{2}\left(2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+s^2}-a\right)^2$

2) $H=\frac{p_s^2}{2m}-mgs$

3) $H=\frac{p_s^2}{2m}+mgs-\frac{k}{2}\left(2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+s^2}-a\right)^2$

4) $H=\frac{p_s^2}{2m}-mgs+\frac{k}{2}\left(2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+s^2}-a\right)^2$

10.44. Известна функция Лагранжа системы:

$L=\frac{a^2\dot{\varphi}^2}{2}(m_1cos^2\theta+m_2sin^2\theta)-\frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1sin\theta+m_2cos\theta), \quad m_1, m_2, g, a=$ const. Тогда функция Гамильтона есть:

1) $H=\frac{p_\varphi^2}{2a^2}+\frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1sin\theta+m_2cos\theta)$

2) $H=\frac{p_\varphi^2}{2a^2(m_1cos^2\theta+m_2sin^2\theta)}+\frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1sin\theta+m_2cos\theta)$

3) $H=\frac{p_\varphi^2}{2a^2(m_1cos^2\theta+m_2sin^2\theta)}-\frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1cos^2\theta+m_2sin^2\theta)$

4) $H=\frac{p_\varphi^2}{2a^2(m_1cos^2\theta+m_2sin^2\theta)}+\frac{ga}{\sqrt{2}}$

10.45. Дана функция Лагранжа системы: $L=\frac{m\dot{r}^2}{2}+\frac{e^2R}{2(r^2-R^2)}$, $m, e, R=$ const. Тогда функция Гамильтона есть:

1) $H=\frac{p_r^2}{2m}-\frac{e^2R}{2(r^2-R^2)}$

2) $H=\frac{p_r^2}{2m}+\frac{e^2R}{2(r^2-R^2)}$

3) $H=\frac{p_r^2}{2m}$

4) $H = \frac{e^2 R}{2(r^2 - R^2)}$

10.46.Дана функция Лагранжа системы: $L = \frac{m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} + \frac{m_2\dot{r}^2}{2}$, $m_1, m_2 = \mathrm{const}$. Тогда функция Гамильтона есть:

1) $H = \frac{\dot{p}_r^2}{2m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)} + \frac{\dot{p}_\varphi^2}{2m_2\dot{r}^2}$

2) $H = \frac{\dot{p}_r^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\dot{p}_\varphi^2}{2m_2 r^2}$

3) $H = \frac{\dot{p}_r^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\dot{p}_\varphi^2}{2m_2 r^2}$

4) $H = \frac{\dot{p}_r^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{\dot{p}_\varphi^2}{2m_2 r^2}$

10.47.Известна функция Лагранжа системы:

$$L = \frac{(m_1 + m_2)\dot{\boldsymbol{r}}_m^2}{2} + \frac{\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2}{2} - \frac{k}{2}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l_0})^2 + (m_1 + m_2)g\boldsymbol{r}_m,$$

$m_1, m_2, \mu, k, \boldsymbol{l_0} = \mathrm{const}$. Тогда функция Гамильтона есть:

1) $H = \frac{\boldsymbol{p}_{rm}^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{\boldsymbol{p}_r^2}{2\mu} - \frac{k}{2}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l_0})^2 + (m_1 + m_2)g\boldsymbol{r}_m$

2) $H = \frac{\boldsymbol{p}_{rm}^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\boldsymbol{p}_r^2}{2\mu} + \frac{k}{2}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l_0})^2 - (m_1 + m_2)g\boldsymbol{r}_m$

3) $H = \frac{\boldsymbol{p}_{rm}^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\boldsymbol{p}_r^2}{2\mu} - \frac{k}{2}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l_0})^2 + (m_1 + m_2)g\boldsymbol{r}_m$

4) $H = \frac{\boldsymbol{p}_{rm}^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{\boldsymbol{p}_r^2}{2\mu} - \frac{1}{2k}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{l_0})^2 + \frac{1}{(m_1 + m_2)g}\boldsymbol{r}_m$

10.48.* Два точечных заряда с массами m_1 и m_2 и зарядами q_1 и q_2 находятся в однородном электрическом поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Функция Гамильтона системы представима в виде ($\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ – радиус-векторы зарядов):

1) $H = \frac{p_1^2}{2} + \frac{p_2^2}{2} - \frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} + q_1\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}_1 + q_2\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}_2$

2) $H = \frac{p_1^2}{m_2} + \frac{p_2^2}{m_1} + \frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} - q_1\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}_1 + q_2\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}_2$

3) $H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} + q_1\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}_1 + q_2\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}_2$

4) $H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{q_1 q_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} - q_1\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}_1 - q_2\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}_2$

10.49.Функция Лагранжа системы: $L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{qH_0}{2c}\rho^2$, $m, q, H_0, c = \mathrm{const}$. Тогда функция Гамильтона есть:

1) $H=\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}+p_z^2\right)+\frac{qH_0}{2c}\rho^2$
2) $H=\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\frac{p_\varphi^2}{\rho^2}+p_z^2\right)-\frac{qH_0}{2c}\rho^2$
3) $H=\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+\frac{\left(p_\varphi-\frac{qH_0}{2c}\rho^2\right)^2}{\rho^2}+p_z^2\right)$
4) $H=\frac{1}{2m}\left(p_\rho^2+p_\varphi^2+p_z^2\right)+\frac{qH_0}{2c}\rho^2$

10.50.Функция Лагранжа системы имеет вид:

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+Z^2\right)+\frac{ml^2}{6}\left(\dot{\varphi}^2 sin^2\theta+\dot{\theta}^2\right)-mgZ$$

где X,Y,Z – декартовы координаты, φ,θ – углы Эйлера, $m,g,l=\text{const}$. Тогда функция Гамильтона есть:

1) $H=\frac{1}{2m}(P_X^2+P_Y^2+P_Z^2)+\frac{ml^2}{6}\left(P_\theta^2+\frac{P_\varphi^2}{sin^2\theta}\right)-mgZ$
2) $H=\frac{1}{2m}(P_X^2+P_Y^2+P_Z^2)+\frac{3}{2ml^2}\left(P_\theta^2+\frac{P_\varphi^2}{sin^2\theta}\right)+mgZ$
3) $H=\frac{1}{2m}\left(P_X^2+P_Y^2+P_Z^2+P_\theta^2+P_\varphi^2\right)+mgZ$
4) $H=\frac{1}{2m}(P_X^2+P_Y^2+P_Z^2)+mgZ$

10.51.* Функция Лагранжа релятивистской частицы с массой покоя m_0 имеет вид $L=-m_0c^2\sqrt{1-\frac{\dot{\boldsymbol{r}}^2}{c^2}}$, $c=\text{const}$. Функция Гамильтона частицы есть:

1) $H=c\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m_0^2c^2}$
2) $H=\sqrt{\boldsymbol{p}^2-m_0^2c^2}$
3) $H=m_0c^2\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{p}^2}{c^2}}$
4) $H=m_0c^2\boldsymbol{p}^2$

10.52.Груз на пружинке совершает колебания в поле тяжести. Сколько канонических уравнений можно составить?

1) 1
2) 2
3) 3
4) 4

10.53.** Функция Гамильтона частицы с зарядом q и массы m, движущейся в однородном постоянном магнитном поле $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, имеет вид:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2m}\left(p_y - \frac{q}{c}Hx\right)^2, \qquad c = const.$$

Закон движения частицы есть:

1) $x = Acos(\omega t + \alpha) + x_0,\ y = 0,\ z = \frac{p_z}{m}t + z_0$
2) $x = Acos(\omega t + \alpha) + x_0,\ y = -Asin(\omega t + \alpha) + y_0,\ z = \frac{p_z}{m}t + z_0$
3) $x = Acos(\omega t + \alpha) + x_0,\ y = -Asin(\omega t + \alpha) + y_0,\ z = 0$
4) $x = 0,\ y = Asin(\omega t + \alpha) + y_0,\ z = \frac{p_z}{m}t + z_0$

где $A,\ \alpha,\ x_0,\ y_0,\ z_0\ =\ \text{const}$; $\omega = \frac{qH}{mc}$.

10.54. Функция Лагранжа материальной точки массы m имеет вид: $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{\alpha m}{2x^2}$, $\alpha = \text{const}$. Тогда функция Гамильтона:

1) $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{\alpha m}{2x^2}$
2) $H = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{\alpha m}{2x^2}$
3) $H = \frac{p_x^2}{2m}$
4) $H = \frac{\alpha m}{2x^2}$

10.55. Функция Лагранжа системы: $L = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} - \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - l_0)^2$, $m_1, m_2, k, l_0 = \text{const}$. Тогда функция Гамильтона есть:

1) $H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - l_0)^2$
2) $H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} - \frac{k}{2}(x_2 - x_1 - l_0)^2$
3) $H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{k}{2}(l_0)^2$
4) $H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}$

10.56. Функция Гамильтона одномерной системы имеет вид: $H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2} + \lambda\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\right)^2$, где m, λ, ω – постоянные положительные параметры. Сохраняется ли в этом случае энергия системы? Если да, записать закон сохранения энергии.

1) нет, не сохраняется
2) да, сохраняется, $\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2} + \lambda\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\right)^2 = \text{const}$

3) да, сохраняется, $\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - \lambda\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)^2 = \text{const}$
4) да, сохраняется, $\frac{p^2}{2m} = \text{const}$

10.57.** Функция Гамильтона одномерной системы имеет вид: $H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \lambda\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)^2$, где m, λ, ω – постоянные положительные параметры. Закон движения системы есть.

1) $x(t) = C\sin(\lambda\omega(t - t_0))$, $C = \text{const}$
2) $x(t) = x_0 + \sqrt{m\omega^2}\sin(\omega(t - t_0))$, $x_0 = x(t_0)$
3) $x(t) = \sqrt{\frac{2C}{m\omega^2}}\cos((1 + 2\lambda C)\omega(t - t_0))$, $C = \text{const}$
4) $x(t) = x_0 + \sqrt{\frac{2C}{m\omega^2}}\sin((1 + 2\lambda C)\omega(t - t_0))$, $x_0 = x(t_0)$

§ 11. Канонические преобразования. Скобки Пуассона

В данном параграфе, если не оговорено иное, под q_α, p_α понимаются старые обобщенные координаты и обобщенные импульсы соответственно; Q_α, P_α – новые обобщенные координаты и обобщенные импульсы соответственно; H, H' - старая и новая функции Гамильтона соответственно; $\alpha = 1,2,\dots,s$, где s – число степеней свободы механической системы. В случае одной степени свободы индекс α у переменных q, p, Q, P опускается.

11.1.Каноническими преобразованиями называются:

1) преобразования от старых обобщенных координат и обобщенных импульсов к новым обобщенным координатам и обобщенным импульсам, при которых сохраняют формальный вид уравнения Гамильтона
2) преобразования от старых обобщенных координат к новым обобщенным координатам, при которых функция Гамильтона обращается в ноль
3) преобразования от старых обобщенных импульсов к новым обобщенным импульсам, при которых функция Гамильтона обращается в ноль
4) преобразования от старых обобщенных координат и обобщенных импульсов к новым обобщенным координатам и обобщенным

импульсам, при которых формальный вид уравнений Гамильтона не сохраняется

11.2. Производящая функция F зависит от старых и новых обобщенных координат и времени. Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $q_\alpha = \frac{\partial F}{\partial p_\alpha},\ Q_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial P_\alpha},\ H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$
2) $p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha},\ \ P_\alpha = \frac{\partial F}{\partial Q_\alpha},\ H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$
3) $p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha},\ \ P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial Q_\alpha},\ H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$
4) $p_\alpha = \frac{\partial F}{\partial Q_\alpha},\ \ P_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial q_\alpha},\ H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$

11.3. Производящая функция Φ зависит от старых обобщенных координат, новых обобщенных импульсов и времени. Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $p_\alpha = -\frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha},\ \ Q_\alpha = -\frac{\partial \Phi}{\partial P_\alpha},\ H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$
2) $p_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial P_\alpha},\ \ Q_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha},\ H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$
3) $p_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha},\ \ Q_\alpha = -\frac{\partial \Phi}{\partial P_\alpha},\ H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$
4) $p_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial q_\alpha},\ \ Q_\alpha = \frac{\partial \Phi}{\partial P_\alpha},\ H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$

11.4. Фазовым пространством для механической системы с s степенями свободы называется:

1) s-мерное пространство, снабженное декартовой системой координат, по осям которой откладываются значения обобщенных импульсов системы
2) $2s$-мерное пространство, снабженное декартовой системой координат, по осям которой откладываются значения обобщенных координат и обобщенных импульсов системы
3) $2s$-мерное пространство, снабженное декартовой системой координат, по осям которой откладываются значения обобщенных импульсов и производных по времени от обобщенных импульсов системы
4) $(s+1)$-мерное пространство, снабженное декартовой системой координат, по осям которой откладываются значения обобщенных импульсов и обобщенной энергии системы

11.5. Какое из приведенных ниже утверждений является правильным?

1) объем области фазового пространства не изменяется при канонических преобразованиях
2) объем области фазового пространства может как изменяться, так и не изменяться при канонических преобразованиях
3) объем области фазового пространства увеличивается при канонических преобразованиях
4) объем области фазового пространства уменьшается при канонических преобразованиях

11.6. Производящая функция:

$$F = \sum_{\alpha} q_\alpha Q_\alpha.$$

Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $p_\alpha = Q_\alpha,\ \ P_\alpha = -q_\alpha,\ \ H' = H$
2) $p_\alpha = -Q_\alpha,\ \ P_\alpha = q_\alpha,\ \ H' = H$
3) $p_\alpha = \ P_\alpha,\ Q_\alpha = q_\alpha,\ H' = H$
4) $p_\alpha = -\,P_\alpha,\ Q_\alpha = q_\alpha,\ H' = 0$

11.7. Производящая функция:

$$\Phi = qP - aPt + mqa,\ \ m, a = \text{const}$$

Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $Q = q + at, p = P - ma, H' = H - aP$
2) $Q = q - at, p = -P - ma, H' = H$
3) $Q = q - at, p = P + ma, H' = H - aP$
4) $Q = q - at, p = P + ma, H' = H$

11.8. Функция Гамильтона механической системы $H = {p^2}/{2m}$ $(m = \text{const})$.

Каноническое преобразование, порождаемое функцией:

$$\Phi = qP - \frac{1}{2m} P^2 t$$

имеет вид:

1) $Q = q + \left(P/_m\right)t,\ p = P,\ \ H' = H$

2) $Q = q,\ p = P - \left(Q/_m\right)t,\ \ H' = H$

3) $Q = q,\ p = P,\ \ H' = 0$

4) $Q = q - \left(P/_m\right)t,\ p = P,\ \ H' = 0$

11.9.Производящая функция:

$$\Phi = qP + (bq - aP)t,\ \ a, b = \text{const}$$

Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $Q = q - at,\ \ \ p = P + bt,\ \ H' = H$
2) $Q = q - at,\ \ \ p = P + bt,\ \ H' = H + bq - aP$
3) $Q = q + at,\ \ \ p = P - bt,\ \ H' = H + bq - aP$
4) $Q = q + at,\ \ \ p = P - bt,\ \ H' = H$

11.10.Производящая функция:

$$F = \sqrt{aq^2 + bQ^2},\ \ a, b = \text{const}$$

Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $P = -\frac{aq+bQ}{\sqrt{aq^2+bQ^2}},\ \ \ p = \frac{aq+bQ}{\sqrt{aq^2+bQ^2}},\ \ H' = 0$
2) $P = -\frac{aq+bQ}{\sqrt{aq^2+bQ^2}},\ \ \ p = \frac{aq+bQ}{\sqrt{aq^2+bQ^2}},\ \ H' = H$
3) $P = -\frac{bQ}{\sqrt{aq^2+bQ^2}},\ \ \ p = \frac{aq}{\sqrt{aq^2+bQ^2}},\ \ H' = H$
4) $P = -\frac{bQ}{\sqrt{aq^2+bQ^2}},\ \ \ p = \frac{aQ}{\sqrt{aq^2+bQ^2}},\ \ H' = 0$

11.11.Производящая функция:

$$\Phi = \exp(aq^2 + bP^2),\ \ a, b = \text{const}$$

Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $Q = 2bP\exp(bP^2),\ \ p = 2aq\exp(aq^2),\ \ H' = H$
2) $Q = P\exp(aq^2 + bP^2),\ \ p = q\exp(aq^2 + bP^2),\ \ H' = H$
3) $Q = 2bP\exp(aq^2 + bP^2),\ \ p = 2aq\exp(aq^2 + bP^2),\ \ H' = 0$

4) $Q = 2bP\exp(aq^2 + bP^2),\;\; p = 2aq\exp(aq^2 + bP^2),\;\; H' = H$

11.12.Производящая функция:

$$F = aqsin(bQq) + ct,\;\; a, b, c = \text{const}$$

Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $P = -abq^2cos(bQq),\; p = asin(bQq) + abqQcos(bQq),\; H' = H + c$
2) $P = -abq^2cos(bQq),\;\; p = asin(bQq) + abqQcos(bQq),\;\; H' = H$
3) $P = -abq^2cos(bQq),\;\; p = abqQcos(bQq),\;\; H' = H + c$
4) $P = -abq^2cos(bQq),\;\; p = abqQcos(bQq),\;\; H' = H$

11.13.Производящая функция:

$$\Phi = aq^3 + bP^4 + \mathrm{c}q^2P^2 + dt^2,\;\; a, b, c, d = \text{const}$$

Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $Q = 4bP^3 + 2\mathrm{c}q^2P,\;\; p = 3aq^2 + 2\mathrm{c}qP^2,\;\; H' = H$
2) $Q = 4bP^3 + 2\mathrm{c}q^2P,\;\; p = 3aq^2 + 2\mathrm{c}qP^2,\;\; H' = H + 2dt$
3) $Q = 4bP^3,\;\; p = 3aq^2 + 2\mathrm{c}qP^2,\;\; H' = H + 2dt$
4) $Q = 4bP^3 + 2\mathrm{c}q^2P,\;\; p = 3aq^2,\;\; H' = H + 2dt$

11.14.Производящая функция:

$$F = arcsin(Q/q) + bt,\;\; a, b = \text{const},\qquad -1 < \frac{Q}{q} < 1$$

Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $P = -\frac{1}{\sqrt{q^2-Q^2}},\; p = \frac{Q}{|q|\sqrt{q^2-Q^2}},\;\; H' = H + b$
2) $P = -\frac{1}{\sqrt{q^2-Q^2}},\; p = -\frac{Q}{|q|\sqrt{q^2-Q^2}},\;\; H' = H + b$
3) $P = -\frac{1}{\sqrt{q^2-Q^2}},\; p = -\frac{Q}{|q|\sqrt{q^2-Q^2}},\;\; H' = H$
4) $P = \frac{1}{\sqrt{q^2-Q^2}},\; p = \frac{1}{\sqrt{q^2-Q^2}},\;\; H' = H + b$

11.15.Производящая функция:

$$\Phi = arctg(aqP),\;\; a = \text{const}$$

Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $p = \frac{1}{1+a^2q^2P^2}$, $Q = \frac{1}{1+a^2q^2P^2}$, $H' = H$

2) $p = aP$, $Q = aq$, $H' = H$

3) $p = \frac{aP}{1+a^2q^2P^2}$, $Q = -\frac{aq}{1+a^2q^2P^2}$, $H' = H$

4) $p = \frac{aP}{1+a^2q^2P^2}$, $Q = \frac{aq}{1+a^2q^2P^2}$, $H' = H$

11.16.Производящая функция:

$$F = cos\left(a\sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha\right),\ a = \text{const}$$

Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $p_\alpha = -aQ_\alpha sin\left(a\sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha\right)$, $P_\alpha = aq_\alpha sin\left(a\sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha\right)$, $H' = H$

2) $p_\alpha = -sin\left(a\sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha\right)$, $P_\alpha = sin\left(a\sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha\right)$, $H' = H$

3) $p_\alpha = -asin\left(a\sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha\right)$, $P_\alpha = asin\left(a\sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha\right)$, $H' = H$

4) $p_\alpha = aQ_\alpha sin\left(a\sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha\right)$, $P_\alpha = -aq_\alpha sin\left(a\sum_\alpha q_\alpha Q_\alpha\right)$, $H' = H$

11.17.Производящая функция:

$$\Phi = exp\left(\sum_\alpha aq_\alpha P_\alpha\right),\ a = \text{const}$$

Каноническое преобразование, порождаемое данной функцией, имеет вид:

1) $p_\alpha = exp\left(\sum_\alpha aq_\alpha P_\alpha\right)$, $Q_\alpha = -exp\left(\sum_\alpha aq_\alpha P_\alpha\right)$, $H' = H$

2) $p_\alpha = exp\left(\sum_\alpha aq_\alpha P_\alpha\right), \qquad Q_\alpha = exp\left(\sum_\alpha aq_\alpha P_\alpha\right), \ H' = H$

3) $p_\alpha = aP_\alpha, \qquad Q_\alpha = -aq_\alpha, \ H' = H$

4) $p_\alpha = aP_\alpha exp\left(\sum_\alpha aq_\alpha P_\alpha\right), \qquad Q_\alpha = aq_\alpha exp\left(\sum_\alpha aq_\alpha P_\alpha\right), \ H' = H$

11.18.* Производящая функция:

$$\Phi = qP + (bq - aP)t, \ \ a, b = \text{const}$$

Уравнения Гамильтона в новых переменных имеют вид:

1) $\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} - a, \ \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} - b$
2) $\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}, \ \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q}$
3) $\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} + a, \ \dot{P} = \frac{\partial H}{\partial Q} + b$
4) $\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} - a, \ \dot{P} = 0$

11.19.* Уравнения Гамильтона для свободной частицы с массой m в новых переменных, определяемых каноническим преобразованием, порождаемым производящей функцией:

$$\Phi = qP - aPt + mqa, \ \ a = \text{const}$$

имеют вид:

1) $\dot{Q} = 0, \ \dot{P} = 0$
2) $\dot{Q} = P, \ \dot{P} = 0$
3) $\dot{Q} = \frac{P}{m}, \ \dot{P} = 0$
4) $\dot{Q} = 0, \ \dot{P} = \frac{P}{m}$

11.20.* Уравнения Гамильтона для свободной частицы с массой m в новых переменных, определяемых каноническим преобразованием, порождаемым производящей функцией:

$$\Phi = qP + mqa + bt^2, \qquad a, b = \text{const}$$

имеют вид:

1) $\dot{Q} = 0, \ \dot{P} = 0$
2) $\dot{Q} = \frac{P}{m} + a, \ \dot{P} = 0$
3) $\dot{Q} = \frac{P}{m}, \ \dot{P} = Q + a$

4) $\dot{Q} = 0,\ \dot{P} = \frac{P}{m}$

11.21.* Уравнения Гамильтона для частицы с массой m, движущейся под действием упругой силы $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r},\ k = \text{const}$, в новых переменных $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{P})$, определяемых каноническим преобразованием, порождаемым производящей функцией:

$$\Phi = \boldsymbol{rP} - \boldsymbol{aP}t + m\boldsymbol{ra},\ \ \boldsymbol{a} = \text{const}$$

имеют вид:

1) $\dot{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{P}}{m},\ \ \dot{\boldsymbol{P}} = -k(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{a}t)$
2) $\dot{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{P}}{m},\ \ \dot{\boldsymbol{P}} = k(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{a}t)$
3) $\dot{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{P}}{m},\ \ \dot{\boldsymbol{P}} = -k\boldsymbol{R}$
4) $\dot{\boldsymbol{R}} = -\frac{\boldsymbol{P}}{m},\ \ \dot{\boldsymbol{P}} = -k\boldsymbol{R}$

11.22.* Уравнения Гамильтона для частицы с массой m, движущейся под действием упругой силы $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r},\ k = \text{const}$, в новых переменных $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{P})$, определяемых каноническим преобразованием, порождаемым производящей функцией:

$$\Phi = \boldsymbol{rP} + (\boldsymbol{br} - \boldsymbol{aP})t,\ \ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \text{const}$$

имеют вид:

1) $\dot{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{P}+\boldsymbol{b}t}{m},\ \ \dot{\boldsymbol{P}} = -k(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{a}t)$
2) $\dot{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{P}+\boldsymbol{b}t}{m} - \boldsymbol{a},\ \ \dot{\boldsymbol{P}} = -k(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{a}t) - \boldsymbol{b}$
3) $\dot{\boldsymbol{R}} = -\boldsymbol{a},\ \ \dot{\boldsymbol{P}} = -k(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{a}t) - \boldsymbol{b}$
4) $\dot{\boldsymbol{R}} = \frac{\boldsymbol{P}+\boldsymbol{b}t}{m},\ \ \dot{\boldsymbol{P}} = -\boldsymbol{b}$

11.23.Скобка Пуассона двух функций f и g определяется равенством:

1) $\{f, g\} = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha}\right)$

2) $\{f, g\} = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right)$

3) $\{f, g\} = \sum_{\alpha=1}^{s}\left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial g}{\partial q_\alpha}\right)$

4) $\{f, g\} = \sum_{\alpha=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial g}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial g}{\partial p_\alpha} \right)$

11.24. Скобка Пуассона $\{x, x\}$ равна:

1) p_x
2) 1
3) x
4) 0

11.25. Скобка Пуассона $\{x, y\}$ равна:

1) z
2) 0
3) x
4) y

11.26. Скобка Пуассона $\{x, z\}$ равна:

1) $-y$
2) 0
3) x
4) z

11.27. Скобка Пуассона $\{p_x, x\}$ равна:

1) 0
2) 1
3) p_x
4) x

11.28. Скобка Пуассона $\{p_x, y\}$ равна:

1) 0
2) 1
3) p_x
4) y

11.29. Скобка Пуассона $\{p_x, z\}$ равна:

1) 0
2) 1
3) p_x

4) z

11.30.Скобка Пуассона $\{p_x, p_x\}$ равна:
1) 1
2) 0
3) p_x
4) p_x^2

11.31.Скобка Пуассона $\{p_x, p_y\}$ равна:
1) 1
2) 0
3) p_x
4) p_y

11.32.Скобка Пуассона $\{p_x, p_z\}$ равна:
1) 1
2) 0
3) p_x
4) p_z

11.33.Скобка Пуассона $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}\}$ равна:
1) 0
2) 1
3) $\boldsymbol{p}$
4) p^2

11.34.Скобка Пуассона $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}\}$ равна:
1) $\boldsymbol{r}$
2) r^2
3) 0
4) 1

11.35.* Скобка Пуассона $\{f, M_z\}$, где f – произвольная скалярная функция координат и импульса, M_z – проекция момента импульса на ось z, равна:
1) f
2) M_z
3) 1
4) 0

11.36. Скобка Пуассона $\{f, c\}$, где f – произвольная функция координат и импульса частицы, а $c = \text{const}$, равна:

1) c
2) f
3) 1
4) 0

11.37. Скобка Пуассона $\{f, q_\alpha\}$, где f – произвольная функция координат и импульса частицы, равна:

1) $\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$
2) $\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$
3) 1
4) 0

11.38. Скобка Пуассона $\{f, p_\alpha\}$, где f – произвольная функция координат и импульса частицы, равна:

1) $\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}$
2) $-\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$
3) $\frac{\partial f}{\partial q_\alpha}$
4) 0

11.39. Частная производная от скобки Пуассона $\frac{\partial}{\partial t}\{f, g\}$, где f и g – произвольные функции, равна:

1) 0
2) $\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}$
3) $\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}$
4) $\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} - \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}$

11.40.* Скобка Пуассона $\{\boldsymbol{p}, r^2\}$ равна:

1) $\boldsymbol{p}$
2) 0
3) 1

4) $2\boldsymbol{r}$

11.41.* Скобка Пуассона $\{p^2, \boldsymbol{r}\}$ равна:

1) 0
2) 1
3) $\boldsymbol{2p}$
4) $2\boldsymbol{r}$

11.42.* Скобка Пуассона $\{p^2, p_x\}$ равна:

1) p_x
2) 0
3) p_y
4) p_z

11.43.* Скобка Пуассона $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{ar}\}$, где $\boldsymbol{a} = \mathrm{const}$, равна:

1) 0
2) 1
3) $\boldsymbol{p}$
4) $\boldsymbol{a}$

11.44.* Скобка Пуассона $\{\boldsymbol{ap}, \boldsymbol{r}\}$, где $\boldsymbol{a} = \mathrm{const}$, равна:

1) $\boldsymbol{a}$
2) $\boldsymbol{p}$
3) 0
4) 1

11.45.* Скобка Пуассона $\{\boldsymbol{ap}, \boldsymbol{br}\}$, где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} = \mathrm{const}$, равна:

1) $\boldsymbol{a}$
2) $\boldsymbol{b}$
3) $\boldsymbol{ab}$
4) 0

11.46.** Скобка Пуассона $\{|\boldsymbol{p}|, |\boldsymbol{r}|\}$ равна:

1) 0
2) 1
3) $\boldsymbol{pr}$
4) $\dfrac{\boldsymbol{pr}}{|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{r}|}$

11.47.* Скобка Пуассона $\{M_x, p_x\}$, где M_x – проекция момента импульса на ось x, равна:

1) 0
2) p_y
3) yp_y
4) M_z

11.48.* Скобка Пуассона $\{M_x, x\}$, где M_x – проекция момента импульса на ось x, равна:

1) M_x
2) 0
3) yp_y
4) M_z

11.49.* Скобка Пуассона $\{M_x, p_y\}$, где M_x – проекция момента импульса на ось x, равна:

1) 0
2) $-p_z$
3) p_y
4) M_z

11.50.* Скобка Пуассона $\{M_x, y\}$, где M_x – проекция момента импульса на ось x, равна:

1) $-z$
2) p_z
3) p_y
4) z

11.51.* Скобка Пуассона $\{M_x, p_z\}$, где M_x – проекция момента импульса на ось x, равна:

1) y
2) $-p_z$
3) p_y
4) M_y

11.52.* Скобка Пуассона $\{M_x, z\}$, где M_x – проекция момента импульса на ось x, равна:

1) z
2) yp_z
3) zp_y
4) y

11.53.* Скобка Пуассона $\{M_x, M_x\}$, где M_x – проекция момента импульса на ось x, равна:

1) x
2) 0
3) M_x
4) p_x

11.54.* Скобка Пуассона $\{M_x, M_y\}$, где M_x, M_y – проекции момента импульса на оси x и y соответственно, равна:

1) z
2) $-p_z$
3) $-M_z$
4) zM_z

11.55.* Скобка Пуассона $\{M_x, M_z\}$, где M_x, M_z – проекции момента импульса на оси x и z соответственно, равна:

1) M_y
2) $-p_y$
3) $-M_z$
4) M_x

11.56.Скобка Пуассона $\{f, g\}$, функций:

$$f = pq, \quad g = \sqrt{p^2 + q^2}$$

равна:

1) 0
2) $-p$
3) $\frac{q^2 - p^2}{\sqrt{p^2 + q^2}}$
4) $p^2 + q^2$

11.57. Скобка Пуассона $\{f, g\}$, функций:

$$f = p, \;\; g = p^2 + q^2 + 2p^3q^4$$

равна:

1) 0
2) p^3q^3
3) $2q$
4) $2q + 8p^3q^3$

11.58. Скобка Пуассона $\{f, g\}$, функций:

$$f = p + q, \;\; g = arctg(pq)$$

равна:

1) $\frac{p-q}{1+p^2q^2}$
2) $p - q$
3) $\frac{p}{1+p^2q^2}$
4) $\frac{q}{1+p^2q^2}$

11.59. Для того, чтобы преобразование было каноническим, новые обобщенные координаты и обобщенные импульсы должны удовлетворять следующим соотношением ($\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера, скобки Пуассона вычисляются по старым обобщенным координатам и обобщенным импульсам):

1) $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \{P_\alpha, P_\beta\} = 0, \{P_\alpha, Q_\beta\} = 0$
2) $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \{P_\alpha, P_\beta\} = 0, \{P_\alpha, Q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}$
3) $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}, \{P_\alpha, P_\beta\} = 0, \{P_\alpha, Q_\beta\} = 0$
4) $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = 0, \{P_\alpha, P_\beta\} = \delta_{\alpha\beta}, \{P_\alpha, Q_\beta\} = 0$

11.60. Полную производную по времени от функции f можно с помощью скобок Пуассона представить в виде:

1) $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{p, f\}$
2) $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{q, f\}$
3) $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}$

4) $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial t} + \{pq, f\}$

11.61.Используя скобки Пуассона, уравнения Гамильтона можно записать в виде:

1) $\dot{p}_\alpha = \{H, q_\alpha\},\ \dot{q}_\alpha = \{H, p_\alpha\}$
2) $\dot{p}_\alpha = \{q_\alpha, p_\alpha\},\ \dot{q}_\alpha = \{p_\alpha, q_\alpha\}$
3) $\dot{p}_\alpha = -\{H, p_\alpha\},\ \dot{q}_\alpha = \{H, q_\alpha\}$
4) $\dot{p}_\alpha = \{H, p_\alpha\},\ \dot{q}_\alpha = \{H, q_\alpha\}$

11.62.Значение выражения:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}$$

равно (f, g, h - произвольные функции):

1) 0
2) 1
3) $-\{f, g\}$
4) $\{f, h\}$

11.63.* Является ли преобразование:

$$Q = \sqrt{2q} cosp, \qquad P = \sqrt{2q} sinp, \qquad H' = H$$

каноническим?

1) да, является
2) нет, не является
3) является, только при условии $p = \mathrm{const}$
4) является, только при условии $q = \mathrm{const}$

11.64.* Является ли преобразование:

$$Q = \sqrt{q} cos2p, \qquad P = \sqrt{q} sin2p, \qquad H' = H$$

каноническим?

1) да, является
2) нет, не является
3) является, только при условии $p = \mathrm{const}$
4) является, только при условии $q = \mathrm{const}$

11.65.* Является ли преобразование:

$$Q = \sqrt{2q} cosp, \qquad P = 2q\ sinp, \qquad H' = H$$

каноническим?
1) да, является
2) нет, не является
3) является, только при условии $p = \text{const}$
4) является, только при условии $q = \text{const}$

11.66.* Является ли преобразование:
$$Q = \sqrt{q} cos2p, \qquad P = qsin2p, \qquad H' = H$$
каноническим?
1) да, является
2) нет, не является
3) является, только при условии $p = \text{const}$
4) является, только при условии $q = \text{const}$

11.67.* Является ли преобразование:
$$Q = aq, \qquad P = bp, \quad H' = H \;\; (a, b = \text{const})$$
каноническим?
1) да, является
2) нет, не является
3) является, только при условии $ab = 1$
4) является, только при условии $ab = -1$

11.68.* Является ли преобразование:
$$Q = ap, \qquad P = bq, \quad H' = H \;\; (a, b = \text{const})$$
каноническим?
1) да, является
2) нет, не является
3) является, только при условии $ab = 1$
4) является, только при условии $ab = -1$

11.69.* Является ли преобразование:
$$Q = aq + bp, \qquad P = cq + dp, \quad H' = H \;\; (a, b, c, d = \text{const})$$
каноническим?
1) да, является
2) нет, не является
3) является, только при условии $ad - bc = 1$
4) является, только при условии $ab - cd = 1$

11.70.* Каноническое преобразование:

$$Q = q, \;\; P = p, \qquad H' = H$$

может быть задано производящей функцией:

1) $\Phi = qP$
2) $\Phi = qP^2$
3) $F = qQ$
4) $F = qQ^2$

11.71.* Каноническое преобразование:

$$Q = -p, \;\; P = q, \qquad H' = H$$

может быть задано производящей функцией:

1) $\Phi = qP$
2) $\Phi = qP^2$
3) $F = -qQ$
4) $F = qQ^2$

11.72.* Каноническое преобразование:

$$Q = \sqrt{2}q + p, \;\; P = q + \sqrt{2}p, \qquad H' = H$$

может быть задано производящей функцией:

1) $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}qP - \frac{q^2}{2\sqrt{2}} + \frac{P^2}{2\sqrt{2}}$
2) $\Phi = qP + \frac{q^2}{2\sqrt{2}} - P^2$
3) $F = qQ - \frac{1}{\sqrt{2}}(q^2 + Q^2)$
4) $F = qQ + \frac{1}{\sqrt{2}}q^2Q^2$

11.73.* Каноническое преобразование:

$$Q = \sqrt{2}q + p, \;\; P = q + \sqrt{2}p, \qquad H' = H$$

может быть задано производящей функцией:

1) $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}qP$
2) $\Phi = qP - P^2$
3) $F = qQ - \frac{1}{\sqrt{2}}(q^2 + Q^2)$
4) $F = qQ + \frac{1}{\sqrt{2}}q^2Q^2$

11.74.* Каноническое преобразование:

$$Q = pe^q, \;\; P = q + e^{-q} + lnp, \qquad H' = H$$

может быть задано производящей функцией:

1) $F = Q + Qe^{-q} + QlnQ$
2) $F = Q - Qe^{-q}$
3) $F = Q - Qe^{-q} - QlnQ$
4) $F = Qe^{-q} + QlnQ$

11.75.* Каноническое преобразование:

$$Q = \frac{p}{q}, \;\; P = q^{-4}p^4 - \frac{1}{2}q^2, \qquad H' = H$$

может быть задано производящей функцией:

1) $\Phi = \frac{4}{5}\left(\frac{q^2}{2} + P\right)^{5/4}$
2) $\Phi = \frac{4}{5}\left(\frac{q^2}{2} - 2P\right)^{5/4}$
3) $\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{2} + P\right)^{2}$
4) $\Phi = \frac{1}{3}\left(\frac{q^2}{2} + P\right)^{3}$

11.76.* Каноническое преобразование:

$$Q = \frac{p}{q}, \;\; P = q^{-4}p^4 - \frac{1}{2}q^2, \qquad H' = H$$

может быть задано производящей функцией:

1) $F = \frac{q^2Q}{2} - \frac{Q^3}{3}$
2) $F = \frac{q^2Q}{2} - \frac{Q^5}{5}$
3) $F = \frac{q^2Q}{2} + 5Q^5$
4) $F = \frac{q^2}{2} - \frac{Q^5}{5}$

11.77.* Каноническое преобразование:

$$Q = pe^q, \;\; P = q + e^{-q} + lnp, \qquad H' = H$$

может быть задано производящей функцией:

1) $\Phi = P - \exp(-q)$
2) $\Phi = exp(P + lnq)$
3) $\Phi = exp(P + q)$
4) $\Phi = exp(P - \exp(-q))$

11.78.* Производящая функция $\Phi(q, P, t)$, порождающая преобразование к постоянным обобщенным импульсам и обобщенным координатам, удовлетворяет уравнению:

1) $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$
2) $\Phi = 0$
3) $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + H = 0$
4) $\Phi + H = 0$

11.79.** Частица с массой m и зарядом e движется в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленном вдоль оси z прямоугольной декартовой системы координат. Скобка Пуассона $\{\dot{x}, \dot{y}\}$ равна:

1) $-\frac{e\mathcal{H}}{m^2c}$
2) 0
3) $\dot{z}$
4) $-\dot{z}$

11.80.** Частица с массой m и зарядом e движется в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленном вдоль оси z прямоугольной декартовой системы координат. Скобка Пуассона $\{\dot{x}, \dot{z}\}$ равна:

1) $-\frac{e\mathcal{H}}{m^2c}$
2) 0
3) $\dot{z}$
4) $-\dot{z}$

11.81.** Частица с массой m и зарядом e движется в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, направленном вдоль оси z прямоугольной декартовой системы координат. Скобка Пуассона $\{\dot{y}, \dot{z}\}$ равна:

1) $-\frac{e\mathcal{H}}{m^2c}$
2) 0
3) $\dot{z}$
4) $-\dot{z}$

§ 12. Уравнение Гамильтона-Якоби

В данном параграфе, если иное не оговорено, S – действие системы.

12.1.Функция обобщенных координат и времени, определяемая как:

$$S(q_1, q_2, \dots, q_s, t) = \int_{t_0}^{t} L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)\, dt,$$

где $L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$ – функция Лагранжа системы называется:

1) перемещением системы
2) действием системы
3) функцией Пуассона
4) функцией Гамильтона-Якоби

12.2.Уравнение $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0$, где H – функция Гамильтона, называется:

1) уравнением Гамильтона-Якоби
2) действием системы
3) уравнением Гамильтона
4) уравнением Лагранжа

12.3.Метод Гамильтона-Якоби используется для нахождения:

1) функции Гамильтона
2) углов Эйлера
3) закона движения и траектории системы
4) функции Лагранжа

12.4.* Действие свободной частицы массы m, проходящей через точки $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}(t_1)$ и $\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}(t_2)$, есть:

1) $S = \frac{m}{2} \frac{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2}{t_2 - t_1}$
2) $S = \frac{m}{2} \frac{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}{t_2 - t_1}$
3) $S = \frac{m}{2} \frac{(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_1)^2}{t_2 - t_1}$
4) $S = \frac{m}{2} (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)(t_2 - t_1)^2$

12.5.* Действие одномерного гармонического осциллятора (массы m и частоты ω), проходящего через точки $x_1 = x(t_1)$ и $x_2 = x(t_2)$, есть:

1) $S = m\omega\{(x_1^2 + x_2^2) cos\omega(t_2 - t_1) - 2x_1 x_2\}$
2) $S = \frac{m\omega}{(t_2 - t_1)}\{(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1 x_2\}$

3) $S = \{(x_1^2 + x_2^2)cos\omega(t_2 - t_1) - 2x_1x_2\}$

4) $S = \frac{m\omega}{2sin\omega(t_2-t_1)}\{(x_1^2 + x_2^2)cos\omega(t_2 - t_1) - 2x_1x_2\}$

12.6.* Действие твердого тела, вращающегося вокруг одной из главных осей инерции, есть (J, φ – момент инерции и угол поворота относительно главной оси инерции соответственно):

1) $S = \frac{J}{2}\frac{\varphi-\varphi}{t-t_0}$

2) $S = \frac{J}{2}\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{t-t_0}$

3) $S = \frac{J}{2}\frac{\varphi-\varphi}{(t-t_0)^2}$

4) $S = \frac{J}{2}\frac{t-t_0}{(\varphi-\varphi_0)^2}$

J – момент инерции твердого тела, $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $\varphi(t) = \varphi$.

12.7.** Действие для частицы массы m и заряда q, движущейся в однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$, есть:

1) $S = \frac{m}{2}\left\{\frac{(z_2-z_1)^2}{t_2-t_1} + \frac{\omega}{2}ctg\frac{\omega(t_2-t_1)}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] + \omega(x_1y_2 - y_1x_2)\right\}$

2) $S = \frac{m}{2}\left\{\frac{(z_2-z_1)^2}{t_2-t_1} + \frac{\omega}{2}ctg\frac{\omega(t_2-t_1)}{2} + \omega(x_1y_2 - y_1x_2)\right\}$

3) $S = \frac{m}{2}\left\{\frac{(z_2-z_1)^2}{t_2-t_1} + \omega(x_1y_2 - y_1x_2)\right\}$

4) $S = \frac{m\omega}{2}ctg\frac{\omega(t_2-t_1)}{2}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]$,

где $\omega = \frac{q\mathcal{H}}{mc}$; $x_1 = x(t_1)$, $y_1 = y(t_1)$, $z_1 = z(t_1)$; $x_2 = x(t_2)$, $y_2 = y(t_2)$, $z_2 = z(t_2)$.

12.8. Уравнение Гамильтона-Якоби для материальной точки массы m, находящейся в потенциальном поле U, в декартовой системе координат имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\left\{\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial z}\right\}}{2m} - U(x, y, z) = 0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}}{2m} + U(x, y, z) = 0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}}{2m} + U(x, y, z) = 0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+U^2(x,y,z)\right\}}{2m}=0$

12.9.Уравнение Гамильтона-Якоби для материальной точки массы m, находящейся в потенциальном поле U, в цилиндрической системе координат имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}}{2m}+U(\rho,\varphi,z)=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}-\frac{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}}{2m}+U(\rho,\varphi,z)=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+U^2(\rho,\varphi,z)\right\}}{2m}=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2+2\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}}{2m}+U^2(\rho,\varphi,z)=0$

12.10.Уравнение Гамильтона-Якоби для материальной точки массы m, находящейся в потенциальном поле U, в сферической системе координат имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}}{2m}+U(r,\theta,\varphi)=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}}{2m}+U(r,\theta,\varphi)=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+U^2(r,\theta,\varphi)\right\}}{2m}=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left\{\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right)^2\right\}}{2m}=0$

12.11.Уравнение Гамильтона-Якоби для свободной частицы массы m, движущейся вдоль прямой x, имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2}{2m}+S(x)=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{2m}+U=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{2m}=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2\right\}}{2m}=0$

12.12. Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы массы m, движущейся в поле тяжести по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом имеет вид (ось x направлена вдоль наклонной плоскости):

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{2m}+mgx=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}-\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{2m}+mgx\sin\alpha=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{2m}-mgx\sin\alpha=0$

4) $\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)}{2m}+mgx\sin\alpha=0$

12.13. Уравнение Гамильтона-Якоби для математического маятника (длина l, масса m) имеет вид (см. рис. 2.1):

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2}{2ml^2}+mgl\cos\varphi=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2}{2ml^2}+mgl\sin\varphi=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2}{2m}+mgl\cos\varphi=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2}{2m}+mgl=0$,

где S – действие

12.14. Уравнение Гамильтона-Якоби для материальной точки массы m, на которую действует сила $F=-kx$ ($k=\text{const}$), имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\frac{kx^2}{2}=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{2m}-kx=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{2m}+\frac{kmx^2}{2}=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{2m}+\frac{kx^2}{2}=0$

12.15. Уравнение Гамильтона-Якоби для материальной точки массы m в поле тяжести имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2}{2m}+mgz=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2}{2m}=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+mgz=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+mgz=0$

12.16.Функция Лагранжа частицы массы m есть:

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U(r)$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}+U(r)=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}-U(r)=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}+U(r)=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}=0$

12.17.Функция Лагранжа механической системы есть:

$$L=\frac{m_1\dot{x}^2}{2}-(m_2-m_1)gx,$$

где $m_1, m_2=const.$

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+(m_2-m_1)gx=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m_1}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+m_1gx=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2(m_2-m_1)}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+(m_2-m_1)gx=0$

12.18.Функция Лагранжа частицы массы m есть ($R=\mathrm{const}$):

$$L=\frac{m}{2}(R^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-mgz$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial R}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+mgz=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+mgz=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+mgz=0$

12.19.* Функция Лагранжа частицы массы m, заряда q в электрическом поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ есть:

$$L=\frac{m}{2}\dot{\boldsymbol{r}}^2+q\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы имеет вид:

1) $\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^2-q\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-q\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+q\boldsymbol{\mathcal{E}}\boldsymbol{r}=0$

12.20.Функция Лагранжа для частицы массы m есть:

$$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-\frac{k}{2}\left(\sqrt{h^2-x^2}-l_0\right)^2,$$

где $k,h,l_0=\text{const}$.

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\frac{k}{2}\left(\sqrt{h^2-x^2}-l_0\right)^2=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2-\left(\sqrt{h^2-x^2}-l_0\right)^2=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{k}{2}\left(\sqrt{h^2-x^2}-l_0\right)^2=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2=0$

12.21.* Функция Лагранжа для частиц с массами m_1 и m_2 есть:

$$L=\frac{a^2\dot{\varphi}^2(m_1\cos^2\varphi+m_2\sin^2\varphi)}{2}-\frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1\sin\varphi+m_2\cos\varphi),$$

где $a,k,h,l_0=\text{const}$.

Уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2a^2(m_1\cos^2\varphi+m_2\sin^2\varphi)}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2-\frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1\sin\varphi+m_2\cos\varphi)=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2a^2(m_1\cos^2\varphi+m_2\sin^2\varphi)}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2-\frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1\cos\varphi+m_2\sin\varphi)=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2a^2(m_1\cos^2\varphi+m_2\sin^2\varphi)}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1\cos\varphi+m_2\sin\varphi)=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2a^2(m_1\cos^2\varphi+m_2\sin^2\varphi)}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{ga}{\sqrt{2}}(m_1\sin\varphi+m_2\cos\varphi)=0$

12.22.Функция Лагранжа частицы массы m есть:

$$L=\frac{m}{2}(\dot{s}^2+\dot{y}^2)-mgs\sin\alpha\,,$$

где s, y – обобщенные координаты, $\alpha=\text{const}$.

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right\}-mgs\sin\alpha=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right\}+mgs\sin\alpha=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial s\partial y}\right)^2+mgs\sin\alpha=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right\}=0$

12.23.Функция Лагранжа частицы системы есть:

$$L=\frac{1}{2}(I+A)\dot{\varphi}^2-\frac{k\varphi^2}{2}\,,$$

где $I, A, k=\text{const}$.

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2+k\varphi=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2(I+A)}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2(I+A)}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2-\frac{k\varphi^2}{2}=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2(I+A)}\left(\frac{\partial S}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{k\varphi^2}{2}=0$

12.24.* Функция Лагранжа частицы массы m есть:

$$L=\frac{ma^2}{2}\left(\dot{\theta}^2+\omega^2\sin^2\theta\right)-mga\cos\theta\,,$$

где $a, \omega=\text{const}$.

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2ma^2}\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2+\frac{ma^2}{2}\omega^2\sin^2\theta-mga\cos\theta=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2ma^2}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2+\omega^2\sin^2\theta\right)-mga\cos\theta=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2ma^2}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)^2-\omega^2\sin^2\theta\right)+mga\cos\theta=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2ma^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2-\frac{ma^2}{2}\omega^2\sin^2\theta+mga\cos\theta=0$

12.25.* Функция Лагранжа частицы массы m есть:

$$L=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2)-mgr\cos\alpha\,,$$

где $\alpha=\text{const}$.

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}+mgr\cos\alpha=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}-mgr\cos\alpha=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}+mgr\cos\alpha=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}=0$

12.26.* Функция Лагранжа частицы массы m есть:

$$L=\frac{ma^2}{2}\left(\dot{\theta}^2+2\omega^2 cos\theta\right),$$

где $a,\omega=\text{const}$.

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2ma^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2-ma^2\omega^2 cos\theta=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2ma^2}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+2\omega^2 cos\theta\right)=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2ma^2}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2-2\omega^2 cos\theta\right)+mgacos\theta=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2ma^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+ma^2\omega^2 cos\theta=0$

12.27.* Функция Лагранжа для частицы массы m и заряда q в поле электрического диполя есть:

$$L=\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2sin^2\theta\dot{\varphi}^2\right)-qp\frac{cos\theta}{r^2},\ p=\text{const}.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}+qp\frac{cos\theta}{r^2}=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}+qp\frac{cos\theta}{r^2}=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}+qpr=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}=0$

12.28.* Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы массы m и заряда q, движущейся в постоянном однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ в декартовых координатах (вектор-потенциал магнитного поля $A_x=\mathcal{H}y$) имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{q\mathcal{H}}{c}y\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+q\mathcal{H}y=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{q\mathcal{H}}{c}y\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}-\frac{q\mathcal{H}}{c}y\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}-\frac{q\mathcal{H}}{c}y\right)^2\right\}=0$

12.29.* Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы массы m и заряда q, движущейся в постоянном однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ в цилиндрических координатах (вектор-потенциал магнитного поля $A_\varphi=\frac{1}{2}\mathcal{H}\rho$) имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+\frac{qH}{2c}\rho=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}-\frac{qH}{2c}\rho\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}-\frac{qH}{2c}\rho\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}-\frac{qH}{2c}\rho\right)^2\right\}=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial S}{\partial \varphi}-\frac{qH}{2c}\rho\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}=0$

12.30.* Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы массы m и заряда q, движущейся во взаимно перпендикулярных постоянных и однородных электрическом и магнитном полях с напряженностями $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ соответственно (векторный потенциал магнитного поля $A_x=\mathcal{H}y$, потенциал электрического поля $\phi=-\mathcal{E}y$) имеет вид:

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{q\mathcal{H}y}{c}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{q\mathcal{H}y}{c}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}-q\mathcal{E}y=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{q\mathcal{H}y}{c}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}-q\mathcal{E}y\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+\frac{q\mathcal{H}y}{c}+q\mathcal{E}y=0$

12.31.* Уравнение Гамильтона-Якоби для частицы массы m и заряда q, движущейся в поле волны с векторным потенциалом $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}cos\omega t$ имеет вид ($\boldsymbol{a}=\text{const}$):

1) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{q\boldsymbol{a}cos\omega t}{c}\right)^2=0$

2) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^2=0$

3) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{r}}\right)^2+\frac{q\boldsymbol{a}cos\omega t}{c}=0$

4) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{q\boldsymbol{a}\omega}{c}\right)^2=0$

12.32.* Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для свободной частицы массы m, движущейся вдоль прямой x, равен:

1) $S=-C_1t\pm x,\ C_1=const$

2) $S=-C_1t\pm xt,\ C_1=const$

3) $S=-C_1t\pm\sqrt{2mC_1}x,\ C_1=const$

4) $S=-C_1t\pm\sqrt{C_1}x,\ C_1=const$

12.33.* Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для тела массы m, движущегося по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, равен (ось x направлена вдоль наклонной плоскости):

1) $S=-C_1t\pm\frac{\sqrt{8}}{3gsin\alpha\sqrt{m}}(C_1+mgxsin\alpha)^{\frac{3}{2}},C_1=const$

2) $S=\frac{\sqrt{8}}{3gsin\alpha\sqrt{m}}(C_1+mgxsin\alpha)^{\frac{3}{2}},C_1=const$

3) $S=C_1t\pm\frac{\sqrt{8}}{3gsin\alpha\sqrt{m}}(C_1+mgxsin\alpha)^{\frac{1}{2}},C_1=const$

4) $S=C_1t\pm\frac{\sqrt{8}}{3gsin\alpha\sqrt{m}}(mgxsin\alpha)^{\frac{3}{2}},C_1=const$

12.34.** Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби математического маятника (длина l, масса m) равен (φ – угол отклонения маятника от вертикали):

1) $S=C_1t\pm 2ml^2(C_1+mglcos\varphi)^{\frac{1}{2}},\ C_1=const$

2) $S = -C_1 t \pm \int \sqrt{2ml^2(C_1 + mglcos\varphi)}d\varphi$, $C_1 = const$

3) $S = C_1 t \pm 2ml^2(C_1 + mglcos\varphi)^{\frac{3}{2}}$, $C_1 = const$

4) $S = C_1 t \pm \int \sqrt{2mg(C_1 + mgl^2cos\varphi)}d\varphi$, $C_1 = const$

12.35.** Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для материальной точки массы m, на которую действует сила $F = -kx$, равен:

1) $S = \int \sqrt{(2mC_1 - mkx^2)}dx$, $C_1 = const$

2) $S = -C_1 t \pm (2mC_1 - mkx^2)$, $C_1 = const$

3) $S = C_1 t \pm \int \sqrt{2mx^2(C_1 + mgk)}dx$, $C_1 = const$

4) $S = -C_1 t \pm \int \sqrt{(2mC_1 - mkx^2)}dx$, $C_1 = const$

12.36.** Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для материальной точки массы m в поле тяжести равен:

1) $S = -C_1 t + C_2 x + C_3 y \mp \frac{1}{3m^2 g}(2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz)^{\frac{3}{2}}$,
$C_1, C_2, C_3 = const$

2) $S = -C_1 t \mp \frac{1}{3m^2 g}(2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz)^{\frac{3}{2}}$, $C_1, C_2, C_3 = const$

3) $S = -C_1 t + C_2 x + C_3 y \mp \frac{1}{3m^2 g}(2mC_1 - 2m^2 gz)^{\frac{3}{2}}$, $C_1, C_2, C_3 = const$

4) $S = -C_1 x + C_2 y + C_3 z \mp \frac{1}{3m^2 g}(2mC_1 - C_2^2 - C_3^2 - 2m^2 gz)^{\frac{3}{2}}$,
$C_1, C_2, C_3 = const$

12.37.** Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для частицы массы m и заряда q, движущейся в постоянном однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ в декартовых координатах (векторный потенциал магнитного поля $A_x = \mathcal{H}y$), равен:

1) $S = -C_1 t + C_2 x + C_3 y \pm \int \sqrt{2mC_1 - C_2^2 - \left(C_3 - \frac{q}{c}\mathcal{H}y\right)}dy$,
$C_1, C_2, C_3 = \mathrm{const}$

2) $S = -C_1 t + C_2 x + C_3 z \pm \int \sqrt{2mC_1 - C_3^2 - \left(C_1 - \frac{q}{c}\mathcal{H}y\right)^2}dy$,
$C_1, C_2, C_3 = \mathrm{const}$

3) $S = -C_1 t + C_2 x + C_3 z \pm \int \sqrt{2mC_1 - C_2^2 - C_3^2}dy$, $C_1, C_2, C_3 = \mathrm{const}$

4) $S = -C_1 t + C_2 x + C_3 z \pm \int \sqrt{2mC_1 - \left(C_2 - \frac{q}{c}\mathcal{H}y\right)}dy$, $C_1, C_2, C_3 =$
const

12.38.** Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для частицы массы m и заряда q, движущейся в постоянном однородном магнитном поле напряженности $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ в цилиндрических координатах (векторный потенциал магнитного поля $A_\varphi = \frac{1}{2}\mathcal{H}\rho$), равен:

1) $S = -C_1 t + C_2\varphi + C_3 z \pm \int \sqrt{2mC_1 - C_3^2 - \left(\frac{C_2}{\rho} - \frac{q}{2c}\mathcal{H}\varphi\right)}\,d\varphi$,
   $C_1, C_2, C_3 = \text{const}$
2) $S = -C_1 t + C_2 z + C_3\rho \pm \int \sqrt{2mC_1 - C_2^2 - \left(\frac{C_3}{\rho} - \frac{q}{2c}\mathcal{H}\rho\right)}\,d\rho$,
   $C_1, C_2, C_3 = \text{const}$
3) $S = -C_1 t + C_2\varphi + C_3 z \pm \int \sqrt{2mC_1 - C_3^2 - \left(\frac{C_2}{\rho} - \frac{q}{2c}\mathcal{H}\rho\right)}\,d\rho$,
   $C_1, C_2, C_3 = \text{const}$
4) $S = -C_1 t + C_2\varphi + C_3 z \pm \int \sqrt{2mC_1 - C_3^2 - \left(\frac{C_2}{\rho} - \frac{q}{2c}\mathcal{H}\rho\right)^2}\,d\rho$,
   $C_1, C_2, C_3 = \text{const}$

12.39.** Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для частицы массы m и заряда q, движущейся во взаимно перпендикулярных постоянных и однородных электрическом и магнитном полях с напряженностями $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ соответственно (векторный потенциал магнитного поля $A_x = \mathcal{H}y$, потенциал электрического поля $\phi = -\mathcal{E}y$) равен ($C_1, C_2, C_3 = \text{const}$):

1) $S = -C_1 t + C_2 x + C_3 z \pm \int \sqrt{2mC_1 - C_2^2 - \left(C_3 - \frac{q}{c}\mathcal{H}z\right)^2}\,dz$
2) $S = -C_1 t + C_2 x + C_3 z \pm \int \sqrt{2m(C_1 + q\mathcal{E}y) - C_3^2 - \left(C_2 - \frac{q}{c}\mathcal{H}y\right)^2}\,dy$
3) $S = -C_1 t + C_2 x + C_3 z \pm \int \sqrt{2m\left(C_1 - \frac{q}{c}\mathcal{H}y\right) - C_3^2 - (C_2 - q\mathcal{E}y)^2}\,dy$
4) $S = -C_1 t \pm \int \sqrt{2mC_1 - C_3^2 - \left(C_2 - q\mathcal{E}y - \frac{q}{c}\mathcal{H}y\right)^2}\,dy$

12.40.** Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для частицы массы m и заряда q, движущейся в поле электрического диполя с дипольным моментом d, равен ($C_1, C_2, C_3 = \text{const}$):

1) $S = -C_1 t + C_2\theta \pm \int \sqrt{C_3 - 2mqd\cos\theta - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta$

2) $S = -C_1 t + C_2 r \pm \int \sqrt{-2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}}\,dr$

3) $S = -C_1 t + C_2 \varphi \pm \int \sqrt{C_3 - 2mqd\cos\theta - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta \pm \int \sqrt{2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}}\,dr$

4) $S = \pm \int \sqrt{C_3 - 2mqd\cos\theta - \frac{C_2^2}{\sin^2\theta}}\,d\theta \pm \int \sqrt{-2mC_1 - \frac{C_3}{r^2}}\,dr$

12.41.** Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби для частицы массы m и заряда q, движущейся в поле волны с векторным потенциалом $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}\cos\omega t$, равен ($\boldsymbol{r}$ – радиус-вектор частицы):

1) $S = \frac{1}{2m}\int \left(\boldsymbol{r} - \frac{q}{c}\boldsymbol{a}\cos\omega t\right)^2 dt,\ \boldsymbol{C} = \text{const}$

2) $S = t - \frac{1}{2m}\int \left(\boldsymbol{C} - \frac{q}{c}\boldsymbol{a}\cos\omega t\right)^2 dt,\ \boldsymbol{C} = \text{const}$

3) $S = \frac{1}{2m}\int \left(\boldsymbol{C} - \frac{q}{c}\boldsymbol{a}\cos\omega t\right)^2 dt,\ \boldsymbol{C} = \text{const}$

4) $S = \boldsymbol{C}\boldsymbol{r} - \frac{1}{2m}\int \left(\boldsymbol{C} - \frac{q}{c}\boldsymbol{a}\cos\omega t\right)^2 dt,\ \boldsymbol{C} = \text{const}$

12.42. Если переменная q_α в уравнении Гамильтона-Якоби отделяется, то данное уравнение можно схематично записать в виде:

1) $F\left(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha-1}}, \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha+1}}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, \frac{\partial S}{\partial t}, f(q_\alpha)\right) = 0$

2) $F\left(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha-1}}, \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha+1}}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, \frac{\partial S}{\partial t}, f\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right)\right) = 0$

3) $F\left(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha-1}}, \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha+1}}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, \frac{\partial S}{\partial t}, f\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right)\right) = 0$

4) $F\left(q_1, \dots, q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, \frac{\partial S}{\partial t}\right) = 0,$

где $f(q_\alpha), f\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right), f\left(q_\alpha, \frac{\partial S}{\partial q_\alpha}\right)$ – некоторые комбинации, не содержащие явно других переменных кроме q_α.

12.43. Если переменная q_α в уравнении Гамильтона-Якоби отделяется, то его решение ищут в виде:

1) $S = S_\alpha(q_1, \dots, q_\alpha) + S'(q_{\alpha+1}, \dots, q_s, t)$

2) $S = S_\alpha(q_\alpha) + S'(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s, t)$

3) $S = S_\alpha(t) + S'(q_1, \dots, q_s)$

4) $S = S_\alpha(q_\alpha, t) + S'(q_1, \dots, q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots, q_s)$

12.44. Сформулировать общий алгоритм решения основной задачи механики методом Гамильтона-Якоби:

1) (а) по функции Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ системы построить ее функцию Гамильтона $H(q, p, t)$;

   (б) с помощью найденной функции $H(q, p, t)$ записать уравнение Гамильтона-Якоби $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$;

   (в) найти решение уравнения Гамильтона-Якоби $S(q, C, t) + A$, содержащее независимые произвольные постоянные C_α (наряду с аддитивной постоянной A) в количестве, равном числу степеней свободы системы;

   (г) определить закон движения системы, продифференцировав найденную функцию $S(q, C, t)$ по произвольным постоянным C_α и приравняв результаты дифференцирования новым произвольным постоянным Q_α:

$$\frac{\partial S(q, C, t)}{\partial C_\alpha} = Q_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, s.$$

2) (а) по функции Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$ системы построить ее функцию Гамильтона $H(q, p, t)$;

   (б) с помощью найденной функции $H(q, p, t)$ записать уравнение Гамильтона-Якоби $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$;

   (в) найти решение уравнения Гамильтона-Якоби $S(q, C, t) + A$, содержащее независимые произвольные постоянные C_α (наряду с аддитивной постоянной A) в количестве, равном числу степеней свободы системы;

   (г) определить закон движения системы, продифференцировав найденную функцию $S(q, C, t)$ по независимым переменным q_α и приравняв результаты дифференцирования новым произвольным постоянным Q_α:

$$\frac{\partial S(q, C, t)}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \alpha = 1,2, \dots, s.$$

3) (а) по функции Гамильтона $H(q, p, t)$ системы построить ее функцию Лагранжа $L(q, \dot{q}, t)$;

   (б) с помощью найденной функции $L(q, \dot{q}, t)$ записать уравнение Гамильтона-Якоби $\frac{\partial S}{\partial t} + L\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0$;

(в) найти решение уравнения Гамильтона-Якоби: $S(q,t)+A$, содержащее аддитивную постоянную A;

(г) определить закон движения системы, продифференцировав найденную функцию $S(q,t)$ по независимым переменным q_α и приравняв результаты дифференцирования новым произвольным постоянным Q_α:

$$\frac{\partial S(q,C,t)}{\partial q_\alpha}=Q_\alpha, \alpha=1,2,\dots,s.$$

4) (а) записать уравнение Гамильтона-Якоби $\frac{\partial S}{\partial t}+S\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)=0$;

(б) найти решение уравнения Гамильтона-Якоби: $S(q,C,t)$, где C_α – произвольные постоянные;

(в) определить закон движения системы, продифференцировав найденную функцию $S(q,C,t)$ по времени и приравняв результат дифференцирования новой произвольной постоянной Q:

$$\frac{\partial S(q,C,t)}{\partial t}=Q_\alpha, \alpha=1,2,\dots,s.$$

12.45.* Сформулировать алгоритм решения задачи на движение свободной частицы массы m вдоль прямой x методом Гамильтона-Якоби:

1) (а) $H=\frac{p_x^2}{2m}+U$, $U=const$; (б) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+U=0$; (в) $S=-C_1t+\sqrt{2m(C_1-U)}x,\ C_1=\mathrm{const}$;

(г) $x=Q_1\sqrt{\frac{2(C_1-U)}{m}}+\sqrt{\frac{2(C_1-U)}{m}}t, \qquad Q_1=\mathrm{const}$

2) а) $H=\frac{p_x^2}{2m}$; (б) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{p_x^2}{2m}=0$; (в) $S=\sqrt{2mC_1}x,\ \ C_1=\mathrm{const}$; (г) $Q_1=C_1t, Q_1=\mathrm{const}$

3) а) $H=\frac{p_x^2}{2m}$; (б) $\frac{\partial S}{\partial t}+\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2=0$; (в) $S=t+\sqrt{2C_1}x,\ C_1=\mathrm{const}$; (г) $Q_1=-t+\frac{x}{2\,C_1}, Q_1=\mathrm{const}$

4) а) $H=\frac{p_x^2}{2m}$; (б) $\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2=0$; (в) $S=-C_1t\pm\sqrt{2mC_1}x,\ C_1=\mathrm{const}$; (г) $x=\pm\sqrt{\frac{2C_1}{m}}(t+Q_1),\ Q_1=\mathrm{const}$

12.46.* Сформулировать алгоритм решения задачи для частицы массы m, движущейся в поле тяжести по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, методом Гамильтона-Якоби (ось x направлена вдоль плоскости):

1) (а) $H = \frac{p_x^2}{2m} - mgx\sin\alpha$;

(б) $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{2m} - mgx\sin\alpha = 0$;

(в) $S = -C_1 t \pm \frac{\sqrt{8}}{3gsin\alpha\sqrt{m}}(C_1 + mgxsin\alpha)^{\frac{3}{2}}, C_1 = \text{const}$;

(г) $t - t_0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{gsin\alpha\sqrt{m}}(C_1 + mgxsin\alpha)^{\frac{1}{2}}, t_0 = \text{const}$

2) (а) $H = \frac{p_x^2}{2m}$;

(б) $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{2m} = 0$;

(в) $S = \sqrt{2mC_1}x,\ C_1 = \text{const}$;

(г) $t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2C_1}}x,\ C_1 = \text{const}, t_0 = \text{const}$

3) (а) $H = \frac{p_x^2}{2m} - mgx\sin\alpha$;

(б) $\frac{\partial S}{\partial t} - mgx\sin\alpha = 0$;

(в) $S = -C_1 t \pm (C_1 + mgxsin\alpha)^{\frac{1}{2}}, C_1 = \text{const}$;

(г) $t - t_0 = \pm\frac{1}{2}(C_1 + mgxsin\alpha)^{-\frac{1}{2}}, t_0 = \text{const}$

4) (а) $H = \frac{p_x^2}{2m} + mgx\sin\alpha$;

(б) $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{2m} + mgx\sin\alpha = 0$;

(в) $S = -C_1 t \pm \frac{2}{3mgsin\alpha}(C_1 - mgxsin\alpha)^{\frac{1}{2}}, C_1 = \text{const}$;

(г) $t - t_0 = \pm\frac{2}{3mgsin\alpha}(C_1 - mgxsin\alpha)^{\frac{1}{2}}, t_0 = \text{const}$

12.47.* Сформулировать алгоритм решения задачи для математического маятника (длина l, масса m, φ – угол отклонения маятника от вертикали, рис. 2.1) методом Гамильтона-Якоби:

1) (а) $H = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl\cos\varphi$;

(б) $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2}{2ml^2} + mgl\cos\varphi = 0$;

(в) $S = -C_1 t \pm \int\sqrt{2ml^2(C_1 + mglcos\varphi)}d\varphi,\ C_1 = \text{const}$;

(г) $t - t_0 = \pm\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{2ml^2}{(C_1 + mglcos\varphi)}}d\varphi, t_0 = \text{const}$

2) (а) $H = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl\cos\varphi$;

(б) $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2}{2ml^2} = 0;$

(в) $S = -C_1 t \pm \int \sqrt{(C_1 + mglcos\varphi)} d\varphi$, $C_1 = \mathrm{const}$;

(г) $t - t_0 = \pm \frac{1}{2} \int \sqrt{\sqrt{(C_1 + mglcos\varphi)}} d\varphi$, $t_0 = \mathrm{const}$

3) $H = \frac{p^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi;$

(б) $\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi = 0;$

(в) $S = \int \sqrt{2ml^2(C_1 - mglcos\varphi)} d\varphi$, $C_1 = \mathrm{const}$;

(г) $t - t_0 = \pm \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{C_1}{(C_1 + mglcos\varphi)}} d\varphi$, $t_0 = \mathrm{const}$

4) а) $H = mgl\cos\varphi$;

(б) $\frac{\partial S}{\partial t} + mgl\cos\varphi = 0;$

(в) $S = -C_1 t \pm \int \sqrt{2mC_1 glcos\varphi} d\varphi$, $C_1 = \mathrm{const}$;

(г) $t - t_0 = \pm\sqrt{2mC_1 glcos\varphi}$, $t_0 = \mathrm{const}$

ОТВЕТЫ

1.1.	1)	2.1.	2)	3.1.	3)	4.1.	3)	5.1.	3)	6.1.	4)	7.1.	2)
1.2.	3)	2.2.	3)	3.2.	3)	4.2.	3)	5.2.	4)	6.2.	2)	7.2.	1)
1.3.	3)	2.3.	4)	3.3.	1)	4.3.	3)	5.3.	1)	6.3.	3)	7.3.	1)
1.4.	4)	2.4.	4)	3.4.	4)	4.4.	1)	5.4.	4)	6.4.	1)	7.4.	4)
1.5.	4)	2.5.	3)	3.5.	2)	4.5.	2)	5.5.	2)	6.5.	1)	7.5.	2)
1.6.	2)	2.6.	4)	3.6.	1)	4.6.	3)	5.6.	4)	6.6.	3)	7.6.	3)
1.7.	2)	2.7.	1)	3.7.	2)	4.7.	1)	5.7.	1)	6.7.	3)	7.7.	1)
1.8.	3)	2.8.	1)	3.8.	3)	4.8.	4)	5.8.	4)	6.8.	2)	7.8.	2)
1.9.	1)	2.9.	1)	3.9.	2)	4.9.	1)	5.9.	3)	6.9.	1)	7.9.	3)
1.10.	2)	2.10.	2)	3.10.	1)	4.10.	3)	5.10.	1)	6.10.	4)	7.10.	4)
1.11.	3)	2.11.	2)	3.11.	2)	4.11.	1)	5.11.	2)	6.11.	4)	7.11.	2)
1.12.	1)	2.12.	2)	3.12.	2)	4.12.	2)	5.12.	3)	6.12.	1)	7.12.	1)
1.13.	3)	2.13.	4)	3.13.	2)	4.13.	1)	5.13.	1)	6.13.	2)	7.13.	4)
1.14.	3)	2.14.	3)	3.14.	3)	4.14.	3)	5.14.	4)	6.14.	3)	7.14.	2)
1.15.	3)	2.15.	1)	3.15.	3)	4.15.	3)	5.15.	3)	6.15.	2)	7.15.	2)
1.16.	4)	2.16.	1)	3.16.	1)	4.16.	2)	5.16.	3)	6.16.	4)	7.16.	2)
1.17.	1)	2.17.	3)	3.17.	4)	4.17.	4)	5.17.	1)	6.17.	4)	7.17.	3)
1.18.	2)	2.18.	4)	3.18.	3)	4.18.	3)	5.18.	3)	6.18.	1)	7.18.	1)
1.19.	3)	2.19.	3)	3.19.	3)	4.19.	4)	5.19.	3)	6.19.	2)	7.19.	1)
1.20.	4)	2.20.	4)	3.20.	4)	4.20.	1)	5.20.	3)	6.20.	4)	7.20.	3)
1.21.	3)	2.21.	2)	3.21.	4)	4.21.	3)	5.21.	3)	6.21.	2)	7.21.	4)
1.22.	1)	2.22.	1)	3.22.	1)	4.22.	2)	5.22.	1)	6.22.	3)	7.22.	3)
1.23.	4)	2.23.	1)	3.23.	4)	4.23.	1)	5.23.	3)	6.23.	2)	7.23.	1)
1.24.	3)	2.24.	3)	3.24.	4)	4.24.	3)	5.24.	4)	6.24.	3)	7.24.	4)
1.25.	4)	2.25.	3)	3.25.	1)	4.25.	4)	5.25.	2)	6.25.	1)	7.25.	4)
1.26.	1)	2.26.	1)	3.26.	2)	4.26.	2)	5.26.	1)	6.26.	4)	7.26.	3)
1.27.	4)	2.27.	2)	3.27.	1)	4.27.	3)	5.27.	2)	6.27.	1)	7.27.	2)
1.28.	3)	2.28.	4)	3.28.	3)	4.28.	1)	5.28.	3)	6.28.	2)	7.28.	3)
1.29.	2)	2.29.	1)	3.29.	1)	4.29.	2)	5.29.	2)	6.29.	1)	7.29.	4)
1.30.	3)	2.30.	3)	3.30.	3)	4.30.	3)	5.30.	1)	6.30.	4)	7.30.	2)
1.31.	2)	2.31.	4)	3.31.	3)	4.31.	4)	5.31.	3)	6.31.	2)	7.31.	2)
1.32.	1)	2.32.	3)	3.32.	4)	4.32.	2)	5.32.	1)	6.32.	1)	7.32.	1)
1.33.	2)	2.33.	2)	3.33.	1)	4.33.	1)	5.33.	2)	6.33.	3)	7.33.	4)
1.34.	2)	2.34.	1)	3.34.	2)	4.34.	3)	5.34.	4)	6.34.	1)	7.34.	4)
1.35.	1)	2.35.	2)	3.35.	1)	4.35.	4)	5.35.	2)	6.35.	2)	7.35.	1)
1.36.	4)	2.36.	4)	3.36.	4)	4.36.	2)	5.36.	4)	6.36.	1)	7.36.	2)
1.37.	2)	2.37.	3)	3.37.	3)	4.37.	1)	5.37.	1)	6.37.	3)	7.37.	2)
1.38.	1)	2.38.	2)	3.38.	2)	4.38.	1)	5.38.	2)	6.38.	2)	7.38.	3)
1.39.	1)	2.39.	1)	3.39.	2)	4.39.	3)	5.39.	3)	6.39.	4)	7.39.	1)
1.40.	3)	2.40.	1)	3.40.	2)	4.40.	4)	5.40.	1)	6.40.	1)	7.40.	1)
1.41.	4)	2.41.	3)	3.41.	3)	4.41.	2)	5.41.	2)	6.41.	3)		
1.42.	2)	2.42.	3)	3.42.	2)	4.42.	2)	5.42.	3)	6.42.	4)		
1.43.	3)	2.43.	1)	3.43.	4)	4.43.	2)	5.43.	3)	6.43.	1)		
1.44.	4)	2.44.	4)	3.44.	1)	4.44.	4)	5.44.	2)	6.44.	2)		
1.45.	1)	2.45.	3)	3.45.	2)	4.45.	1)	5.45.	1)	6.45.	1)		
1.46.	2)	2.46.	2)	3.46.	1)	4.46.	3)	5.46.	2)	6.46.	4)		
1.47.	1)	2.47.	1)	3.47.	4)	4.47.	4)	5.47.	4)	6.47.	1)		
1.48.	2)	2.48.	3)	3.48.	1)	4.48.	1)	5.48.	1)	6.48.	3)		
1.49.	3)	2.49.	4)	3.49.	1)	4.49.	4)			6.49.	1)		
1.50.	2)	2.50.	2)	3.50.	2)	4.50.	2)			6.50.	2)		
1.51.	3)	2.51.	3)			4.51.	3)			6.51.	4)		
1.52.	2)	2.52.	2)			4.52.	4)			6.52.	3)		
1.53.	1)	2.53.	2)			4.53.	2)			6.53.	4)		
1.54.	3)	2.54.	1)			4.54.	1)			6.54.	2)		
1.55.	3)	2.55.	3)			4.55.	4)			6.55.	1)		
		2.56.	4)			4.56.	3)			6.56.	3)		
		2.57.	1)			4.57.	4)			6.57.	4)		
		2.58.	2)			4.58.	2)			6.58.	1)		
		2.59.	2)			4.59.	4)			6.59.	1)		
		2.60.	4)			4.60.	2)			6.60.	2)		
		2.61.	3)			4.61.	2)						
		2.62.	4)			4.62.	3)						
		2.63.	1)			4.63.	4)						
		2.64.	2)			4.64.	1)						
		2.65.	1)			4.65.	1)						
		2.66.	2)			4.66.	3)						
		2.67.	3)			4.67.	2)						
		2.68.	3)			4.68.	3)						
		2.69.	1)			4.69.	4)						
		2.70.	4)			4.70.	1)						
		2.71.	1)			4.71.	3)						

8.1.	4)	9.1.	2)	10.1.	1)	11.1.	1)	11.72.	1)	12.1.	2)
8.2.	1)	9.2.	4)	10.2.	2)	11.2.	3)	11.73.	3)	12.2.	1)
8.3.	1)	9.3.	1)	10.3.	3)	11.3.	4)	11.74.	3)	12.3.	3)
8.4.	1)	9.4.	3)	10.4.	1)	11.4.	2)	11.75.	1)	12.4.	1)
8.5.	4)	9.5.	3)	10.5.	3)	11.5.	1)	11.76.	2)	12.5.	4)
8.6.	2)	9.6.	1)	10.6.	2)	11.6.	1)	11.77.	4)	12.6.	2)
8.7.	2)	9.7.	2)	10.7.	1)	11.7.	3)	11.78.	3)	12.7.	1)
8.8.	3)	9.8.	4)	10.8.	1)	11.8.	4)	11.79.	1)	12.8.	3)
8.9.	3)	9.9.	3)	10.9.	3)	11.9.	2)	11.80.	2)	12.9.	1)
8.10.	2)	9.10.	4)	10.10.	1)	11.10.	3)	11.81.	2)	12.10.	1)
8.11.	4)	9.11.	1)	10.11.	1)	11.11.	4)			12.11.	3)
8.12.	1)	9.12.	3)	10.12.	4)	11.12.	1)			12.12.	3)
8.13.	1)	9.13.	3)	10.13.	1)	11.13.	2)			12.13.	1)
8.14.	3)	9.14.	2)	10.14.	1)	11.14.	2)			12.14.	4)
8.15.	4)	9.15.	1)	10.15.	3)	11.15.	4)			12.15.	1)
8.16.	2)	9.16.	1)	10.16.	1)	11.16.	1)			12.16.	1)
8.17.	2)	9.17.	4)	10.17.	4)	11.17.	4)			12.17.	2)
8.18.	3)	9.18.	1)	10.18.	4)	11.18.	1)			12.18.	4)
8.19.	1)	9.19.	2)	10.19.	2)	11.19.	3)			12.19.	3)
8.20.	2)	9.20.	3)	10.20.	2)	11.20.	2)			12.20.	1)
8.21.	1)	9.21.	4)	10.21.	1)	11.21.	1)			12.21.	4)
8.22.	2)	9.22.	1)	10.22.	3)	11.22.	2)			12.22.	2)
8.23.	4)	9.23.	1)	10.23.	3)	11.23.	4)			12.23.	4)
8.24.	2)	9.24.	2)	10.24.	4)	11.24.	4)			12.24.	4)
8.25.	1)	9.25.	3)	10.25.	1)	11.25.	2)			12.25.	1)
8.26.	2)	9.26.	3)	10.26.	1)	11.26.	2)			12.26.	1)
8.27.	1)	9.27.	2)	10.27.	1)	11.27.	2)			12.27.	2)
8.28.	3)	9.28.	2)	10.28.	3)	11.28.	1)			12.28.	1)
8.29.	4)	9.29.	1)	10.29.	2)	11.29.	1)			12.29.	4)
8.30.	2)	9.30.	4)	10.30.	1)	11.30.	2)			12.30.	2)
8.31.	1)	9.31.	4)	10.31.	2)	11.31.	2)			12.31.	1)
8.32.	3)	9.32.	4)	10.32.	3)	11.32.	2)			12.32.	3)
8.33.	1)	9.33.	4)	10.33.	4)	11.33.	1)			12.33.	1)
8.34.	4)	9.34.	1)	10.34.	1)	11.34.	3)			12.34.	2)
8.35.	1)	9.35.	2)	10.35.	4)	11.35.	4)			12.35.	4)
8.36.	3)	9.36.	3)	10.36.	2)	11.36.	4)			12.36.	1)
8.37.	2)	9.37.	4)	10.37.	3)	11.37.	1)			12.37.	2)
8.38.	3)	9.38.	3)	10.38.	2)	11.38.	2)			12.38.	4)
8.39.	3)	9.39.	1)	10.39.	4)	11.39.	3)			12.39.	2)
8.40.	2)	9.40.	2)	10.40.	1)	11.40.	4)			12.40.	3)
8.41.	2)	9.41.	1)	10.41.	3)	11.41.	3)			12.41.	4)
8.42.	3)	9.42.	4)	10.42.	2)	11.42.	2)			12.42.	3)
8.43.	4)	9.43.	2)	10.43.	4)	11.43.	4)			12.43.	2)
8.44.	1)	9.44.	4)	10.44.	2)	11.44.	1)			12.44.	1)
		9.45.	1)	10.45.	1)	11.45.	3)			12.45.	4)
		9.46.	3)	10.46.	3)	11.46.	4)			12.46.	1)
		9.47.	1)	10.47.	2)	11.47.	1)			12.47.	1)
		9.48.	1)	10.48.	4)	11.48.	2)				
		9.49.	1)	10.49.	3)	11.49.	2)				
		9.50.	3)	10.50.	2)	11.50.	1)				
		9.51.	1)	10.51.	1)	11.51.	3)				
		9.52.	3)	10.52.	2)	11.52.	4)				
		9.53.	3)	10.53.	2)	11.53.	2)				
		9.54.	2)	10.54.	1)	11.54.	3)				
		9.55.	4)	10.55.	1)	11.55.	1)				
		9.56.	2)	10.56.	2)	11.56.	3)				
		9.57.	1)	10.57.	4)	11.57.	4)				
		9.58.	3)			11.58.	1)				
		9.59.	2)			11.59.	2)				
		9.60.	2)			11.60.	3)				
		9.61.	3)			11.61.	4)				
		9.62.	4)			11.62.	1)				
		9.63.	2)			11.63.	1)				
						11.64.	1)				
						11.65.	2)				
						11.66.	2)				
						11.67.	3)				
						11.68.	4)				
						11.69.	3)				
						11.70.	1)				
						11.71.	3)				